JOSE CARLOS PUTNOKI "JOTA"
Professor de Geometria e Desenho Geométrico
do Curso Universitário, São Paulo,
e Colégio Universitário de Jundiaí.

ELEMENTOS DE
GEOMETRIA &

DESENHO GEOMÉTRICO

VOLUME 1
VOLUME 2
VOLUME ESPECIAL PARA O VESTIBULANDO

Livro do Professor
venda proibida

Respostas e sugestões aparecem apenas no livro do professor.

editora scipione

RESPONSABILIDADE EDITORIAL
Luiz Esteves Sallum
SUPERVISÃO EDITORIAL
Valdemar Vello
REVISÃO
chefia: Angelo Alexandref Stefanovits
preparação: Sâmia Rios
preparação de originais: Célia M. Delmont de Andrade
revisão de provas: José Roberto Segantini
Ruth Kluska Rosa
Vera Fedschenko
DIREÇÃO DE ARTE
M. Beatriz de Campos Elias
Antonio Tadeu Damiani
PROGRAMAÇÃO VISUAL E CAPA
Sylvio Ulhôa Cintra
ILUSTRAÇÕES
Diarte
COMPOSIÇÃO E ARTE
Diarte Composição e Arte Gráfica
coordenação geral: Nelson S. Urata
coordenação de arte-final: Silvio Vivian
composição: João Yuki Fukuji
composição: Catarina Horibe
diagramação: Sueli Minori Issaka
ilustrações: João Passos
arte-final: Eliana Mincov

todos os direitos reservados

editora scipione ltda.
Praça Carlos Gomes, 46 - CEP 01501
Caixa Postal 65.131
Tel. 37-4151
1989

divulgação
Rua Fagundes, 121 - CEP 01508
Caixa Postal 65.131
Tel. 37-4151

ISBN 85-262-1467-5

ISBN 85-262-1468-3

ISBN 85-262-1469-1
ISBN 85-262-1470-5
ISBN 85-262-1471-3
ISBN 85-262-1472-1

Dedico a
Fátima, Daniele
e Guilherme.

Sumário

Apresentação 5
Introdução 7

7. Instrumentos de desenho geométrico 60
Resolução algébrica × resolução gráfica 60
Os principais instrumentos 61

8. O método dos lugares geométricos 65
Primeiras construções fundamentais 65
O conceito de lugar geométrico: LG 66
Circunferência: LG 1 67
Mediatriz: LG 2 70
Traçado de retas perpendiculares 75
Traçado de retas paralelas 76
Retas paralelas: LG 3 79
Bissetriz: LG 4 83

9. Operações e construções com ângulos 87
Transporte de ângulos 87
Adição e subtração de ângulos 88
Traçado de paralelas por transporte de ângulos 88
Construção de ângulos notáveis 91

10. Ângulos na circunferência 93
Ângulo inscrito 93
Ângulo de segmento 98

11. Arcos como lugares geométricos 100
Arco capaz: LG 5 101
Traçado de tangentes 105

12. Razão e proporção 108
O conceito de razão 108
O conceito de proporção 109
Teorema de Tales 112

13. Divisão gráfica de segmentos 114
Divisão de segmentos em partes proporcionais 114
Quarta proporcional 117
Terceira proporcional 118

14. Semelhança 121
Polígonos semelhantes 122
Triângulos semelhantes 125
Relações métricas no triângulo retângulo 128

15. Construções com segmentos 133
Média geométrica ou média proporcional 133
Aplicações do teorema de Pitágoras 135
Segmento áureo 140

16. Triângulos 143
Cevianas notáveis 143
Pontos notáveis de um triângulo 145
Construção de triângulos 147
O emprego de figuras auxiliares 151
Soma ou diferença de elementos lineares 158

17. Quadriláteros 163
Quadriláteros notáveis 163
Construção de quadriláteros 170

Apêndice 173
Congruência de triângulos 173
Teoremas 176
Estabelecimento dos lugares geométricos 184

Respostas dos exercícios 188

Bibliografia 192

Sumário

Apresentação 5

1. Translação 7
Translação de uma figura 7
O emprego da translação nas construções geométricas 8

2. Simetria 17
Simetria axial ou rebatimento 17
Figuras simétricas 18

3. Homotetia 25
Multiplicação do ponto 25
Figuras homotéticas 28
Multiplicação da reta 30
Multiplicação da circunferência 30
O emprego da homotetia em problemas de posição 37

4. Processos aproximativos 43
Retificação da circunferência 43
Retificação de arcos de circunferência 49
Divisão de ângulos 53

5. Divisão da circunferência 55
Divisão da circunferência por processos exatos 55
Processos aproximativos para divisão da circunferência 60
Processos gerais para divisão da circunferência 62

6. Áreas das principais figuras geométricas 65
Áreas dos paralelogramos, triângulos e trapézios 65
Área do círculo 70
Área do setor circular 71

7. Equivalência 75
Problemas de quadraturas 75
Propriedade fundamental da equivalência 80
Transformação de polígonos em triângulos equivalentes 83
Razão entre áreas de figuras semelhantes 85
Problemas gerais de equivalência 91

8. Potência de um ponto em relação a uma circunferência 102
O conceito de potência de um ponto 103
Reta de Apolônio: LG 6 106
Eixo radical 110
Centro radical 113
Feixe de circunferências 115

9. Tangência 119
Método dos feixes de circunferências 119
O método da dilatação e contração de circunferências 124

10. Elipse 129
As cônicas 129
O conceito de elipse 130
Eixos de simetria 131
Centro de simetria 132
Construção da elipse por pontos 136
Circunferências diretoras 137
Tangência de reta e elipse 142

11. Hipérbole 148
O conceito de hipérbole 148
Eixos de simetria 149
Centro de simetria 150
Construção da hipérbole por pontos 153
Circunferências diretoras 154
Tangência de reta e hipérbole 158
Assíntotas da hipérbole 162

12. Parábola 167
O conceito de parábola 167
Eixo de simetria 168
Construção da parábola por pontos 170
Tangência de reta e parábola 173

Apêndice 178
Retificação de arcos de circunferência 178
O lado do pentágono regular 179
Divisão da circunferência 181
O cálculo de π 185

Respostas dos exercícios 190

Bibliografia 192

Sumário

Apresentação 5

1. Lugares geométricos 7
Relembrando os LGs já estudados 7
Lugar geométrico dos pontos médios: LG 8 10
Lugar geométrico da razão constante: LG 9 16

2. O método da semelhança 23
Recordando os critérios de semelhança 24

3. Quadriláteros inscritíveis 29

4. Revisitando os triângulos 36

5. Tangência: complementos 52

6. Ciclóides 70
Construção de ciclóides 71
Traçado de tangentes e normais às ciclóides .. 75

7. Epiciclóides e hipociclóides 79
O conceito de epiciclóide 79
Epiciclóides notáveis 80
Construção de uma epiciclóide notável 81
O conceito de hipociclóide 83
Hipociclóides notáveis 84
Construção de uma hipociclóide notável 84
Construção de epiciclóides e hipociclóides quaisquer 86

8. Espirais 88
Espirais policêntricas 88
Espiral de Arquimedes 90

9. Hélices 92
Cilindro circular reto 92
O conceito de hélice 93
Projeção da hélice 95

Respostas dos exercícios 96

Bibliografia 96

APRESENTAÇÃO

Este trabalho tem como objetivo oferecer aos professores e estudantes brasileiros um curso que desenvolve os mais importantes tópicos das construções geométricas planas, elaborado de modo a tratar o assunto de uma maneira diferente daquela habitualmente empregada. Apresentamos o Desenho Geométrico plenamente integrado à Geometria, fazendo com que o estudo dos problemas de construções evolua naturalmente a partir de teorias geométrias.

A linguagem utilizada na obra visa facilitar a compreensão, por parte do estudante, dos conceitos apresentados. Para tanto, duas medidas fundamentais foram tomadas. Primeiro: evitou-se o abuso da simbologia matemática, objetivando dar maior fluidez à leitura do texto. Segundo: nas resoluções dos problemas de construção, com muita freqüência, a exposicão verbal é acompanhada de figuras que mostram as etapas da evolução dos traçados, até chegar à forma final. Dessa forma, além da linguagem corrente, o estudante dispõe de uma linguagem gráfica, que constitui um eficiente recurso didático.

A obra é composta de três livros-texto, cada qual acompanhado de um caderno de atividades. Nos livros-texto, cada capítulo que aborda as construções é precedido de um estudo dos conceitos e propriedades geométricas necessários para apresentá-lo. Assim, vão se sucedendo capítulos teóricos de Geometria e de construções geométricas, sempre acompanhados de exercícios. As atividades dos livros-texto e dos cadernos, em conjunto, se completam e permitem explorar as mais variadas situações em que convém colocar o estudante para lhe assegurar um bom aprendizado. A divisão dos assuntos entre os três volumes seguiu os seguintes critérios:

- O **volume 1** contém os tópicos que constituem aquilo que se pode considerar a estrutura básica das construções geométricas. O seu conteúdo tem a finalidade de dar os subsídios essenciais aos estudantes e professores que, por razões de carga horária, só possam desenvolver este volume.
- Com os assuntos abordados no **volume 2** completa-se um curso que desenvolve os temas mais importantes das construções geométricas. Embora os exames vestibulares não sejam a preocupação central nos volumes 1 e 2, grande parte dos programas desses exames é concluída nesses dois volumes.
- O **volume especial para o vestibulando** tem o objetivo de complementar e aprofundar os tópicos desenvolvidos nos dois primeiros volumes. Ele é dirigido aos candidatos ao ingresso nas escolas de engenharia e arquitetura que incluem Desenho Geométrico em suas provas de seleção. Particularmente, o seu conteúdo é indispensável àqueles que pretendem ingressar no Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA).

Espero que este trabalho traga alguma contribuição ao ensino da Geometria.

O autor

APRESENTAÇÃO

Nos últimos anos, o ensino de Desenho Geométrico experimentou um quase abandono em nosso país e, por essa razão, deixaram de ser publicadas obras sobre o assunto. Agora, quando a cada ano um maior número de escolas dos vários estados brasileiros reincluem essa disciplina em suas grades curriculares, apresenta-se a dificuldade da falta de uma bibliografia sobre o tema. Assim, o objetivo deste trabalho é oferecer aos professores e estudantes um curso que desenvolva sistematicamente os principais tópicos das construções geométricas. Mas não apenas isso. Procurei dar a esse curso um tratamento diferente do tradicional. Sobre esse assunto, peço permissão para estender-me um pouco mais.

O ramo do Desenho Geométrico que aqui se vai estudar, isto é, as construções geométricas planas, foi desenvolvido e sistematizado pelos gregos, na Antiguidade, juntamente com a Geometria, pois, para os contemporâneos de Euclides, o Desenho Geométrico era parte da Geometria. Pois bem, uma das propostas pedagógicas deste trabalho é retomar a tradição euclidiana e, usando uma metáfora, devolver a Euclides a régua e o compasso. Convém salientar que essa não é exatamente uma proposta original, já que em muitos países ela é plenamente adotada; ou melhor, nunca foi abandonada. Assim, embora este curso esteja virtualmente voltado para o estudo das construções geométricas, ele não apenas procura conceituar e justificar geometricamente os seus problemas, mas, fundamentalmente, coloca essa temática dentro de uma seqüência natural das teorias geométricas.

Outra característica da obra é a linguagem. Com a intenção de facilitar a leitura e a compreensão dos textos por parte dos alunos e, assim, estimulá-los a, de fato, empregar o livro em seus estudos, procurei me utilizar de dois recursos que julgo importantes. Primeiro: evitei o abuso da linguagem simbólica da Matemática, que, não raras vezes, tem sido um empecilho para o estudante. Segundo: nas resoluções dos problemas de construção, com muita freqüência, a exposição verbal é acompanhada de figuras que mostram as etapas que compõem a evolução dos traçados, até chegar à forma final. Nessas ocasiões, pode-se dizer que o estudante dispõe de dois níveis de leitura: uma expressa em linguagem corrente e outra em linguagem gráfica.

Quanto à estrutura, a obra está dividida em três volumes de livros-texto, cada qual acompanhado de um caderno de atividades. Nos livros-texto, cada capítulo que trata das construções é precedido de um estudo dos conceitos e propriedades geométricas necessários para apresentá-lo. Assim, vão se sucedendo capítulos teóricos de Geometria e de construções geométricas, sempre acompanhados de exercícios. Ao longo dos capítulos de construções, sempre que conveniente e com bastante freqüência, há orientações que remetem o estudante ao caderno de atividades e indicam exatamente os exercícios correspondentes ao assunto que se acabou de desenvolver. Porém, convém salientar que há uma diferença sensível entre os exercícios propostos nos livros-texto e os propostos nos cadernos de atividades. Nestes últimos, os dados aparecem impressos, o que permite explorar os chamados problemas de posição. Neles, o que se quer para a resposta é uma figura que, de um modo geral, tem a sua posição vinculada a elementos graficamente dados. Além disso, deve-se observar que há capítulos que apresentam problemas cujas naturezas são tipicamente de posição, tais como a simetria, a homotetia, os problemas de tangência etc. Para esses casos, os cadernos de atividades são indispensáveis, uma vez que propor esses problemas nos livros-texto se tornaria inviável, pela dificuldade que haveria para manipular os instrumentos de Desenho. Já nos livros-texto os dados dos problemas de construção são apresentados através de medidas, sem as imagens geométricas. Nesses exercícios, pedem-se, como respostas, medidas de elementos que comparecem nas figuras a serem construídas. Isso permite avaliar mais acentuadamente a precisão dos traçados nas construções realizadas pelo estudante. Enfim, os exercícios propostos nos livros-texto e nos cadernos de atividades se completam e, em conjunto, permitem explorar as mais variadas situações em que convém colocar o estudante para lhe assegurar um bom aprendizado.

CADERNO
DE ATIVIDADES

A ordem do desenvolvimento da Geometria é que estabelece, na obra, a seqüência de estudo das construções. A distribuição dos assuntos entre os três volumes também segue alguns critérios. Vejamos quais são eles.

- O **volume 1** contém os tópicos que constituem o que se pode considerar a estrutura básica das construções geométricas. Nele se apresentam o método dos lugares geométricos e os cinco lugares que têm maior freqüência de aplicações nas construções. Estudam-se as construções de triângulos, assunto que possibilita propor uma grande variedade de exercícios, explorando de forma diversificada as técnicas de construção. Esse conteúdo tem a finalidade de dar os subsídios essenciais aos estudantes e professores de cursos que, por razões de carga horária, só possam desenvolver o volume 1. Acho ainda importante observar que, pelas suas características, o volume 1 pode ser convenientemente adotado em classes da 8.ª série do 1.º grau.
- O **volume 2** se inicia com o estudo das três principais transformações de figuras, que são a simetria, a translação e a homotetia. Seguem-se, na ordem, os capítulos que tratam dos processos aproximativos para retificar e dividir circunferências e arcos e dos estudos de equivalência, tangência e cônicas. Com esses assuntos completa-se um curso que desenvolve os assuntos mais importantes das construções geométricas. Embora os exames vestibulares não sejam a principal preocupação nos volumes 1 e 2, grande parte dos programas desses exames é concluída nesses dois volumes.

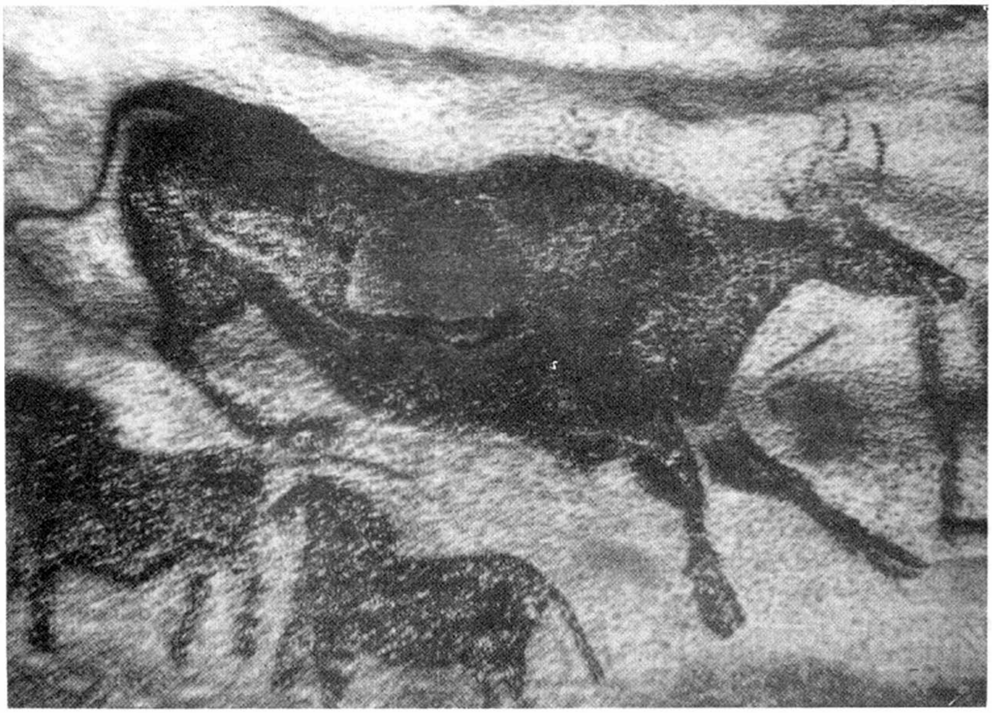
O **volume especial** para o **vestibulando** tem o objetivo de complementar e aprofundar os tópicos desenvolvidos nos dois primeiros volumes. Ele é dirigido aos candidatos ao ingresso nas escolas de engenharia e arquitetura que incluem Desenho Geométrico em suas provas de seleção. Particularmente, o seu conteúdo é indispensável àqueles que pretendem ingressar no Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA). O caderno de atividades que o acompanha tem várias questões propostas em vestibulares.

Espero que este trabalho traga alguma contribuição ao ensino da Geometria e peço aos professores que o utilizarem que nos encaminhem suas possíveis sugestões e críticas. Elas serão sempre bem-vindas e examinadas com toda a seriedade.

O autor

Introdução

Origem do desenho geométrico



Gruta de Lascaux, França.

''É possível inclusive que, a partir desta evolução nas relações do homem e da fauna, nascera, há 60 000 anos, uma arte tão direta, tão inspirada, tão pujante, que conservou sua imortal juventude.

''Não foi nada explosivo. A mão tentou desenhar os traços, movida por um pensamento nascente que logrou progressivamente sua regulação, que acumulou experiência e que fecundou a imaginação. E é impossível não evocar — tão grande é a continuidade de nossa espécie desde suas origens selvagens — nesses traços gravados no osso, nesses traços curvos e titubeantes, os riscos que traçavam, não há muito, os meninos, como elementos precursores da escrita.''

◁ Pierre-Paul GRASSÉ, in *La vie des animaux*, referindo-se à evolução do homem e ao surgimento da arte de desenhar.

Como linguagem de comunicação e expressão, a arte do desenho antecede em muito a da escrita. O que é a escrita se não a combinação de pequenos símbolos desenhados? Através de gravuras traçadas nas paredes das cavernas, o homem pré-histórico registrou fatos relacionados com o seu cotidiano, deixando indicadores importantes para os pesquisadores modernos estudarem os ancestrais de nossa espécie. Enfim, a arte do desenho é algo inerente ao homem.

Não se sabe quando, ou onde, alguém formulou pela primeira vez, em forma de desenho, um problema que pretendia resolver — talvez tivesse sido um ''projeto'' de moradia ou templo, ou algo semelhante. Mas esse passo representou um avanço fundamental na capacidade de raciocínio abstrato, pois esse desenho representava algo que ainda não existia, que ainda viria a se concretizar. Essa ferramenta, gradativamente aprimorada, foi muito importante para o desenvolvimento de civilizações, como a dos **babilônios** e a dos **egípcios**, as quais, como sabemos, realizaram verdadeiras façanhas arquitetônicas.

Porém, uma outra civilização, que não hesitava em absorver elementos de outras culturas, aprendeu depressa como passar à frente de seus predecessores; em tudo que tocavam, davam mais vida. Eram os **gregos**. Em todas as áreas do pensamento humano em que se propuseram a trabalhar realizaram feitos que marcaram definitivamente a história da humanidade.

Foram os gregos que deram um molde dedutivo à Matemática. A obra *Elementos*, de Euclides (± 300 a.C.), é um marco de valor inestimável, na qual a Geometria é desenvolvida de modo bastante elaborado. É na Geometria grega que nasce o Desenho Geométrico que aqui vamos estudar.

Na realidade, não havia entre os gregos uma diferenciação entre Desenho Geométrico e Geometria. O primeiro aparecia simplesmente na forma de problemas de construções geométricas, após a exposição de um item teórico dos textos de Geometria. Essa conduta euclidiana é seguida até hoje em países como a França, a Suíça, a Espanha etc., mas, infelizmente, os problemas de construção foram há muito banidos dos nossos livros de Geometria.

Entre os gregos não havia separação entre Desenho Geométrico e Geometria.

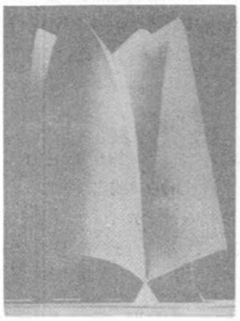
Assim, pode-se dizer que o Desenho Geométrico é um capítulo da Geometria que, com o auxílio de dois instrumentos, a régua e o compasso, se propõe a resolver graficamente problemas de natureza teórica e prática.

Para quem serve o desenho geométrico?

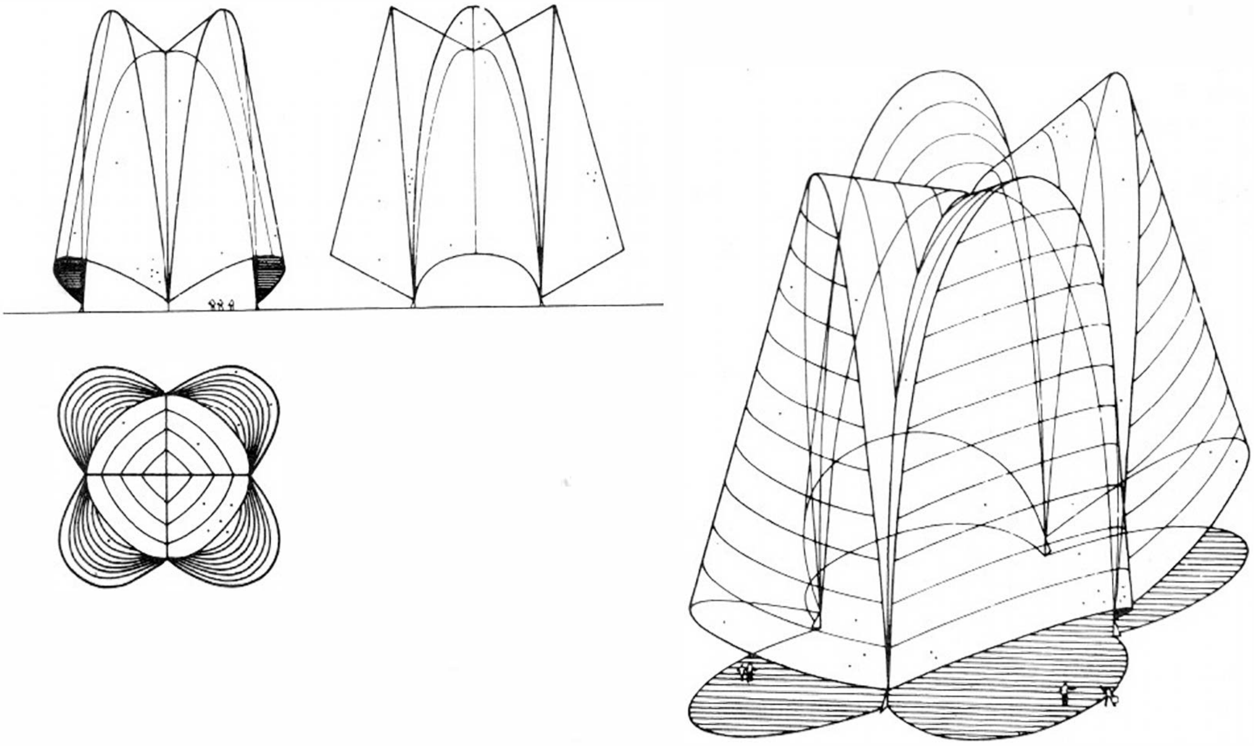
A resolução de um problema de construção geométrica, de um modo geral, compreende duas etapas:

- a pesquisa das propriedades e da seqüência de operações que possibilitam realizar a construção;
- a execução da construção pedida, servindo-se dos instrumentos de desenho.

Pois bem, na primeira etapa lidamos, de forma teórica, com os elementos da Geometria, exigindo-se do estudante muito empenho. O estudo do desenho, nessa fase, dará a oportunidade de desenvolver o raciocínio lógico-dedutivo, além de despertar a criatividade. Independentemente da área a que vá se dedicar futuramente como profissional, o estudante terá aí um elemento fundamental na sua formação.



Projeto apresentado no livro *Sistemas de estruturas*, de Heino Engel, Ed. Hemus.



Na segunda etapa, quando se manuseiam os instrumentos, desenvolve-se grandemente o sentido de organização; com freqüência, o estudante então experimenta a sensação de realização, ao ver se concretizarem, no papel, as idéias que possibilitaram a construção.

Especificamente os que pretendem orientar seus estudos para as áreas de Engenharia ou Arquitetura terão no Desenho Geométrico o instrumental necessário ao Desenho Projetivo, que, por sua vez, será muito utilizado nessas profissões.

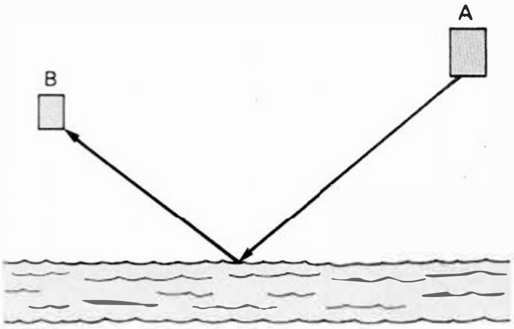
Para que serve o desenho geométrico?

O Desenho Geométrico é classificado como desenho resolutivo, pois através dele, determinam-se respostas precisas para problemas de natureza prática ou teórica.

Examinemos, como exemplos, alguns problemas que aprenderemos a resolver durante o curso, o que nos permitirá reconhecer sua utilidade.

Exemplo 1

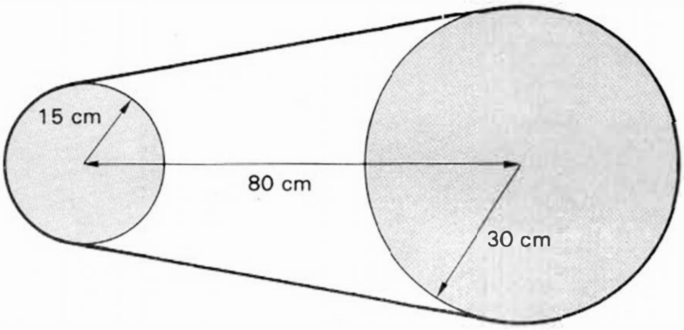
Um sitiante tem sua casa situada em A, um galinheiro em B, e dispõe de um riacho que segue o seu curso praticamente em linha reta. Diariamente ele sai de casa, vai até o riacho, enche um balde de água, que leva para o galinheiro. Qual deve ser a trajetória do sitiante para que ele ande o mínimo possível na execução dessa tarefa?



Os problemas aqui apresentados como exemplos serão oportunamente tratados. A metodologia que envolve suas resoluções é o tema central deste curso.

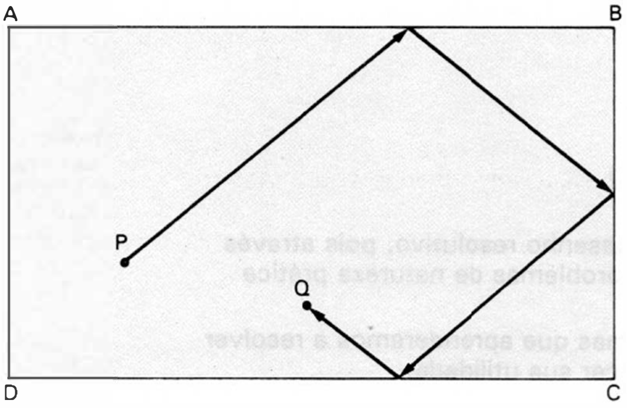
Exemplo 2

No projeto de uma máquina, duas polias, de raios medindo 15 cm e 30 cm, apresentam os seus centros a uma distância de 80 cm. Qual deve ser o comprimento de uma correia acoplada a essas polias?



Exemplo 3

Na figura seguinte, o retângulo ABCD representa uma mesa de bilhar na qual há uma bola situada em P e outra em Q. Como determinar a trajetória que deve seguir a bola em P, para que após fazer tabelas nos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem, venha a atingir a bola situada em Q?



Os exemplos dados ilustram situações práticas em que o Desenho Geométrico pode ser aplicado. Durante esse curso, apresentaremos problemas dessa natureza, sempre que for conveniente, embora esse trabalho não pretenda estar inteiramente voltado às aplicações. Nosso objetivo principal é explorar o assunto de modo a impelir o estudante a aperfeiçoar seu raciocínio lógico, a desenvolver sua criatividade e a aguçar seu senso de organização. Se isso for conseguido, esta será, sem dúvida, a maior colaboração que estaremos dando aos estudantes, pois deixaremos marcas indeléveis nas suas formações, mesmo que futuramente eles não tenham que se servir diretamente do desenho nas suas vidas profissionais.

7

Instrumentos de Desenho Geométrico

Resolução algébrica × resolução gráfica

Até agora, viemos construindo figuras que, embora bem-feitas, não tinham o compromisso da exatidão. Daqui por diante, entretanto, o enfoque dos problemas mudará, pois vamos justamente estudar métodos que permitirão construir figuras precisas, com as medidas de segmentos, de ângulos etc., representadas como elas são na realidade, para que possamos medir qualquer elemento dessas figuras.

Vamos exemplificar os dois tipos de conduta mencionados. O leitor não deve se preocupar com os elementos teóricos utilizados, apenas perceber a diferença entre uma **resolução algébrica** e uma **resolução gráfica**.

Problema: Calcular a medida do lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC, sabendo que $AB = 5\,cm$, $AC = 4\,cm$ e $\hat{A} = 60°$.

Resolução algébrica: Desenhamos uma figura meramente ilustrativa e aplicamos uma fórmula da trigonometria chamada lei dos cossenos. Seja a a medida do lado procurado.

Pela lei dos cossenos, temos:

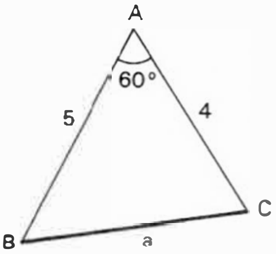
$$a^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cos 60°$$

$$a^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

Efetuando as operações, chegamos em:

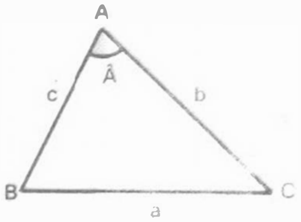
$$a^2 = 21$$

Portanto, $a = \sqrt{21}$, ou ainda, $a \simeq 4,6$.



Resposta: BC = 4,6 cm

Lei dos cossenos

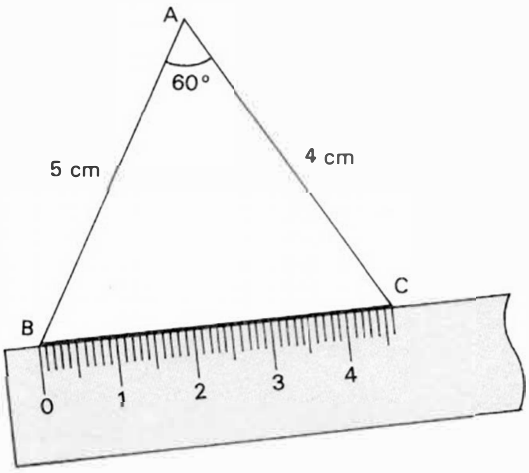


$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos \hat{A}$

Se você desconhece esta fórmula, não se preocupe; ela só é usada aqui como exemplo.

Convém insistir que a figura, na resolução algébrica, é apenas ilustrativa. Seu objetivo é concretizar os dados do problema. Na realidade, ela é completamente dispensável para alguém familiarizado com a Geometria e a lei dos cossenos.

Resolução gráfica: Com os dados do problema, construímos o triângulo ABC com as medidas reais e, em seguida, medimos o lado BC. (Isso nós vamos aprender.)



Resposta: BC = 4,6 cm.

Em completa oposição à resolução algébrica, vemos que, na resolução gráfica, a figura fornece a resposta. Ela deixa de ser uma ilustração e se torna a própria resolução.

Evidentemente, para chegarmos a uma resposta precisa através de uma resolução gráfica, é necessário desenharmos com a máxima exatidão. Daremos algumas orientações para que isso seja conseguido, mas desde já convém saber que um bom desenho se consegue, principalmente, com **treino** e com **capricho**. A palavra *capricho* tem aqui um sentido bastante amplo, que abrange desde os cuidados na construção de uma figura, até a manutenção e manuseio dos instrumentos utilizados. Vejamos quais são esses instrumentos.

Os principais instrumentos

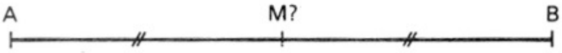
Os instrumentos de Desenho Geométrico por excelência são a **régua** e o **compasso**. Porém, durante esse curso, vamos utilizar também um par de **esquadros** e um **transferidor de graus**, além, obviamente, do **lápis** e da **borracha**.

A régua

No sentido original da palavra, a régua não é um instrumento de medida, mas apenas um instrumento que permite traçar linhas retas, e é fundamentalmente nesse sentido que ela será utilizada nas construções.

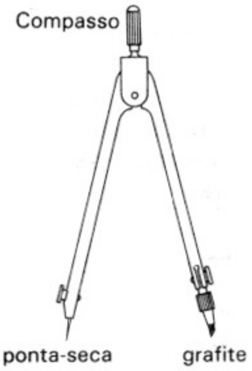
Não é permitido o uso da escala da régua para executar operações (aritméticas). Suponha, por exemplo, que tenhamos que determinar o ponto médio de um segmento AB. **Não podemos medir** o segmento AB com a régua, dividir essa medida por 2 e então marcar o ponto médio.

Veremos adiante que o ponto médio de um segmento pode ser obtido por processos puramente gráficos.

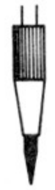


A escala da régua só deverá ser utilizada para **colocar os dados** do problema **no papel** ou para **medir** possíveis **respostas** procuradas.

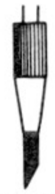
O compasso



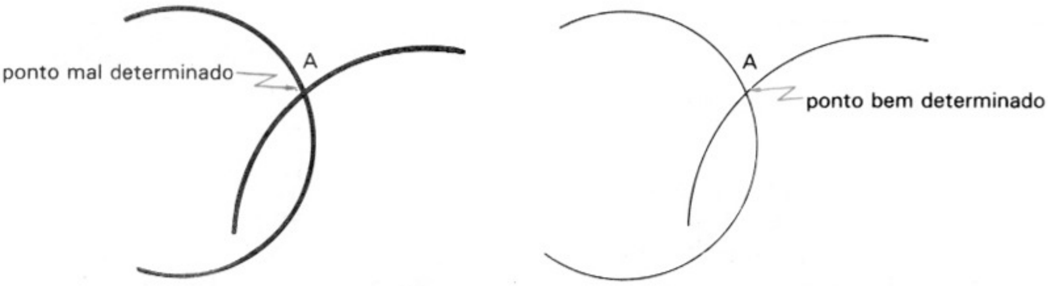
O compasso é o instrumento que permite traçar circunferências ou arcos de circunferências. Convém utilizar **grafite HB** no compasso, mantendo-a sempre bem apontada. (Capricho!) A ponta da grafite pode ser cônica ou ter a forma de cunha. Convém somente insistir que ela deve estar sempre muito bem apontada, para produzir traçados os mais finos possíveis. Essa é condição essencial para se conseguirem figuras precisas.



Grafite com ponta cônica.



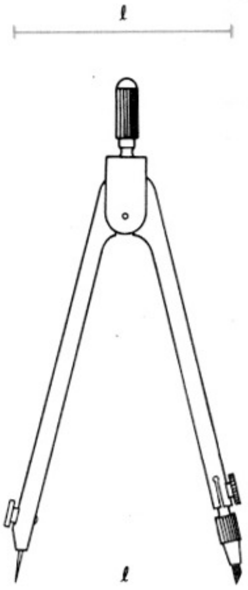
Grafite com ponta em forma de cunha.



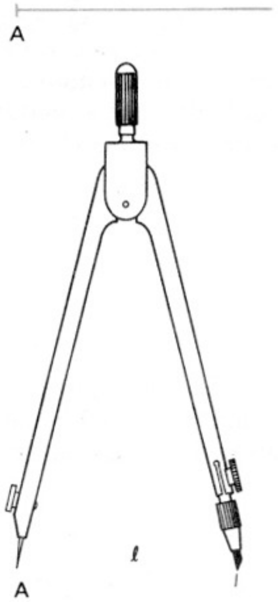
Não esqueça que as linhas ideais não têm espessura e que os pontos não têm tamanho algum.

O compasso é também o instrumento utilizado para transportar segmentos de uma posição para outra.

Exemplo: Construir um segmento AB de comprimento ℓ dado, de modo que ele caia sobre uma semi-reta dada, com a extremidade A na origem da semi-reta.



1.º passo

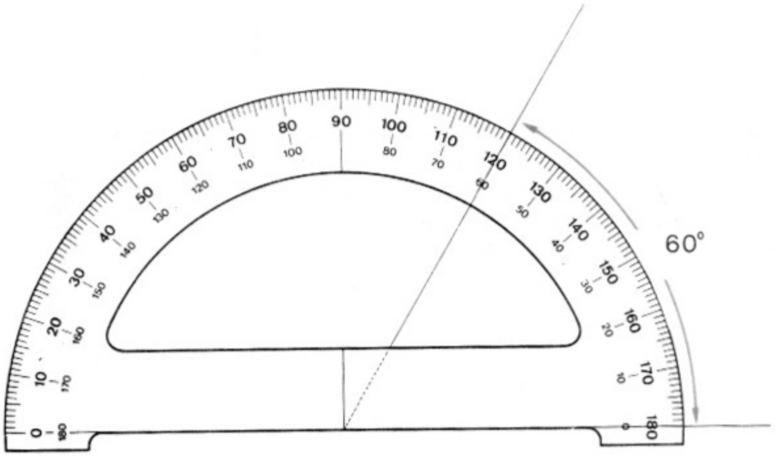


2.º passo

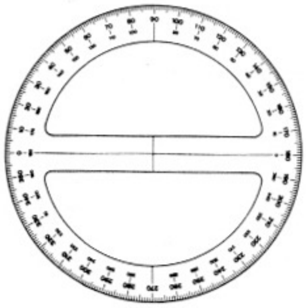
- Fixa-se a ponta seca do compasso numa das extremidades do segmento dado e regula-se a abertura de modo que o raio seja igual a ℓ.
- Sem alterar a abertura do compasso, coloca-se a ponta seca em A e descreve-se um arco de circunferência, o qual intercepta a semi-reta em B. Portanto, $\overline{AB}$ é o segmento de medida ℓ transportado sobre a semi-reta.

O transferidor

O transferidor de graus (ou, simplesmente, transferidor) é o instrumento de medida de ângulos. Assim como a escala da régua, o transferidor será exclusivamente usado para colocar dados do problema no papel ou para medir respostas.



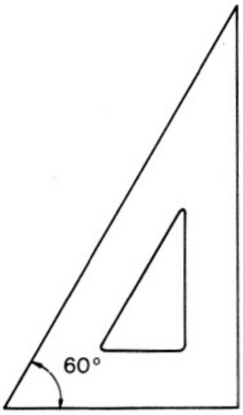
Existem também transferidores com 360°.



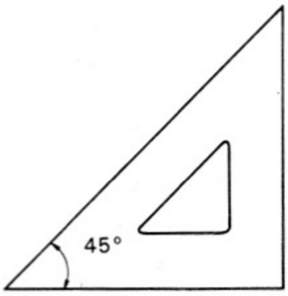
Observe a figura. O transferidor tem normalmente a forma de um semicírculo e possui graduações de 0° a 180°. Basta colocar o centro do semicírculo no vértice do ângulo a ser medido e fazer com que um dos lados do mesmo passe pela marca 0°. Agora é só ler a medida do ângulo na graduação que está sobre o outro lado.

O par de esquadros

São dois os tipos de esquadros que vamos utilizar. O de 60° e o de 45°. Os esquadros são utilizados para traçar retas perpendiculares ou paralelas a uma reta dada.



Esquadro de 60°

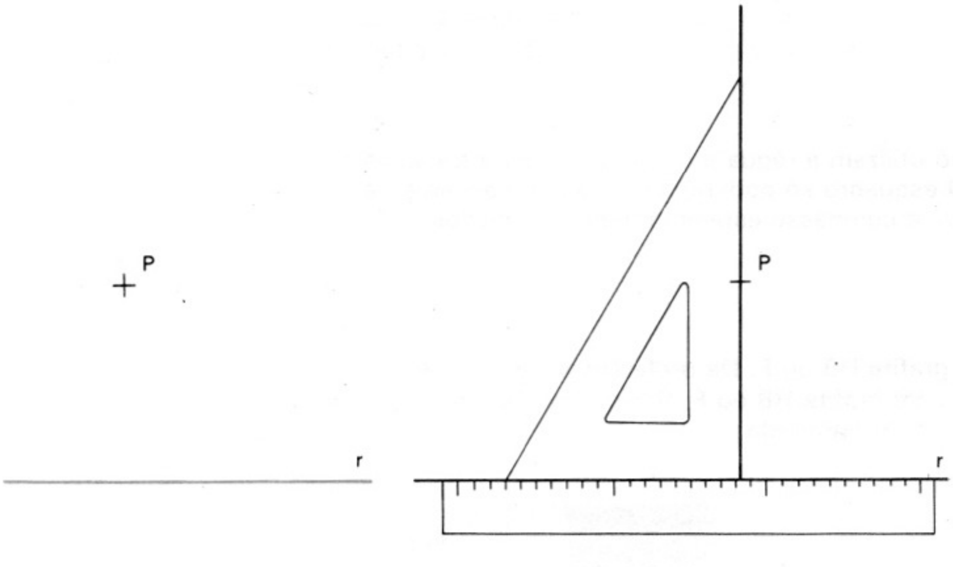


Esquadro de 45°

Na impossibilidade de trabalhar com o par de esquadros, obtenha pelo menos um deles. Substitua o outro pela régua, usando-a como guia. Veja o problema abaixo.

Problema

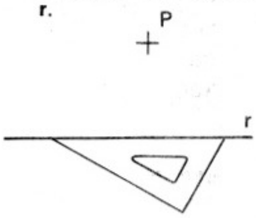
Pelo ponto P traçar a reta **s** perpendicular à reta **r** dada.



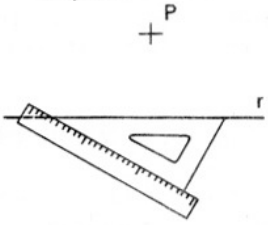
Basta colocar a régua de modo que a sua borda coincida com a reta **r**. Então, apóia-se o esquadro sobre a régua, deslizando-o até que sua borda fique sobre P. Agora é só traçar a perpendicular.

Veja através das figuras um outro processo para o traçado de perpendiculares:

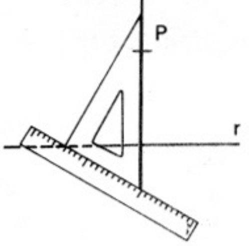
1.º) Faz-se a borda do esquadro coincidir com **r**.



2.º) Apóia-se a régua no esquadro.



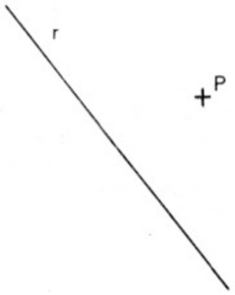
3.º) Sem tirar a régua de posição, vira-se o esquadro.



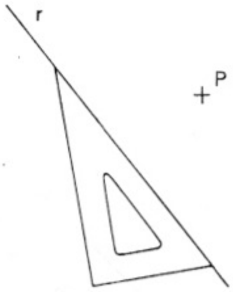
Problema

Pelo ponto P, traçar a reta **s** paralela à reta **r** dada.

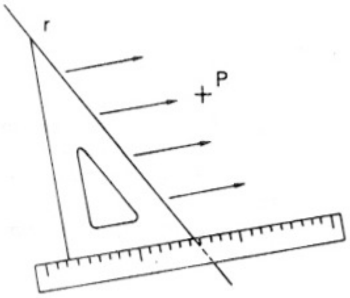
Basta proceder como indica a seqüência de figuras.



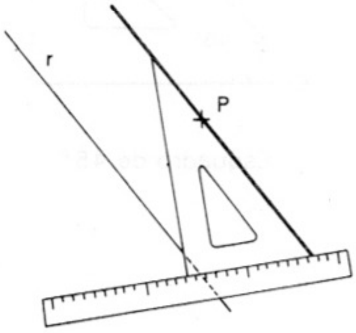
1.º passo



2.º passo



3.º passo

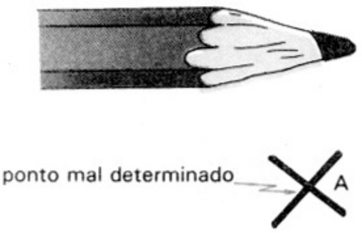


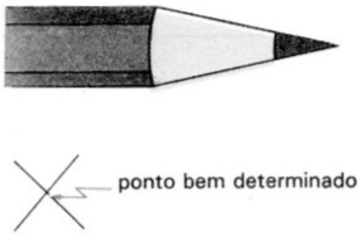
1.º) Colocamos o esquadro de modo que uma borda coincida com a reta **r**.
2.º) Colocamos uma régua perfeitamente apoiada na base do esquadro.
3.º) Deslizamos o esquadro, sempre apoiado na régua, até que a borda que coincidiu com **r** encontre o ponto P. Basta agora traçar a reta **s**. Caso a régua tenha saído de posição, por pouco que seja, deve-se reiniciar todo o processo.

Uma advertência importante
Estudaremos processos que só utilizam a régua e o compasso para traçados de paralelas e perpendiculares. O esquadro só poderá ser utilizado mais adiante, quando os processos por régua e compasso estiverem bem dominados.

O lápis e a borracha

Pode-se utilizar um lápis com grafite HB ou F. De preferência, recomenda-se o uso de uma **lapiseira** também com grafite HB ou F, 0,3 mm ou 0,5 mm, que tem a vantagem de não precisar ser apontada.





Quanto à borracha, deve-se usar uma bem macia.

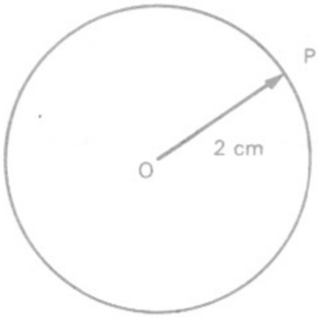
8

O método dos lugares geométricos:

Primeiras construções fundamentais

Importante: O universo do trabalho neste livro é o plano. Todas as definições e proposições que serão feitas estarão restritas ao plano.

Considere uma circunferência de centro O e raio **r** = 2 cm.
Observe a figura e reflita sobre as duas perguntas a seguir:



Pergunta 1: Todo ponto P que pertence a essa circunferência dista 2 cm de O?

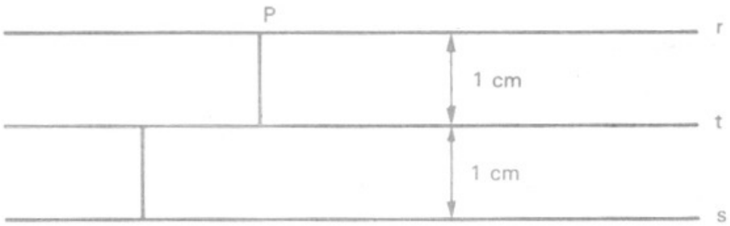
Pergunta 2: Somente os pontos que pertencem a essa circunferência distam 2 cm de O? (Não esqueça que estamos pensando no plano.)

A resposta a cada uma das perguntas é, evidentemente, **sim**.

Pois bem. Notamos, então, que uma circunferência de raio **r** e centro O é uma figura cujos pontos satisfazem duas condições:

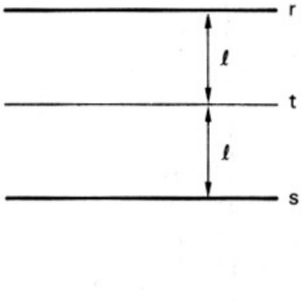
- todos os seus pontos distam **r** de O;
- somente os seus pontos distam **r** de O.

Considere, agora, uma reta **t** e as retas **r** e **s** paralelas a **t**, distantes 1 cm da mesma. Reflita novamente sobre duas perguntas:



Pergunta 1: Todo ponto P de **r** ou de **s** dista 1 cm de **t**?

Pergunta 2: Somente os pontos de **r** ou de **s** distam 1 cm de **t**?



Novamente a resposta a ambas as perguntas é **sim**.

De um modo geral, duas paralelas **r** e **s** a uma reta **t**, distantes ℓ de **t**, constituem uma figura cujos pontos satisfazem duas condições:

- todos os seus pontos distam ℓ da reta **t**;
- somente os seus pontos distam ℓ da reta **t**.

Podemos apresentar agora o conceito de lugar geométrico.

O conceito de lugar geométrico: LG

Definição

Uma figura é denominada **lugar geométrico** dos pontos que possuem uma propriedade φ quando, e somente quando:

- **todos os pontos** dessa figura possuem a propriedade φ;
- **somente os pontos** dessa figura possuem a propriedade φ.

φ é uma letra do alfabeto grego, que se lê "fi".

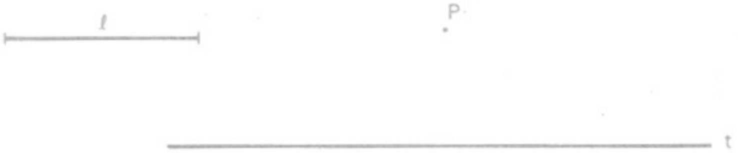
Assim, a circunferência e as paralelas à reta **t**, examinadas anteriormente, são exemplos de figuras que podem receber o nome de **lugares geométricos.**

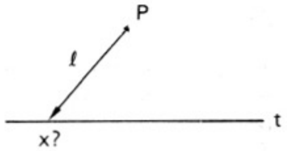
No caso das retas **r** e **s** paralelas à reta **t**, a propriedade φ que possuem os seus pontos é: eles **distam 1 cm da reta t**.

As figuras que constituem um LG são um eficiente recurso para a resolução gráfica de problemas.

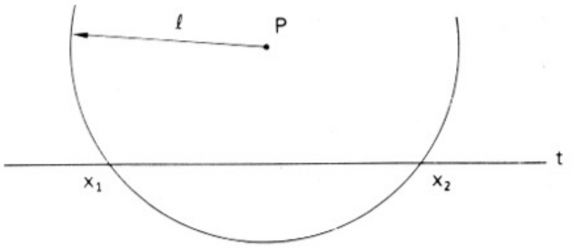
Examinemos um exemplo:

Problema: São dados um ponto P, uma reta **t** e uma distância ℓ. Determinar um ponto X de **t** que diste ℓ de P.





Resolução: Com centro em P e raio igual a ℓ, descrevemos uma circunferência que intercepta **t** no ponto X procurado:



O fato de o enunciado expressar "um ponto X" não significa obter um único ponto X. Nesse problema, obtivemos dois pontos, X_1 e X_2, que satisfazem as condições exigidas. Diremos, então, que o problema admitiu duas soluções.

A expressão "**um** ponto X" tem o sentido de especificar que tipo de ente geométrico é procurado. No caso, **um** ponto. Mas poderia ser **uma** reta, **um** triângulo etc.

Resposta: X_1 e X_2.

Essa resolução nos conduz às seguintes indagações:

- Podemos ter certeza que X_1 e X_2 são os pontos procurados?

Ora, os pontos X_1 e X_2 pertencem à circunferência. Mas **todos os pontos da circunferência distam ℓ de P**.

Logo, X_1 e X_2 distam ℓ de P. E como esses pontos pertencem à reta **t**, eles têm as duas condições exigidas no problema.

- Podemos ter certeza de que não há outros pontos que satisfazem as condições do problema?

Como uma circunferência corta uma reta no máximo em dois pontos, conclui-se que, se eles existissem, deveriam estar fora da circunferência. Essa conclusão é absurda, pois somente os pontos da circunferência distam ℓ de P.

Viu? O fato de a circunferência ser um LG nos dá a certeza matemática de que:

- os pontos X_1 e X_2 são soluções do problema;
- não há outros pontos além deles que solucionam o problema.

O emprego de figuras que constituem lugares geométricos nas resoluções de problemas gráficos é chamado **método dos lugares geométricos**.

Esse método é aplicado para a determinação de pontos e pode ser sintetizado da seguinte forma:

Procura-se um ponto que satisfaça as condições impostas num problema. Então:

- Imagina-se o problema já resolvido e faz-se uma figura-rascunho onde destaca-se o ponto procurado.
- Pesquisam-se, na figura-rascunho, duas propriedades, φ_1 e φ_2, desse ponto, que definam dois lugares geométricos aos quais ele pertence.
- Constroem-se esses lugares geométricos obtendo o ponto na intersecção de ambos.

É evidente que só iremos compreender plenamente esse método depois de empregá-lo várias vezes.

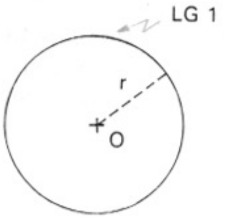
Figura "rascunho" não significa figura malfeita, mas sim uma figura na qual os elementos não têm as medidas de fato desejadas. Ela é fundamental na resolução dos problemas, pois traduz graficamente aquilo que se exige, materializando o que era abstrato quando formulado só em palavras.

Começaremos, a partir de agora, a realizar um estudo sistemático desse método.

Circunferência: LG 1

LG 1

O lugar geométrico dos pontos que estão a uma igual distância de um ponto dado é a circunferência que tem centro nesse ponto e raio igual à distância dada.

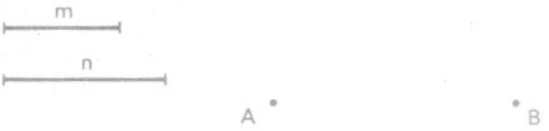


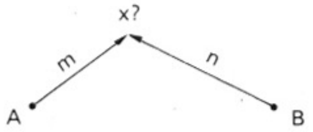
A circunferência é o LG 1.

Sempre que um ponto procurado estiver a uma distância **r** conhecida de um ponto O conhecido, esse ponto pertencerá à circunferência de centro O e raio **r**.

Exercícios

E8.1 São dados dois pontos, A e B, e duas distâncias, **m** e **n**. Obtenha um ponto X que diste **m** de A e **n** de B.



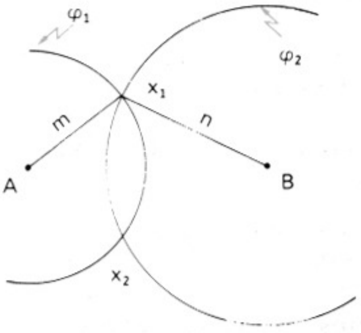


Aqui, o problema é suposto resolvido.

Resolução: Conhecemos duas propriedades do ponto procurado:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: X dista } \mathbf{m} \text{ de A (LG 1)} \\ \varphi_2\text{: X dista } \mathbf{n} \text{ de B (LG 1)} \end{cases}$$

Basta então traçarmos duas circunferências, uma de centro A e raio **m**, e outra de centro B e raio **n**. O ponto X encontra-se na intersecção das duas.



Com os dados do problema, obtivemos duas soluções, X_1 e X_2.

Resposta: X_1 e X_2.

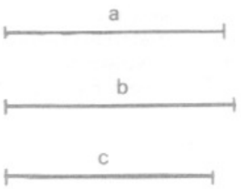
E8.**2** Marque no papel dois pontos A e B distantes 7 cm um do outro.

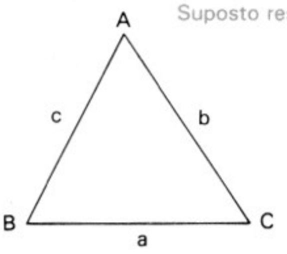
a) Determine um ponto X distante 5 cm de A e 4 cm de B. Quantas soluções tem o problema?

b) Determine um ponto X distante 3 cm de A e 4 cm de B. Quantas soluções tem o problema?

c) Determine um ponto X distante 2 cm de A e 3 cm de B. Quantas soluções tem o problema?

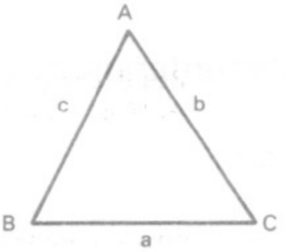
E8.**3** Construa um triângulo ABC, dados os lados **a**, **b** e **c**.





Suposto resolvido

Num triângulo ABC, o lado oposto ao vértice A terá seu comprimento representado por **a**, o lado oposto a B, por **b** e o lado oposto a C, por **c**. Será sempre assim daqui por diante:

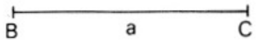


Resolução: Notamos inicialmente que construir um triângulo significa determinar três pontos (A, B e C). Marcamos então dois pontos, B e C, distantes **a** um do outro. Só falta determinar A. Mas, desse ponto, conhecemos duas propriedades:

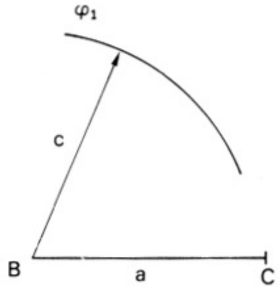
$$\begin{cases} \varphi_1\text{: A dista } \mathbf{c} \text{ de B (LG 1)} \\ \varphi_2\text{: A dista } \mathbf{b} \text{ de C (LG 1)} \end{cases}$$

Encontramos o ponto A na intersecção das circunferências de centro B e raio **c**, e de centro C e raio **b**.

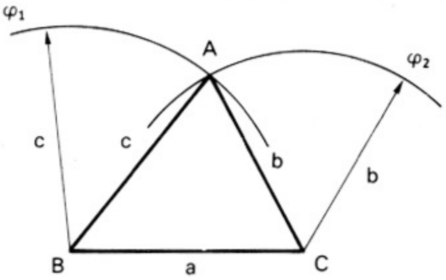
1.º passo



2.º passo



3.º passo



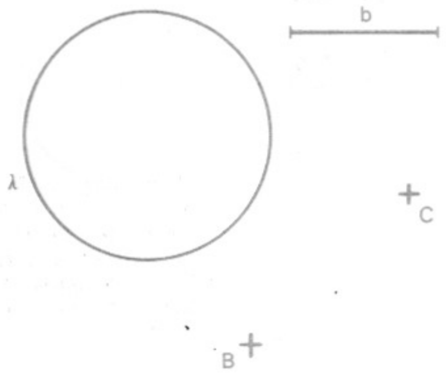
E8.**4** Construa um triângulo ABC, dados a = 10 cm, b = 6 cm e c = 8 cm. Qual a medida de Â? (Use o transferidor para medir.)

E8.**5** Construa um triângulo ABC isósceles, dados a = 5 cm, b = c = 6 cm e classifique-o quanto aos ângulos.

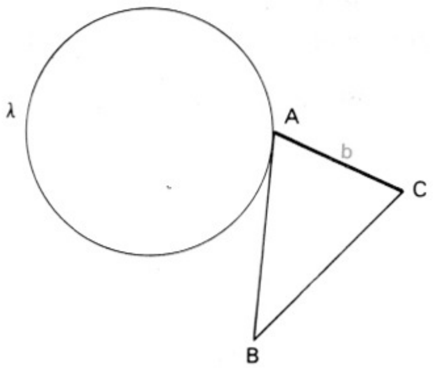
E8.**6** Construa um triângulo eqüilátero de lado ℓ = 5 cm. Verifique, com o transferidor, que um ângulo interno qualquer mede 60°.

E8.7 São dados dois pontos B e C e uma circunferência λ. Construa um triângulo ABC, conhecendo o lado **b** e sabendo que o vértice A pertence à circunferência λ.

λ é uma letra do alfabeto grego, que se lê ''lâmbida''.



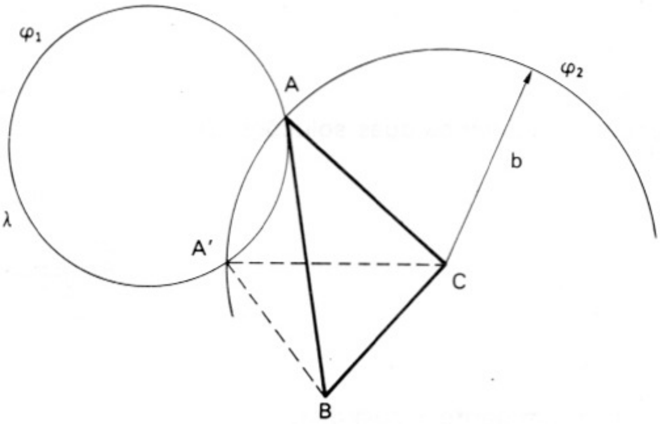
Suposto resolvido



Resolução: Como são dados dois vértices, B e C, só resta determinar A. Mas, para esse ponto, conhecemos duas propriedades:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: A pertence a } \lambda \\ \varphi_2\text{: A dista } \mathbf{b} \text{ de C (LG 1)} \end{cases}$$

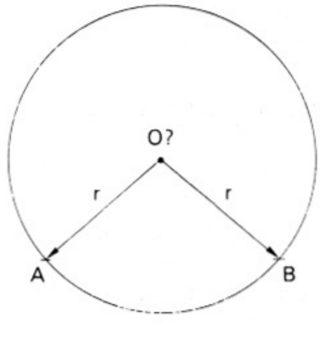
Então, obtemos A na intersecção da circunferência λ com a circunferência de centro C e raio **b**.



Observação: Note que, com os dados do problema, obtivemos duas soluções: triângulo ABC e triângulo A'BC.

E8.8 São dados dois pontos, A e B, e uma distância **r**. Construa uma circunferência que passa por A e B e que tem raio igual a **r**.

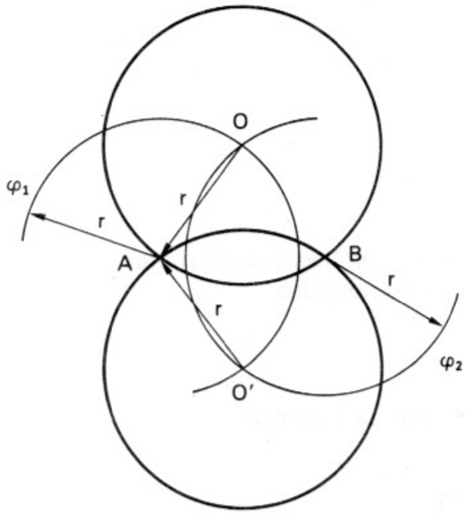
Suposto resolvido



Resolução: Já que conhecemos o raio da circunferência procurada, para construí-la é necessário apenas determinar o seu centro, O. Mas, para o centro, conhecemos duas propriedades:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: O dista } \mathbf{r} \text{ de A (LG 1)} \\ \varphi_2\text{: O dista } \mathbf{r} \text{ de B (LG 1)} \end{cases}$$

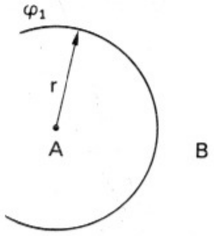
Então, O está na intersecção das circunferências de centro A e raio **r**, e de centro B e raio **r**.



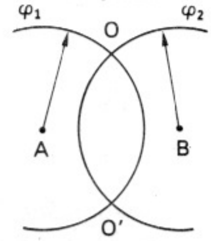
Observação: Com os dados do problema, obtivemos duas soluções, O e O′.

Evolução do traçado

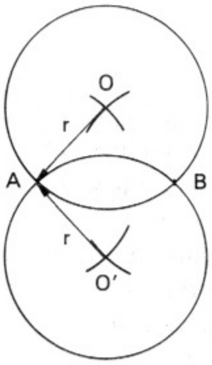
1.º passo



2.º passo



3.º passo

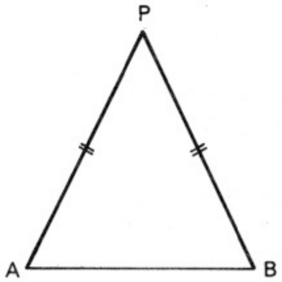


Resolva os exercícios de 1 a 8 do caderno de atividades.

Mediatriz: LG 2

Dado um segmento AB, você é capaz de imaginar um ponto P cuja distância até A seja igual à distância até B, isto é, PA = PB?

É claro que sim! Basta pensar num triângulo isósceles PAB, onde $\overline{AB}$ é a base.

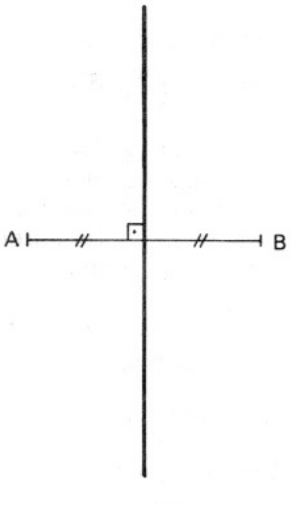


Quando um ponto P está a **igual distância** de dois pontos A e B, dizemos que P é **eqüidistante** de A e B.

Dados dois pontos A e B, quantos pontos eqüidistantes de A e B você é capaz de imaginar? Muitos?

Sim, são muitos. Na realidade, são **infinitos** os pontos que eqüidistam de A e B. Basta imaginar uma infinidade de triângulos isósceles construídos sobre a base $\overline{AB}$. Todo vértice P, de um desses triângulos PAB, é um ponto eqüidistante de A e B:

Não esqueça que a mediatriz de $\overline{AB}$ é a reta perpendicular a $\overline{AB}$ que passa pelo ponto médio do segmento.

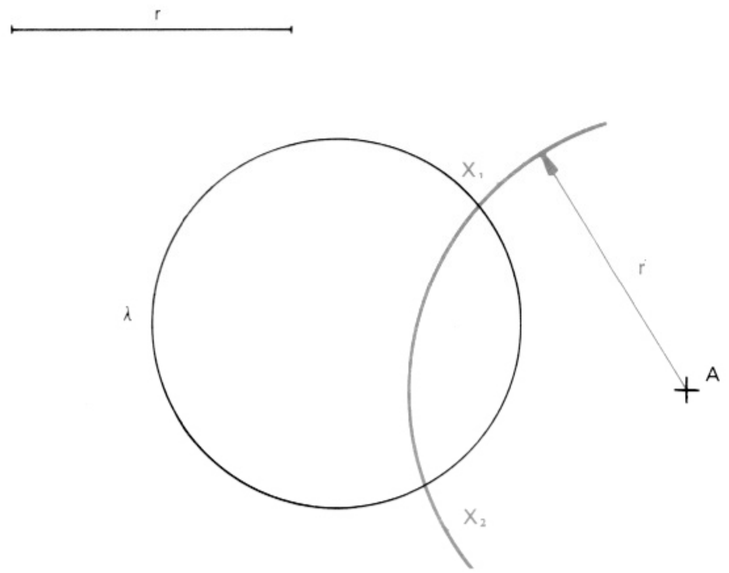


Circunferência: LG 1

Figura auxiliar e anotações

1 São dados um ponto A, uma circunferência λ e uma distância **r**. Determine um ponto X de λ que diste **r** de A.

Nota: λ lê-se "lâmbida".



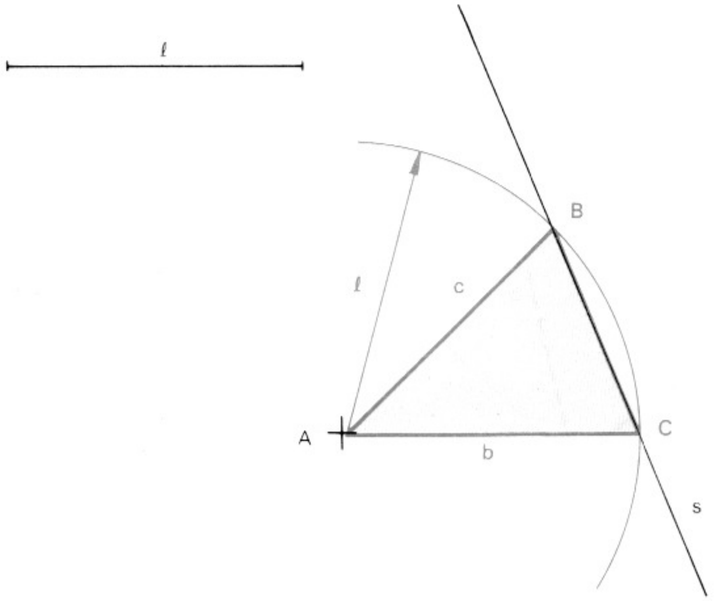
Observações:

1) Incentive o aluno a traçar sempre figuras auxiliares bem como fazer anotações referentes à resolução do exercício.

2) Verifique sempre se o aluno percebeu e registrou todas as possíveis soluções do exercício (X_1 e X_2).

Sugestão:
Proponha um exercício em que a distância de A e λ seja maior ou igual a **r**.

2 São dados uma reta **s**, um ponto A e uma distância **ℓ**. Construa um triângulo ABC isósceles, sabendo que $b = c = \ell$ e que a base $\overline{BC}$ está contida na reta **s**.



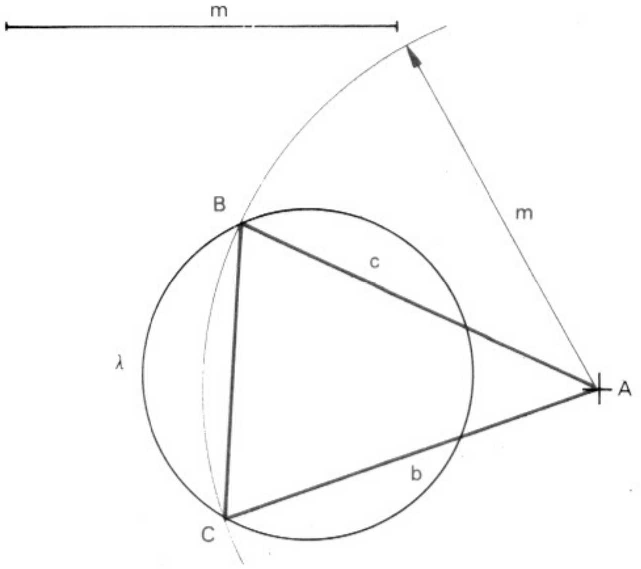
Sugestão:
Pergunte ao aluno o que ocorre com o ângulo Â quando o ponto A se aproxima ou se afasta da reta **s**, mantendo **ℓ** constante.

Circunferência: LG 1

Figura auxiliar e anotações

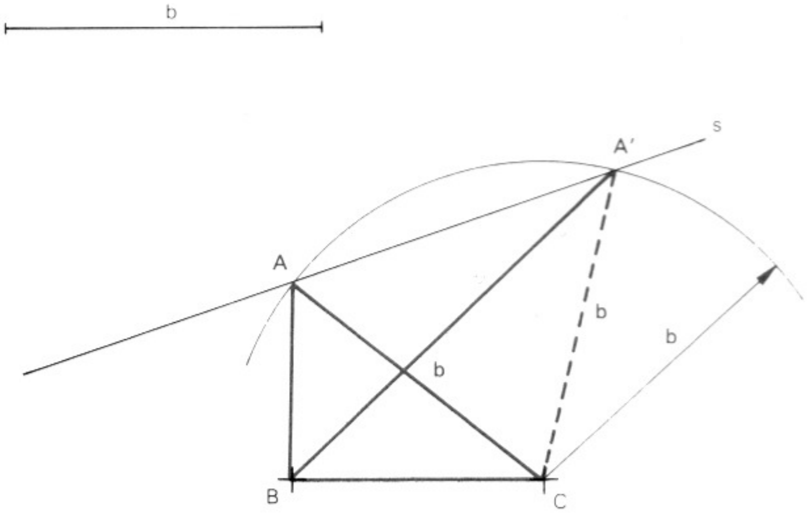
3 São dados um ponto A, uma circunferência λ e uma distância **m**. Construa um triângulo ABC isósceles, sabendo que b = c = m e que B e C pertencem a λ.

Sugestão:
Pergunte novamente ao aluno o que ocorre com o ângulo Â conforme o ponto A se afasta ou se aproxima de λ.



4 São dados os pontos B e C e uma reta **s**. Construa um triângulo ABC, conhecendo o lado **b** e sabendo que A pertence à reta **s**. Quantas soluções admite o problema?

Observação:
Convém insistir com o aluno que **b** é oposto a B, assim como **a** é oposto a A e **c** a C.

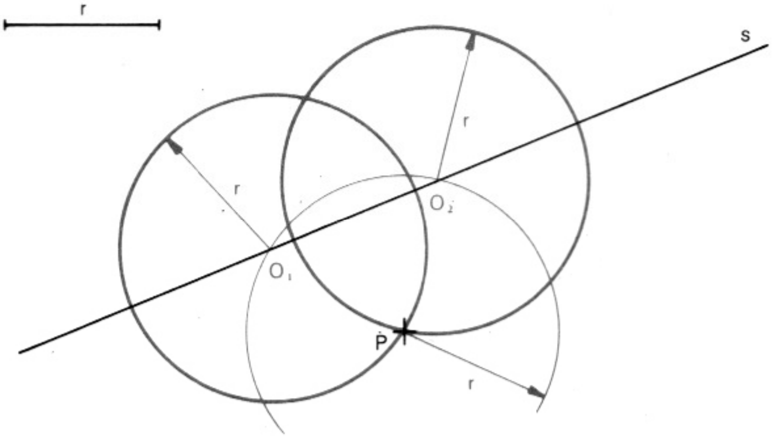


O problema admite duas soluções: triângulo ABC e A'BC.

5 São dados um ponto P, uma reta **s** e uma distância **r**. Construa uma circunferência que passa por P, tem raio **r** e cujo centro pertence a **s**. Quantas soluções admite o problema?

Observação:
Insista com o aluno que, se numa circunferência o raio é conhecido, então o problema se resume em achar o centro.

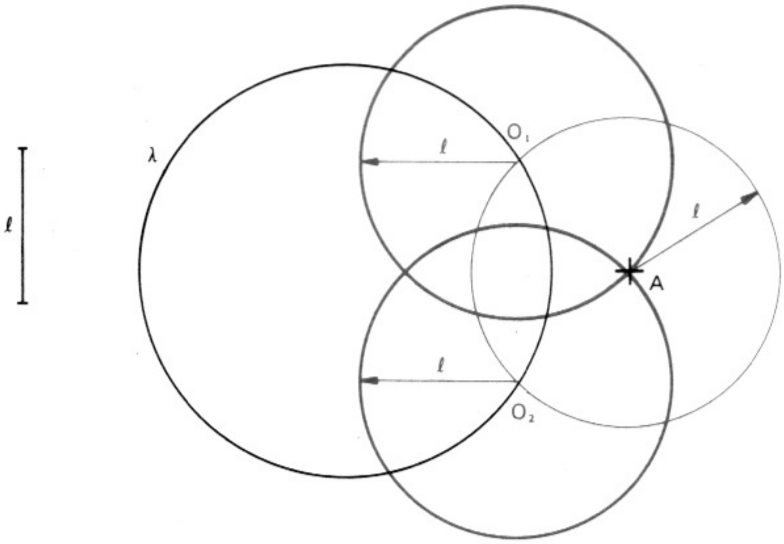
Sugestão:
Pergunte ao aluno o que deve ocorrer com P para que o problema admita solução única.



Soluções: circunferências de centro O_1 e O_2.

6 São dados um ponto A, uma circunferência λ e uma distância ℓ. Construa uma circunferência que passa por A, tem raio ℓ e cujo centro pertence à circunferência λ. Quantas soluções admite o problema?

Sugestão:
Pergunte ao aluno o que deveria ocorrer com O_1 e O_2 para que as soluções resultassem circunferências tangentes.



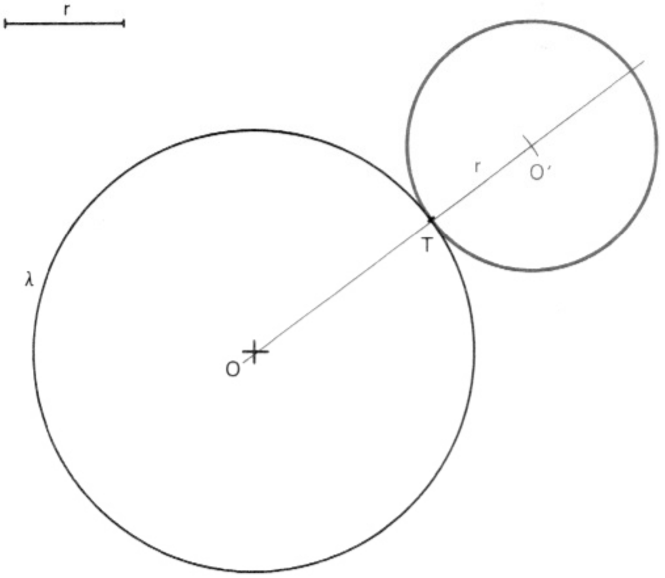
Soluções: circunferências de centros O_1 e O_2.

Figura auxiliar e anotações

7 São dados uma circunferência λ, um ponto T sobre λ e uma distância **r**. Construa uma circunferência de raio **r** que seja tangente externa a λ no ponto T.

Sugestão: Os centros das circunferências e o ponto de tangência estão alinhados.

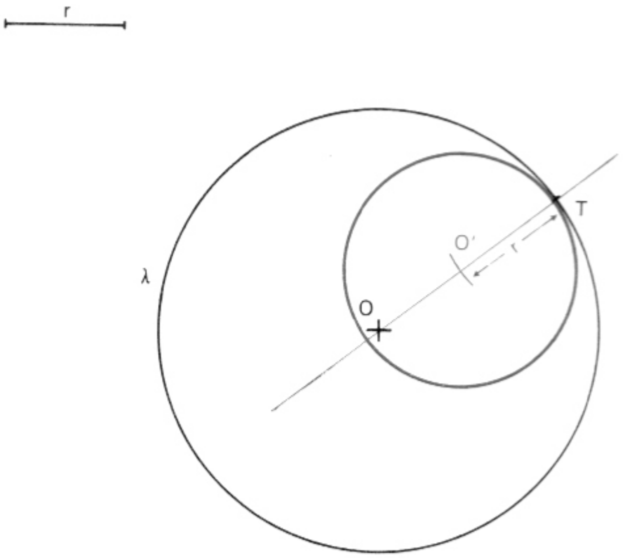
Sugestão:
Pergunte qual é a distância entre os centros, tanto no exercício 7 como no 8.



8 Com os dados do problema anterior, construa uma circunferência com tangência interna no ponto T.

Nota: Se nos exercícios 7 e 8 não fossem especificadas as tangências (externa e interna), teríamos que desenhar as duas.

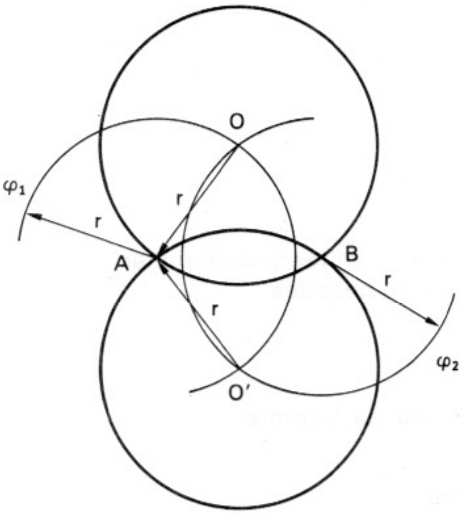
Observação:
Verifique se o aluno compreendeu a nota que acompanha esse exercício.



Resolução: Já que conhecemos o raio da circunferência procurada, para construí-la é necessário apenas determinar o seu centro, O. Mas, para o centro, conhecemos duas propriedades:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: O dista } \mathbf{r} \text{ de A (LG 1)} \\ \varphi_2\text{: O dista } \mathbf{r} \text{ de B (LG 1)} \end{cases}$$

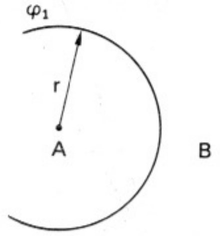
Então, O está na intersecção das circunferências de centro A e raio **r**, e de centro B e raio **r**.



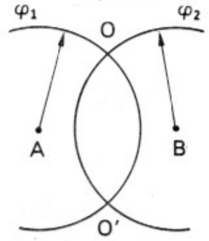
Observação: Com os dados do problema, obtivemos duas soluções, O e O'.

Evolução do traçado

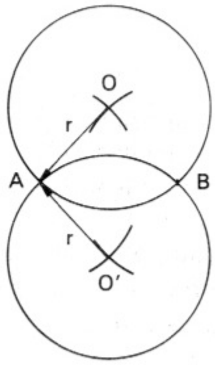
1.º passo



2.º passo



3.º passo

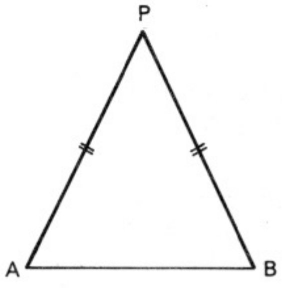


Mediatriz: LG 2

Resolva os exercícios de 1 a 8 do caderno de atividades.

Dado um segmento AB, você é capaz de imaginar um ponto P cuja distância até A seja igual à distância até B, isto é, PA = PB?

É claro que sim! Basta pensar num triângulo isósceles PAB, onde $\overline{AB}$ é a base.

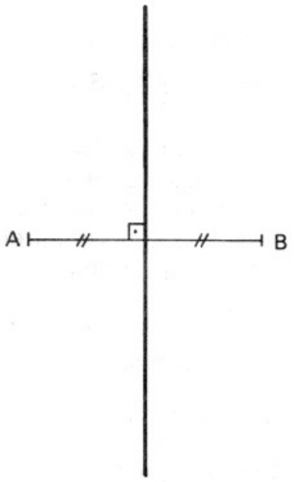


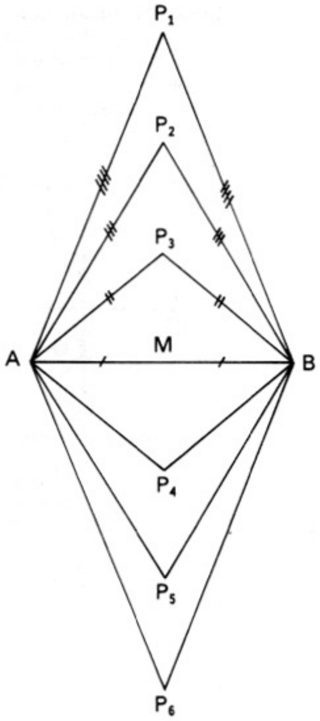
Quando um ponto P está a **igual distância** de dois pontos A e B, dizemos que P é **eqüidistante** de A e B.

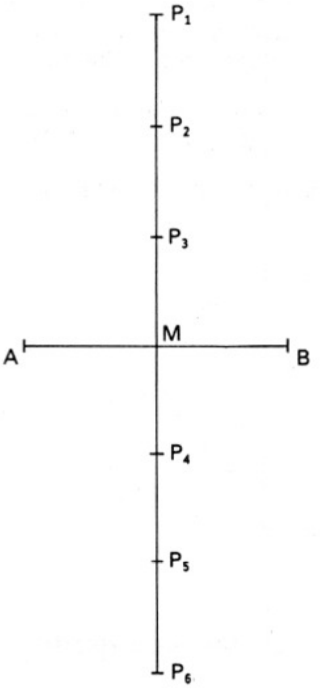
Dados dois pontos A e B, quantos pontos eqüidistantes de A e B você é capaz de imaginar? Muitos?

Sim, são muitos. Na realidade, são **infinitos** os pontos que eqüidistam de A e B. Basta imaginar uma infinidade de triângulos isósceles construídos sobre a base $\overline{AB}$. Todo vértice P, de um desses triângulos PAB, é um ponto eqüidistante de A e B:

Não esqueça que a mediatriz de $\overline{AB}$ é a reta perpendicular a $\overline{AB}$ que passa pelo ponto médio do segmento.







A importante propriedade de todos os infinitos pontos eqüidistantes de A e B é que a reunião deles resulta numa reta notável: **a mediatriz de $\overline{AB}$**.

Essa propriedade dos pontos da mediatriz de um segmento AB a eleva à categoria de **lugar geométrico**, pelo seguinte:

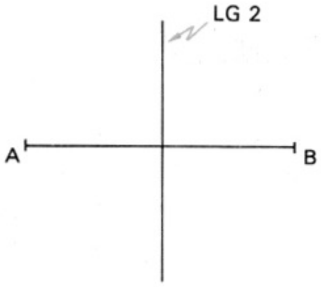
- todo ponto da mediatriz de $\overline{AB}$ eqüidista de A e B;
- somente os pontos da mediatriz de AB eqüidistam de A e B.

Com isso, podemos fazer o seguinte enunciado:

LG 2

O lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de dois pontos A e B dados é a **mediatriz** do segmento AB.

Sempre que um ponto procurado for eqüidistante de dois pontos A e B dados, esse ponto pertencerá à mediatriz de AB.



A mediatriz é o LG 2.

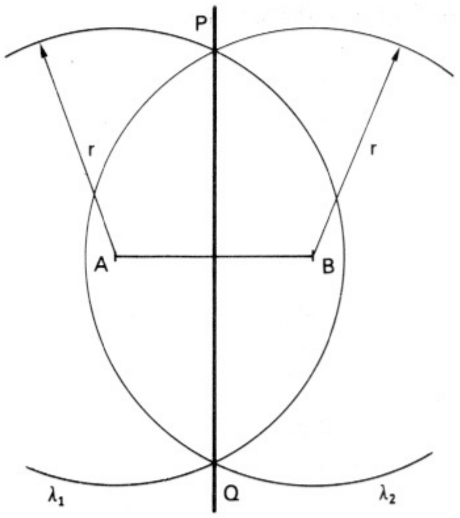
Construção da mediatriz

Sabemos que dois pontos distintos determinam uma reta. Portanto, para podermos traçar a mediatriz de um segmento AB, só precisamos conhecer dois pontos da mesma. Como todo ponto eqüidistante de A e B pertence a essa mediatriz, vamos obter dois pontos distintos, P e Q, que sejam eqüidistantes de A e B. Veja como:

1.º) Com centro em A e raio **r** qualquer, convenientemente grande, traçamos uma circunferência λ_1.

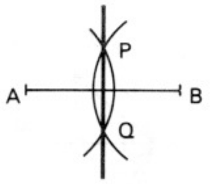
2.º) Com centro em B e o mesmo raio **r**, traçamos a circunferência λ_2.

3.º) Os pontos P e Q de intersecção dessas circunferências são eqüidistantes de A e B. A mediatriz é, então, a reta conduzida por P e Q.

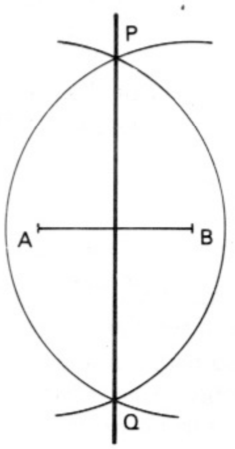


Quando pretendemos traçar uma reta por dois pontos, quanto mais afastados estes estiverem, melhor será a determinação gráfica da reta.

Mediatriz mal construída:



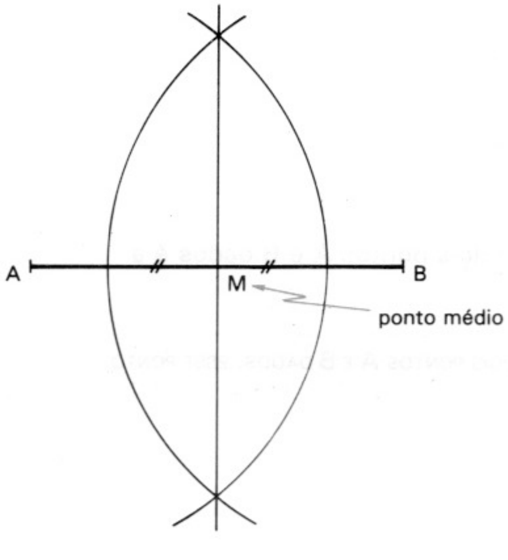
Mediatriz bem construída:



Por essa razão é que no traçado da mediatriz o raio **r** deve ser convenientemente grande, para deixar os pontos P e Q suficientemente afastados.

Determinação do ponto médio de um segmento

O ponto médio de um segmento AB é um ponto eqüidistante de A e B. Essa é a razão pela qual esse ponto pertence à mediatriz de $\overline{AB}$. Assim, para determinar o ponto médio de um segmento de reta, basta traçar a mediatriz desse segmento. O ponto de intersecção é o ponto médio.



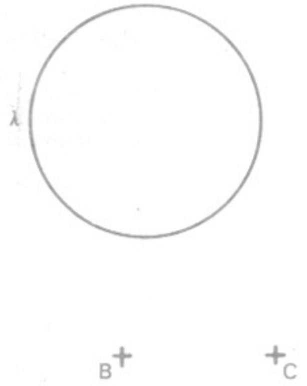
Exercícios

E8. **9** Desenhe um segmento de reta de 8 cm. Construa a mediatriz desse segmento.

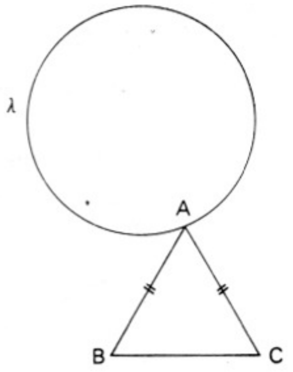
E8. **10** Desenhe um segmento de reta de 10 cm. Obtenha o ponto médio desse segmento. Em seguida, verifique a precisão do seu desenho medindo para ver se o ponto é médio mesmo. Se não for, faça tudo de novo, caprichando mais nos traçados.

Por falar em capricho, verifique se a grafite do seu compasso está bem apontada.

E8.11 São dados dois pontos B e C e uma circunferência λ. Construa um triângulo ABC isósceles, de base $\overline{BC}$, sabendo que o vértice A pertence a λ.



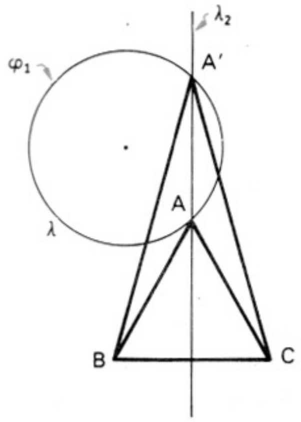
Suposto resolvido



Resolução: Só precisamos determinar o vértice A para construir o triângulo. Mas, desse ponto, conhecemos duas propriedades:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: A pertence à circunferência } \lambda. \\ \varphi_2\text{: A é eqüidistante de B e C. (LG 2)} \end{cases}$$

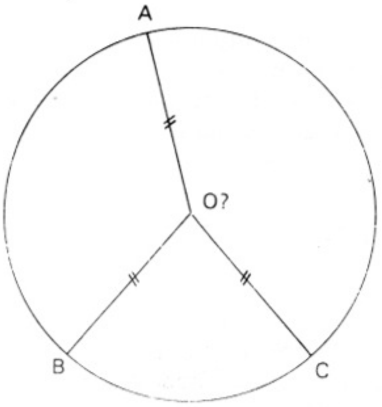
Então, determinamos A na intersecção da circunferência λ com a mediatriz de $\overline{BC}$.



Observação: Com os dados, obtivemos duas soluções: triângulo ABC e triângulo A'BC.

E8.12 Dados três pontos A, B e C, não-alinhados, construa a circunferência que passa por esses pontos. ◁ IMPORTANTE

Suposto resolvido



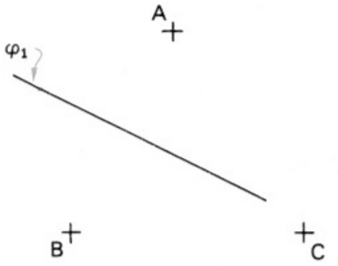
Resolução: O problema se resolve com a determinação do centro O da circunferência, pois tendo o centro, basta abrir o compasso com raio $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ou $\overline{OC}$ e desenhá-la. Mas temos duas propriedades suficientes para determinar o ponto O:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: O é eqüidistante de A e B, pois } OA = OB \text{ (LG 2)} \\ \varphi_2\text{: O é eqüidistante de B e C, pois } OB = OC \text{ (LG 2)} \end{cases}$$

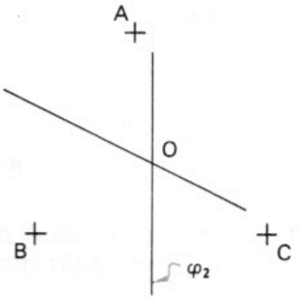
Embora O seja também eqüidistante de A e C, não precisamos usar essa propriedade, pois bastam apenas duas propriedades para determinar um ponto.

Então, o centro O encontra-se na intersecção das mediatrizes de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

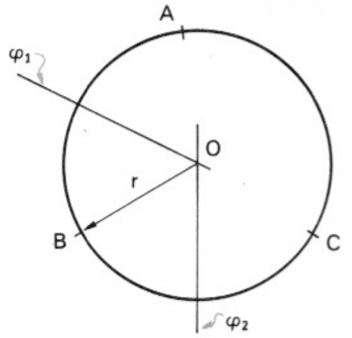
1.º passo: mediatriz de $\overline{AB}$



2.º passo: mediatriz de $\overline{BC}$



3.º passo: traçado da circunferência

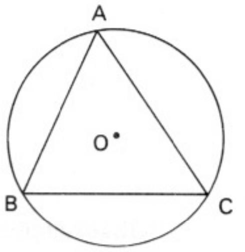


Observações:

- O problema **admite sempre uma única solução**, isto é, por três pontos não-alinhados sempre passa uma única circunferência.
- O problema seria idêntico se fosse enunciado assim: ''construa a circunferência circunscrita a um triângulo ABC dado''.

  Para os exercícios 13 e 15 você deve fazer as figuras com a máxima precisão.

Circunferência circunscrita a um triângulo é aquela que passa pelos três vértices:

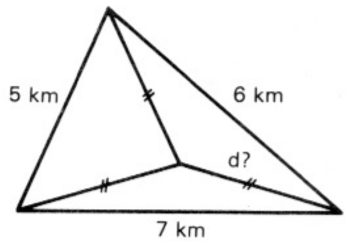


O centro da circunferência circunscrita é denominado **circuncentro**.

E8.**13** Quanto mede, aproximadamente, o raio da circunferência circunscrita a um triângulo eqüilátero de lado $\ell = 6$ cm?

E8.**14** O que é circuncentro de um triângulo?

E8.**15** Numa certa fazenda, a área destinada ao pasto do gado tem forma triangular, de lados iguais a 5 km, 6 km e 7 km. O proprietário pretende construir um curral num ponto eqüidistante dos vértices desse pasto. A que distância aproximadamente de cada vértice ficará o curral?

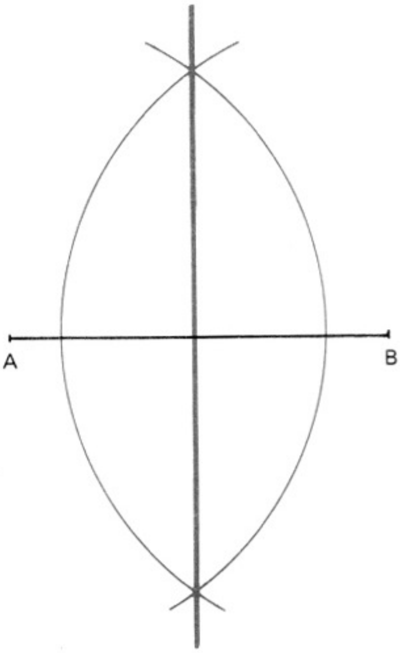


Sugestão: Construa um triângulo de lados 5 cm, 6 cm e 7 cm. Assim, no papel, 1 cm equivale a 1 km.
Não se esqueça de dar a resposta em quilômetros.

Resolva os exercícios de 9 a 16 do caderno de atividades.

Mediatriz: LG 2

9 Construa a mediatriz do segmento AB.



10 Através do traçado de mediatrizes, divida o segmento PQ em quatro partes iguais.

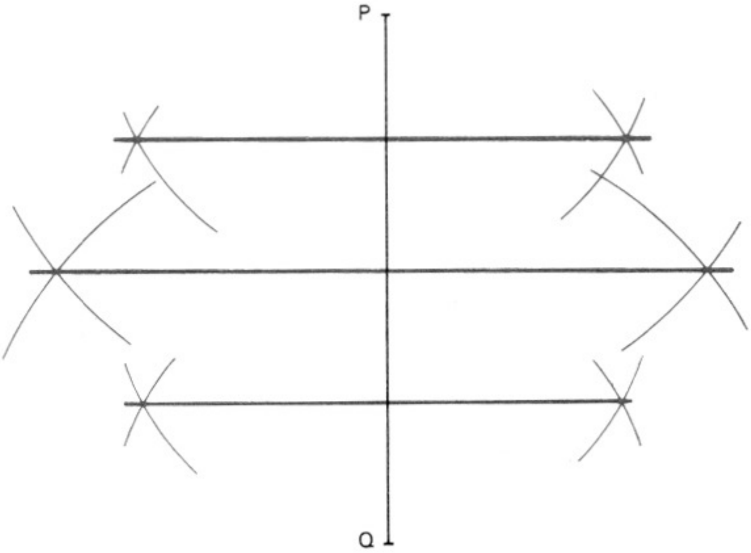


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Insista com o aluno que os raios dos arcos devem ser convenientemente grandes para obter pontos da mediatriz afastados o suficiente para que a reta fique bem determinada.

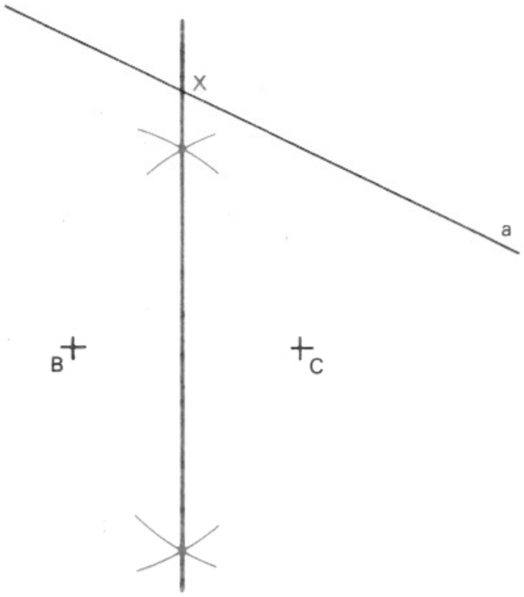
Observação:
Comente com o aluno que esse método não é muito adequado para a divisão de segmentos (por exemplo, ele não serve para dividir um segmento em número ímpar de partes iguais), e que futuramente ele aprenderá métodos bem melhores.

Mediatriz: LG 2

Figura auxiliar e anotações

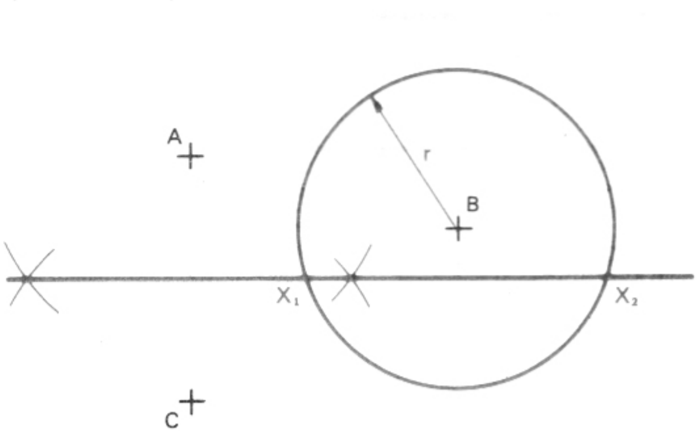
11 São dados os pontos B e C e a reta **a**. Determine um ponto de **a** que seja eqüidistante de B e C.

Sugestão:
Pergunte o que aconteceria se a reta BC e a reta **a** fossem perpendiculares.



12 São dados os pontos A, B e C, e uma distância **r**. Determine um ponto X, tal que a distância de X a B seja igual a **r** e X seja eqüidistante de A e C.
Sugestão: LG 1 e LG 2.

Sugestão:
Pergunte o que deve ocorrer com o ponto B para que o problema tenha **uma** ou **nenhuma** solução.

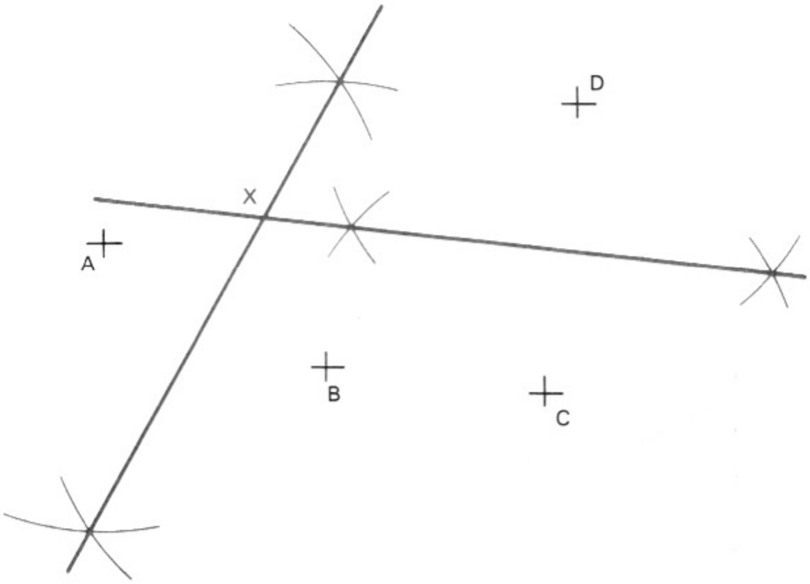


Mediatriz: LG 2

Figura auxiliar e anotações

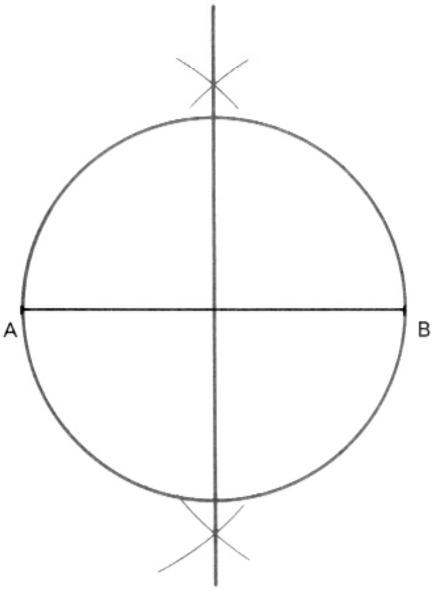
13 São dados quatro pontos A, B, C e D. Determine um ponto X que seja eqüidistante de A e B, e que seja também eqüidistante de C e D.

Sugestão:
Pergunte se o ponto X obtido é eqüidistante dos quatro pontos. Em seguida, pergunte se é sempre possível conduzir uma circunferência por quatro pontos dados. Faça-o compreender que para isso acontecer os quatro pontos têm que ser bem especiais.



14 Construa uma circunferência da qual é dado um diâmetro $\overline{AB}$.

Observação:
Essa construção, embora simples, já permite verificar a precisão dos traçados do aluno.

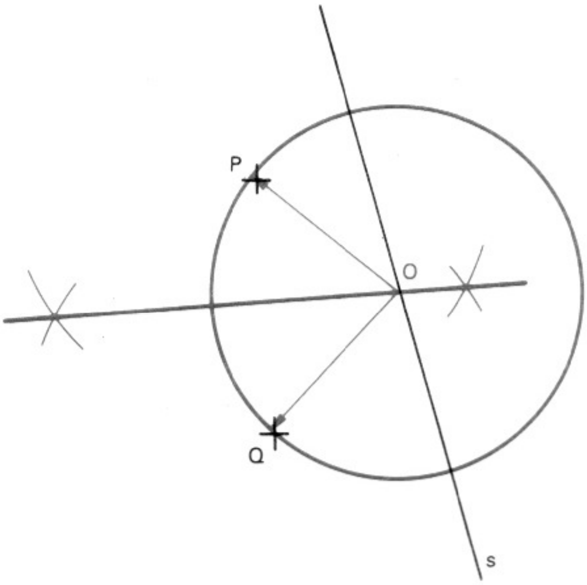


Mediatriz: LG 2

Figura auxiliar e anotações

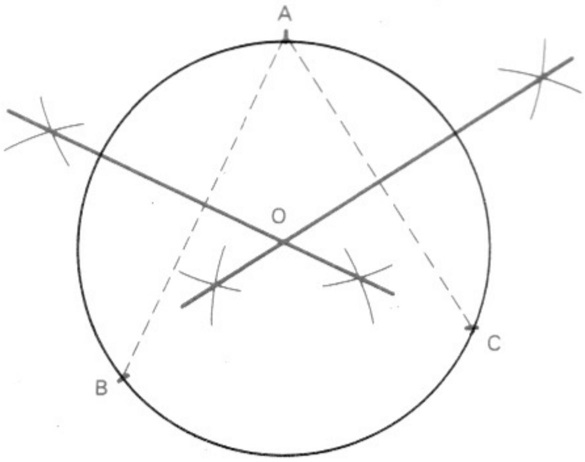
15 São dados os pontos P e Q e uma reta **s**. Construa uma circunferência que passa por P e Q, sabendo que o seu centro pertence à reta **s**.

Sugestão:
Peça ao aluno que analise o problema:
"Construa uma circunferência que passa por dois pontos dados."
Verifique se ele percebe que tal problema admite infinitas soluções.



16 Dada uma circunferência de centro desconhecido, obtenha o seu centro.
Sugestão: Marque três pontos quaisquer da circunferência. O centro é eqüidistante dos pontos que você marcou.

Observação:
Outra ótima oportunidade para avaliar a precisão dos traçados do aluno. Peça-lhe que utilize o centro obtido e trace uma circunferência, verificando se a circunferência que traçou coincide com a que foi dada. Aproveite para incentivá-lo a caprichar nos traçados.



Traçado de retas perpendiculares

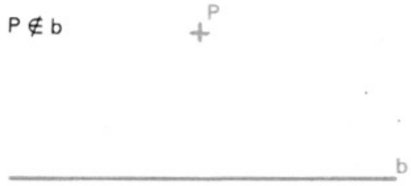
Como já vimos anteriormente, é bastante simples traçar retas perpendiculares a uma reta dada utilizando esquadro. Porém, o uso desse instrumento é, por enquanto, "proibido" nessas construções. Vamos traçar perpendiculares **utilizando apenas régua e compasso**.

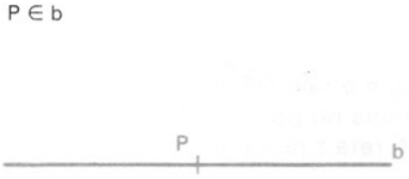
O problema que será resolvido a seguir é de aplicação muito freqüente nas construções geométricas. É muito importante que você o aprenda bem.

Uma construção fundamental

Problema

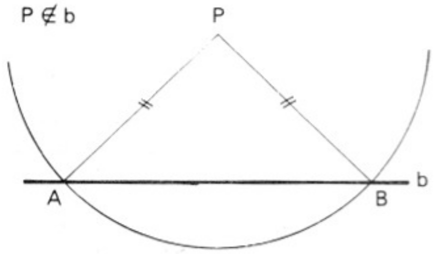
Dados um ponto P e uma reta **b**, traçar, por P, uma reta **a** perpendicular a **b**.

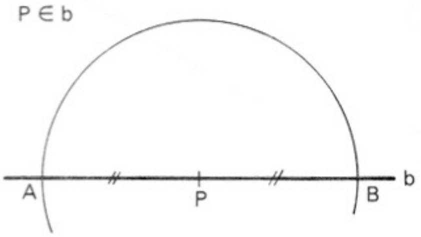




Resolução: Não importa se o ponto P pertence ou não à reta **b**. Construímos a perpendicular da seguinte forma:

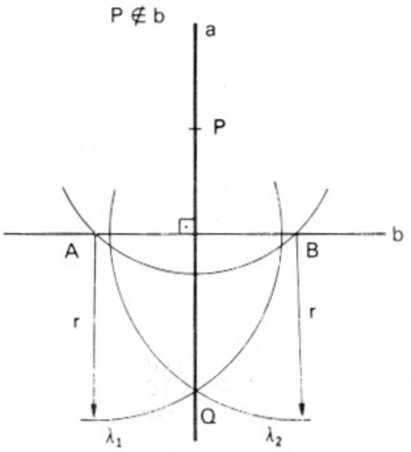
1.º) Com centro em P descrevemos um arco de circunferência (de raio convenientemente grande) que intercepta a reta **b** nos pontos A e B.

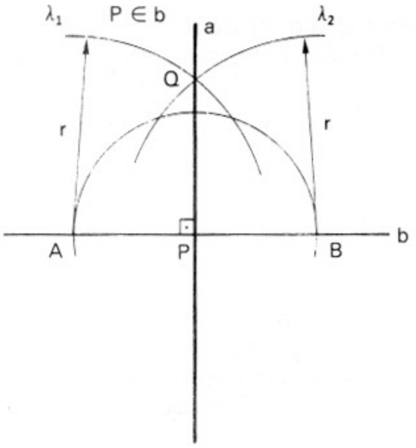




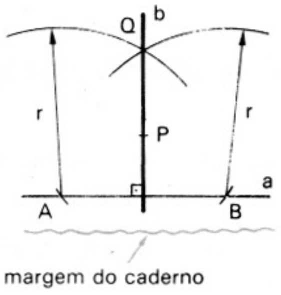
Nos dois casos, observe que P é eqüidistante de A e B, isto é, P pertence à mediatriz de $\overline{AB}$. Mas a mediatriz de $\overline{AB}$ é perpendicular a esse segmento. Logo, ela é perpendicular à reta **b**. Só resta, então, determinar um segundo ponto Q dessa mediatriz e conduzir a reta procurada por P e Q.

2.º) Com centro em A e depois em B, traçam-se os arcos de circunferência de raio **r** (convenientemente grande) os quais interceptam-se no ponto Q. (Exatamente como se constrói a mediatriz de $\overline{AB}$. Afinal é isso que estamos fazendo.)





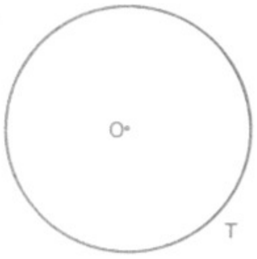
No caso do ponto P fora da reta **b**, convém obter o ponto Q do outro lado de P em relação à reta. Porém, se a reta **b** estiver muito próxima da margem do caderno, pode-se tomar Q do mesmo lado de P, contanto que esses pontos estejam suficientemente afastados.



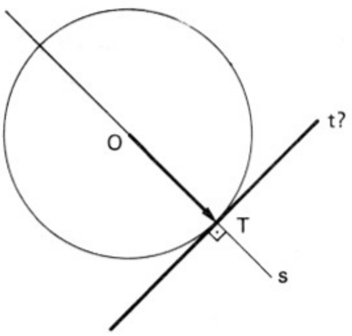
Exercícios

E8.16 Dada uma circunferência de centro O e um ponto T a ela pertencente, trace a reta **t** tangente à circunferência no ponto T.

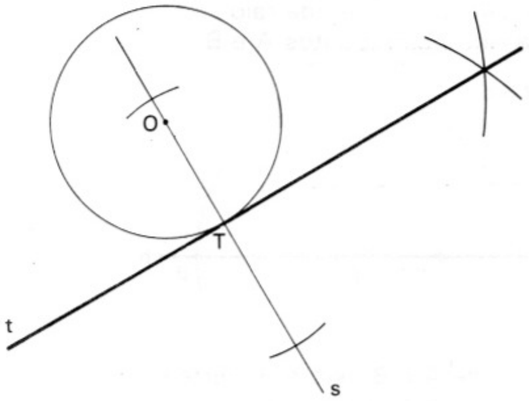
◁ IMPORTANTE



Suposto resolvido



Resolução: Sabemos que o raio $\overline{OT}$ é perpendicular à reta que tangencia a circunferência no ponto T. Traçamos, então, a reta **s** que passa por O e por T. A reta **t** procurada é perpendicular a **s**, passando por T.



E8.17 Trace uma reta **t** qualquer no papel e sobre ela marque um ponto T. Construa uma circunferência de raio igual a 20 mm que seja tangente à reta **t** no ponto T. Quantas soluções tem o problema?

Resolva os exercícios de 17 a 22 do caderno de atividades.

E8.18 Construa um triângulo ABC, dados $\hat{A} = 90°$, $b = 12$ cm e $c = 5$ cm. Quanto mede o terceiro lado (hipotenusa)?

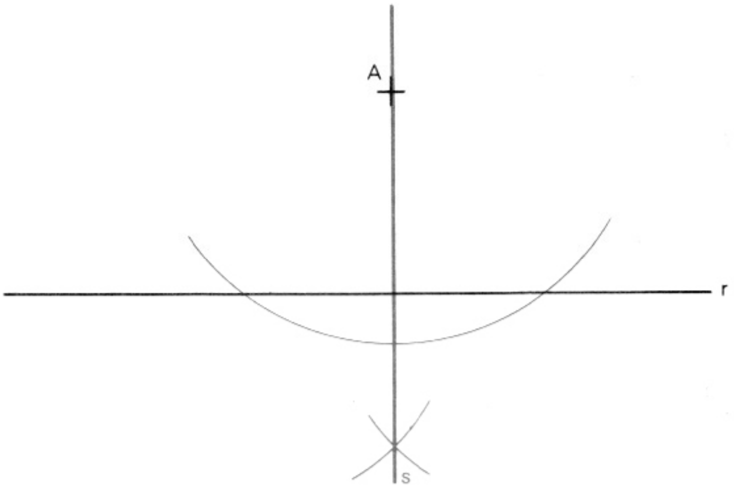
Sugestão: Sobre uma reta **r** qualquer pode-se, por exemplo, colocar o lado $\overline{AC}$. Então, o vértice B estará sobre a reta **s**, perpendicular a **r** conduzida por A.

Traçado de retas paralelas

Passaremos a estudar processos gráficos que utilizam apenas régua e compasso para o traçado de paralelas. (Não esqueça que o uso do esquadro está "proibido" por enquanto.) Porém, antes de aprendermos as construções, convém examinar duas propriedades geométricas que nos serão muito úteis nesses traçados.

Traçado de retas perpendiculares

17 São dados um ponto A e uma reta **r**. Trace por A a reta **s** perpendicular a **r**.



18 São dados uma reta **r** e um ponto A pertencente a **r**. Trace por A a reta **s** perpendicular a **r**.

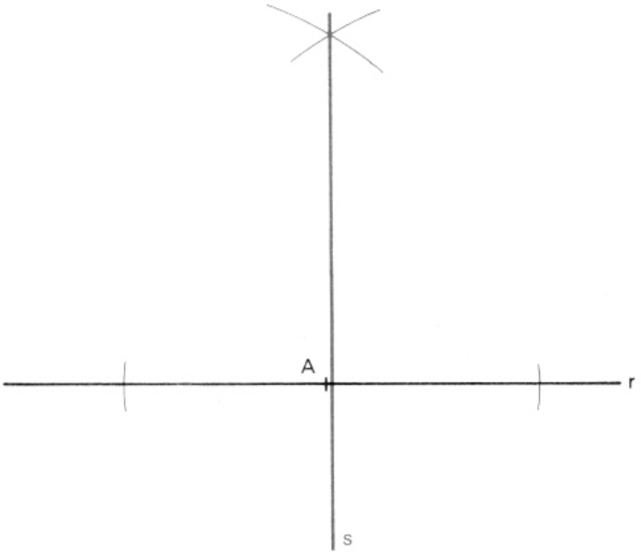


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Insista muito com o aluno que os traçados de perpendiculares propostos nos exercícios 17 e 18 serão usados com muita freqüência. Ele não deve ter qualquer dúvida sobre essa construção.

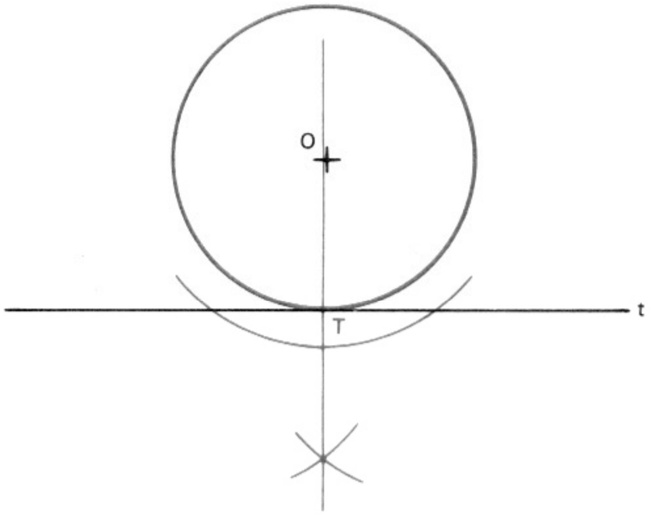
Sugestão:
Destaque que nos dois casos (A ∈ **r** e A ∉ **r**) o processo do traçado da perpendicular é o mesmo.

Traçado de retas perpendiculares

Figura auxiliar e anotações

19 São dados um ponto O e uma reta **t**. Construa uma circunferência que tenha centro O e seja tangente à reta **t**.

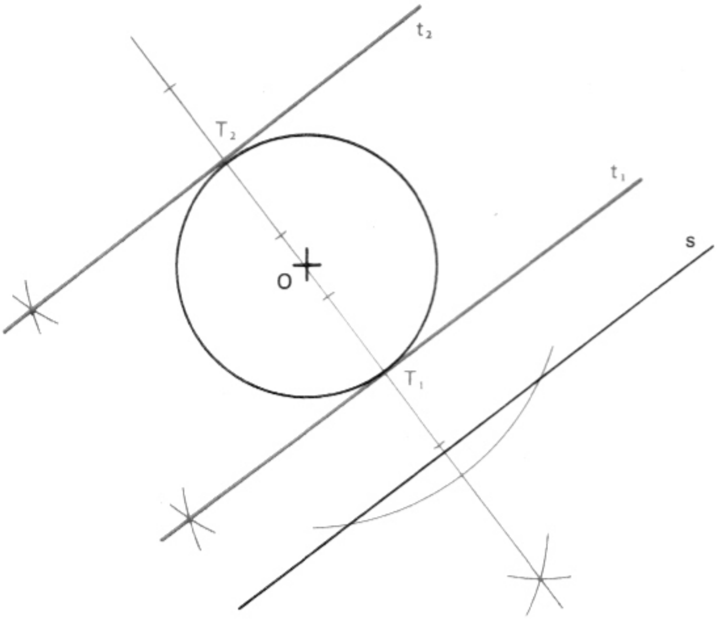
Observação:
Insista que, quando o centro de uma circunferência é conhecido, para traçá-la é necessário conhecer um de seus pontos ou o raio, não sendo válido neste caso o método de obtenção do raio por tentativas.



20 São dadas uma circunferência de centro O e uma reta **s**. Trace uma reta **t** tangente à circunferência e paralela à reta **s**. (Note que o problema admite duas soluções.)

Sugestão: Quando você traçar a figura auxiliar, observe que a reta que passa por O e é perpendicular a **s** passa pelo ponto de tangência.

Sugestão:
Proponha o mesmo problema pedindo que a reta **t** seja perpendicular a **s**.



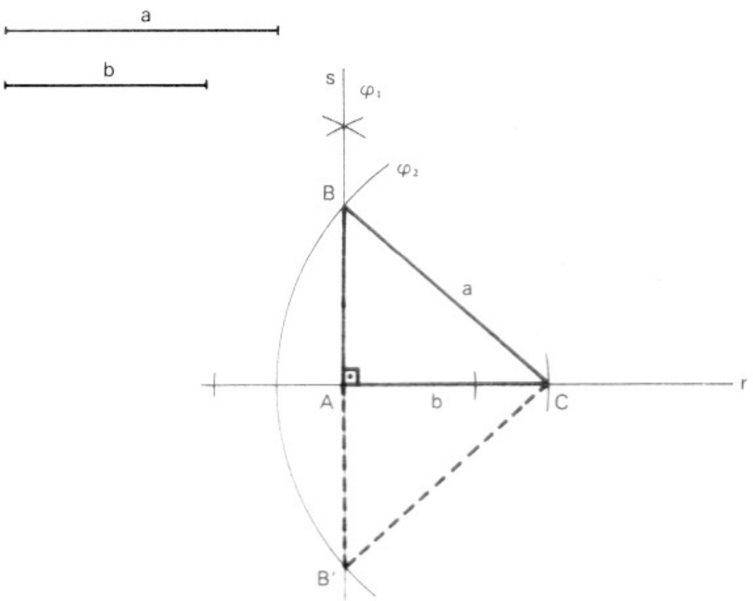
Traçado de retas perpendiculares

21 Construa um triângulo ABC, dados **a**, **b** e Â = 90°.

Sugestão: Sobre uma reta **r** qualquer, coloque o lado $\overline{AC}$. Para o vértice B você tem então duas propriedades:

φ_1: B pertence à reta **s**, que é perpendicular a **r** e é conduzida por A.

φ_2: B dista **a** de C (LG 1).



22 São dados um ponto A, uma reta **t** e um ponto T sobre a reta **t**. Construa uma circunferência que passa por A e tangencia a reta **t** no ponto T.

Sugestão: φ_1: O pertence à reta **s**, que é perpendicular a **t** e é conduzida por T.

φ_2: O eqüidista de A e T (LG 2).

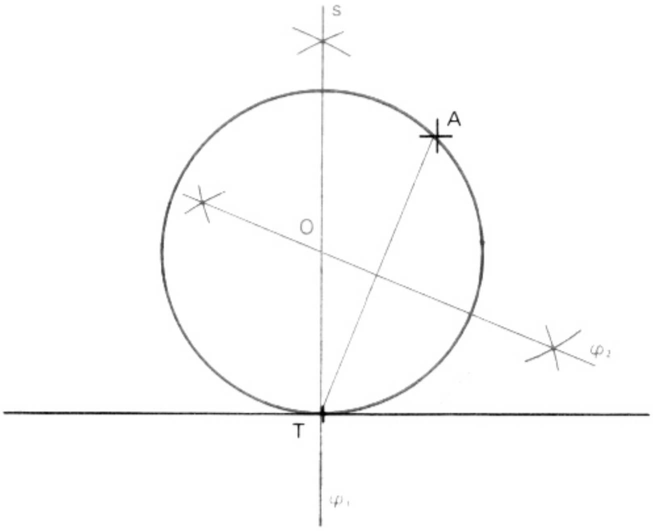


Figura auxiliar e anotações

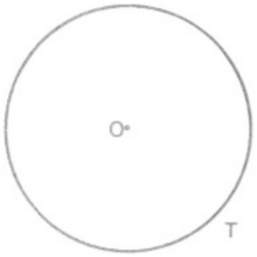
Observação:
Insista que o problema tem uma só solução, embora as construções nos levem a duas soluções simétricas. Mostre-lhe que no problema não se está levando em conta a posição para se iniciar a construção, já que é uma posição arbitrária.

Sugestão:
Pergunte ao aluno se ele percebe que, o ângulo Â não sendo reto, o problema pode admitir duas soluções.

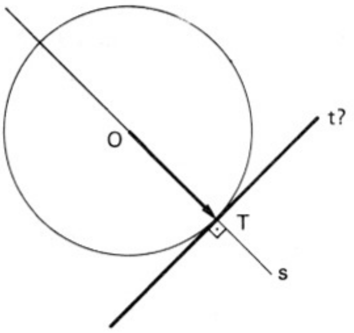
Exercícios

E8.**16** Dada uma circunferência de centro O e um ponto T a ela pertencente, trace a reta **t** tangente à circunferência no ponto T.

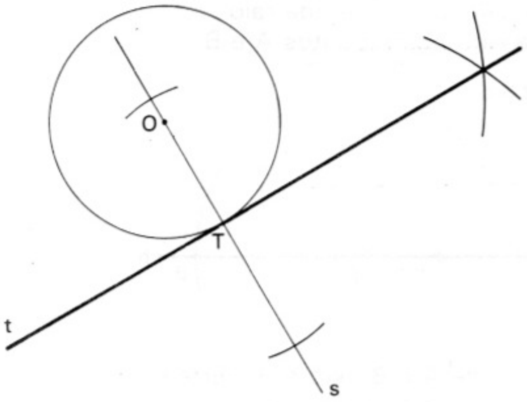
◁ IMPORTANTE



Suposto resolvido



Resolução: Sabemos que o raio $\overline{OT}$ é perpendicular à reta que tangencia a circunferência no ponto T. Traçamos, então, a reta **s** que passa por O e por T. A reta **t** procurada é perpendicular a **s**, passando por T.



E8.**17** Trace uma reta **t** qualquer no papel e sobre ela marque um ponto T. Construa uma circunferência de raio igual a 20 mm que seja tangente à reta **t** no ponto T. Quantas soluções tem o problema?

Resolva os exercícios de 17 a 22 do caderno de atividades.

E8.**18** Construa um triângulo ABC, dados $\hat{A} = 90°$, b = 12 cm e c = 5 cm. Quanto mede o terceiro lado (hipotenusa)?

Sugestão: Sobre uma reta **r** qualquer pode-se, por exemplo, colocar o lado $\overline{AC}$. Então, o vértice B estará sobre a reta **s**, perpendicular a **r** conduzida por A.

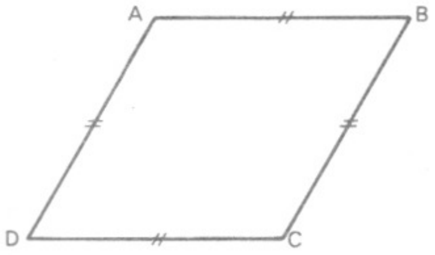
Traçado de retas paralelas

Passaremos a estudar processos gráficos que utilizam apenas régua e compasso para o traçado de paralelas. (Não esqueça que o uso do esquadro está "proibido" por enquanto.) Porém, antes de aprendermos as construções, convém examinar duas propriedades geométricas que nos serão muito úteis nesses traçados.

Propriedade

Todo quadrilátero que tem quatro lados congruentes é um **paralelogramo**, isto é, possui os lados opostos paralelos.

Oportunamente faremos um estudo detalhado dos **paralelogramos**.
Em particular, o quadrilátero que possui quatro lados congruentes é denominado **losango**.



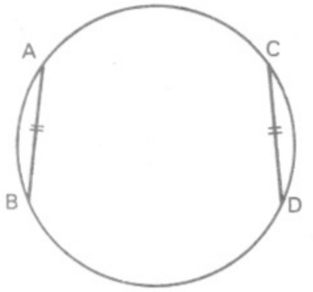
Se ABCD é um losango,
então $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

Propriedade

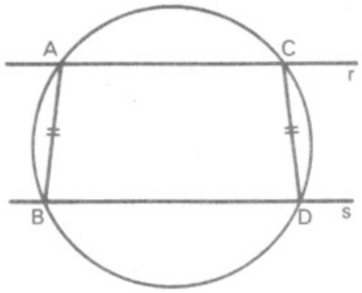
As extremidades de duas cordas congruentes quaisquer, de uma mesma circunferência, são pontos pelos quais passam duas retas paralelas.

As duas propriedades aqui apresentadas são demonstradas no apêndice ao final do livro.

Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$



então r // s

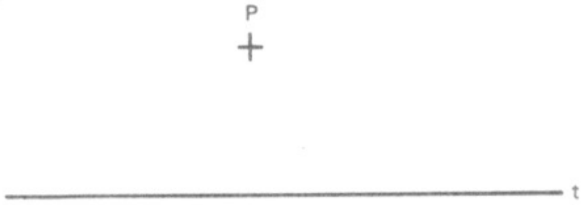


Tendo conhecimento dessas propriedades, podemos resolver um problema muito importante.

Uma construção fundamental

Problema

Dados uma reta **t** e um ponto P, fora de **t**, conduzir por P a reta **s** paralela a **t**.

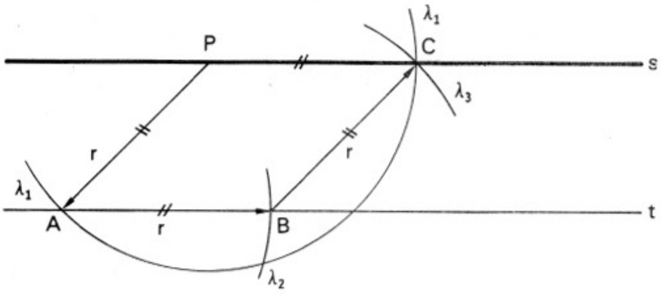


Primeiro processo

Vamos construir um losango que tem um vértice em P e um lado contido na reta **t**. Vejamos como.

Sempre com o mesmo raio r arbitrário, e convenientemente grande, traçam-se os seguintes arcos de circunferências:

1.º) λ_1, com centro em P, determinando o ponto A em t;
2.º) λ_2, com centro em A, determinando o ponto B em t;
3.º) λ_3, com centro em B, determinando o ponto C em λ_1.

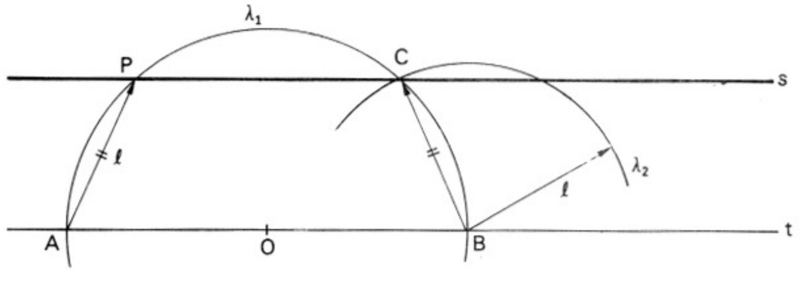

λ_1
P
C
s
λ_3
r
r
λ_1
A
r
B
t
λ_2

A reta conduzida por P e C é a reta **s** procurada.

Como o quadrilátero PABC tem os quatro lados de comprimentos iguais a **r**, ele é um losango. Logo, os lados opostos $\overline{PC}$ e $\overline{AB}$ são paralelos, isto é, a reta **s** é paralela a **t** e passa por P.

Segundo processo

1.º) Com centro em um ponto O arbitrário da reta **t** e de modo que $\overline{OP}$ não seja perpendicular a **t**, traça-se a circunferência λ_1, que passa por P e determina os pontos A e B em **t**.
2.º) Seja $AP = \ell$. Com centro em B e raio ℓ, descreve-se o arco de circunferência λ_2, o qual intercepta λ_1 no ponto C.

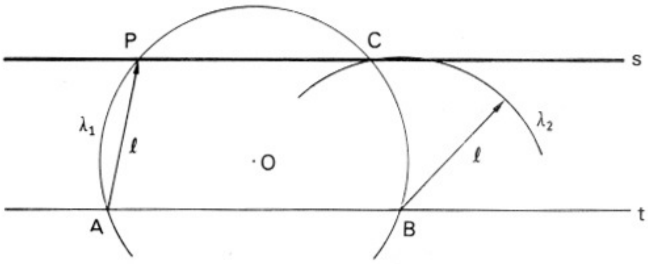

λ_1
P
C
s
ℓ
λ_2
ℓ
A
O
B
t

A reta conduzida por P e C é a reta **s** procurada.

A justificativa dessa construção é imediata, pois as cordas $\overline{AP}$ e $\overline{BC}$ da circunferência λ_1 são congruentes. Logo, a reta **s** é paralela a **t** e passa pelo ponto P.

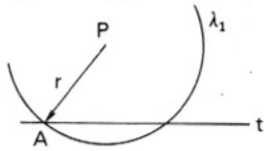
Observações:

- A rigor, o centro O da circunferência não tem que estar sobre a reta **t**, mas convém que esteja, para facilitar a construção do próximo lugar geométrico que vamos estudar.

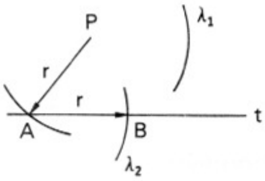

P
C
s
λ_1
ℓ
O
λ_2
ℓ
A
B
t

Evolução do traçado
(primeiro processo)

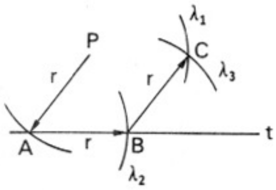
1.º passo


P
λ_1
r
A
t

2.º passo

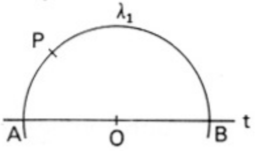

P
λ_1
r
r
A
B
t
λ_2

3.º passo


λ_1
P
C
r
r
λ_3
A
r
B
t
λ_2

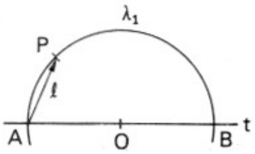
Evolução do traçado
(segundo processo)

1.º passo

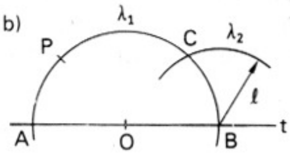

λ_1
P
A
O
B
t

2.º passo

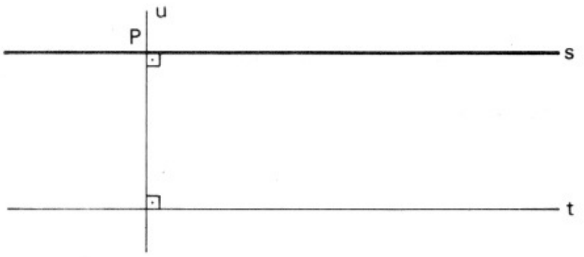
a)


λ_1
P
ℓ
A
O
B
t

b)


λ_1
P
C
λ_2
ℓ
A
O
B
t

- Um processo bastante intuitivo para o traçado de paralelas é o que utiliza perpendiculares: por P traça-se **u** perpendicular a **t** e por P traça-se **s** perpendicular a **u**. Porém, esse processo deve ser evitado, pois exige maior número de operações.



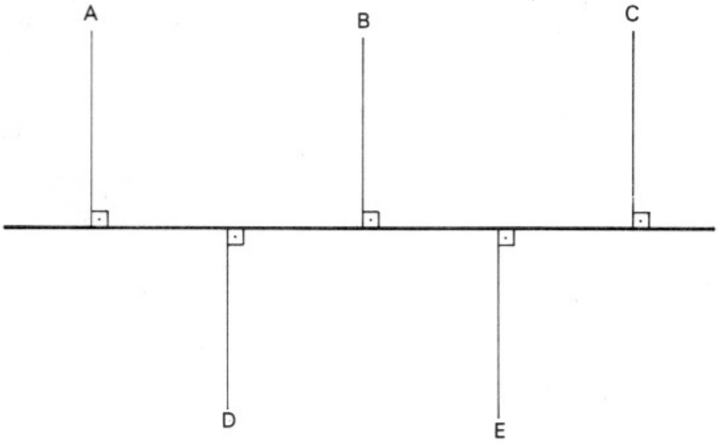
Os processos de construções que estudamos, e outros que ainda vamos estudar, não devem ser decorados, mas sim entendidos.
Assim, nos traçados de paralelas, é muito importante que você saiba, claramente, quais são as metas: no primeiro, construir um losango; no segundo, construir cordas congruentes numa circunferência.

Resolva os exercícios de 23 a 26 do caderno de atividades.

Retas paralelas: LG 3

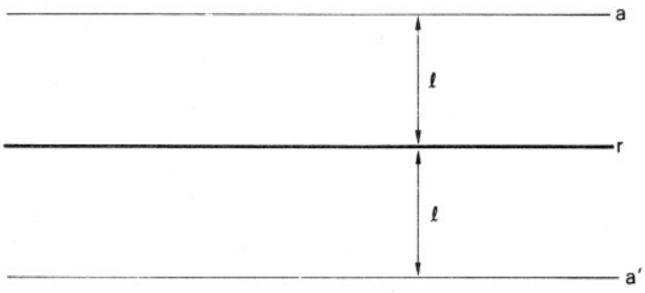
Na introdução dada ao conceito de lugar geométrico, você foi convidado a pensar em pontos que eqüidistavam de uma reta. Convém, agora, reforçar aquilo que já foi dito sobre o assunto.

Em primeiro lugar, é muito importante que você tenha sempre em mente o que é distância de um ponto a uma reta: **é a medida do segmento traçado do ponto até a reta, perpendicularmente à mesma**.



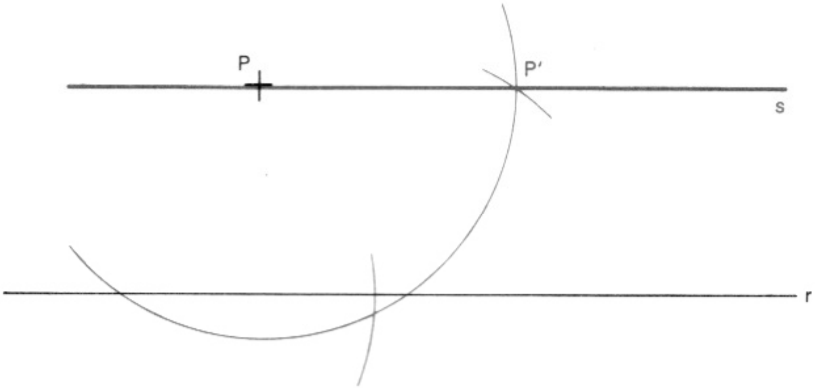
Imagine uma reta **r** e um ponto cuja distância a **r** é igual a ℓ. Você consegue imaginar outros pontos cujas distâncias a **r** sejam iguais a ℓ? Reunindo todos os pontos cujas distâncias a **r** são iguais a ℓ, que figura se forma?

Se você respondeu ''uma reta paralela a **r**'', sua resposta está incompleta. Na realidade há duas retas, **a** e **a'**, paralelas a **r**.



Traçado de retas paralelas

23 São dados um ponto P e uma reta **r**. Trace uma reta **s** paralela à reta **r**, usando o primeiro processo.



24 São dados um ponto P e uma reta **r**. Trace uma reta **s** paralela à reta **r**, usando o segundo processo.

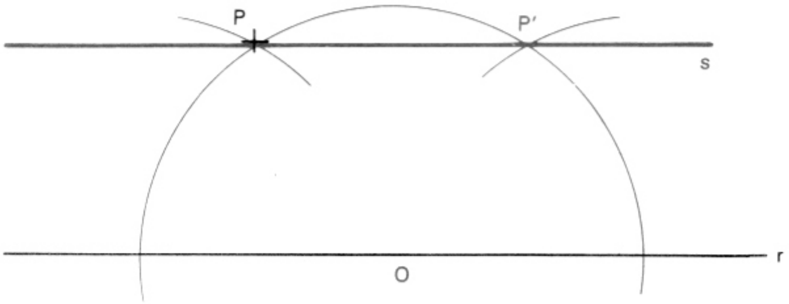


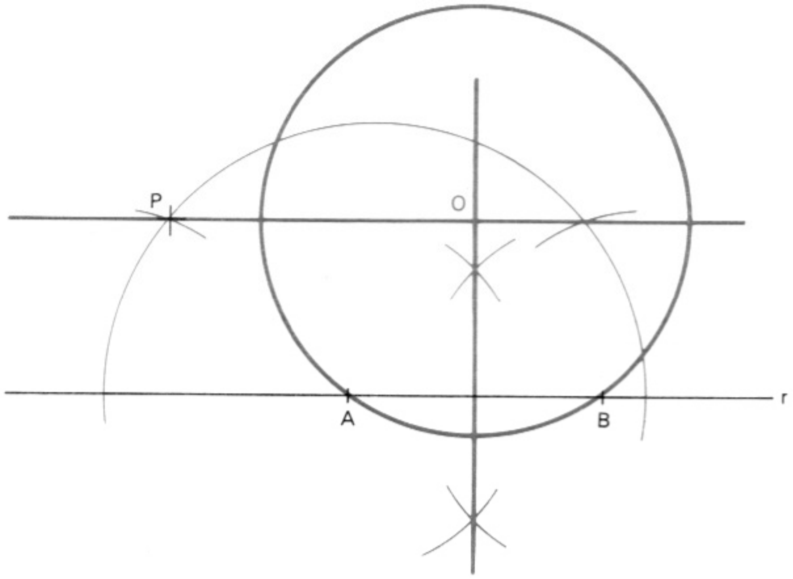
Figura auxiliar e anotações

Observação:
Convém conscientizar o aluno da importância dos exercícios 23 e 24, dizendo-lhe que, a exemplo do traçado de perpendiculares, o traçado de paralelas é uma construção muito solicitada.

Traçado de retas paralelas

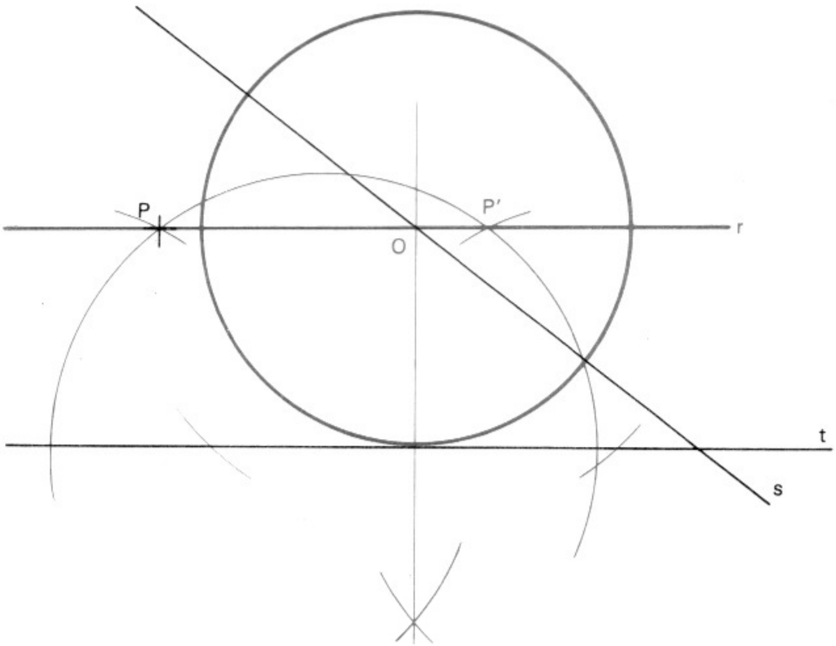
Figura auxiliar e anotações

25 São dados uma reta **r**, os pontos A e B sobre **r** e um ponto P fora de **r**. Construa uma circunferência que passa por A e B, sabendo que o seu centro pertence à reta paralela a **r** conduzida por P.



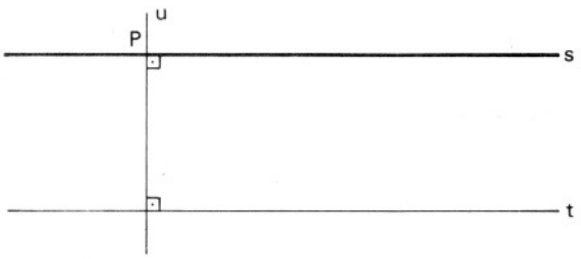
26 São dadas duas retas concorrentes **s** e **t** e um ponto P fora delas. Seja **r** a reta (desconhecida) que passa por P e é paralela a **t**. Construa uma circunferência tangente à reta **t**, sabendo que o seu centro é o ponto de intersecção das retas **r** e **s**.

Sugestão: Obtendo o centro, você recai no exercício 19.



- Um processo bastante intuitivo para o traçado de paralelas é o que utiliza perpendiculares: por P traça-se **u** perpendicular a **t** e por P traça-se **s** perpendicular a **u**. Porém, esse processo deve ser evitado, pois exige maior número de operações.

Os processos de construções que estudamos, e outros que ainda vamos estudar, não devem ser decorados, mas sim entendidos.
Assim, nos traçados de paralelas, é muito importante que você saiba, claramente, quais são as metas: no primeiro, construir um losango; no segundo, construir cordas congruentes numa circunferência.

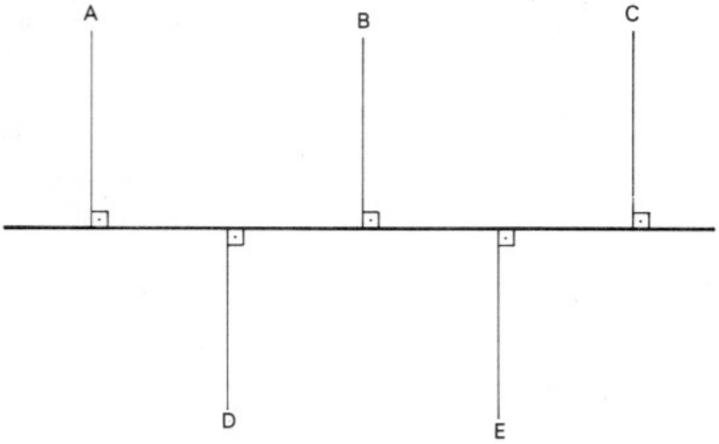


Resolva os exercícios de 23 a 26 do caderno de atividades.

Retas paralelas: LG 3

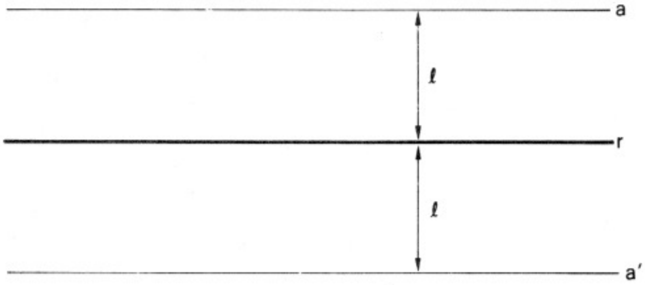
Na introdução dada ao conceito de lugar geométrico, você foi convidado a pensar em pontos que eqüidistavam de uma reta. Convém, agora, reforçar aquilo que já foi dito sobre o assunto.

Em primeiro lugar, é muito importante que você tenha sempre em mente o que é distância de um ponto a uma reta: **é a medida do segmento traçado do ponto até a reta, perpendicularmente à mesma**.



Imagine uma reta **r** e um ponto cuja distância a **r** é igual a ℓ. Você consegue imaginar outros pontos cujas distâncias a **r** sejam iguais a ℓ? Reunindo todos os pontos cujas distâncias a **r** são iguais a ℓ, que figura se forma?

Se você respondeu ''uma reta paralela a **r**'', sua resposta está incompleta. Na realidade há duas retas, **a** e **a'**, paralelas a **r**.



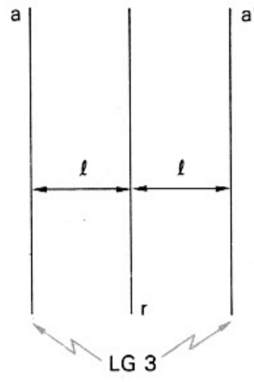
A figura constituída pelas **duas retas, a** e **a'**, como já vimos, é um lugar geométrico, pois:

- todo ponto de **a** ou **a'** dista ℓ de **r**;
- somente os pontos de **a** e **a'** distam ℓ de **r**.

A partir disso, podemos enunciar o nosso terceiro lugar geométrico.

LG 3

O lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a uma reta **r** dada são iguais a ℓ constitui um par de retas paralelas a **r**.



SEMPRE QUE UM PONTO PROCURADO ESTIVER A UMA DISTÂNCIA ℓ DE UMA RETA DADA, ESSE PONTO PERTENCERÁ A UMA DAS PARALELAS DISTANTES ℓ DESSA RETA.

Construção do LG 3

Sejam dadas uma reta **r** e uma distância ℓ. Queremos construir as retas **a** e **a'** paralelas a **r** e distantes ℓ da mesma.

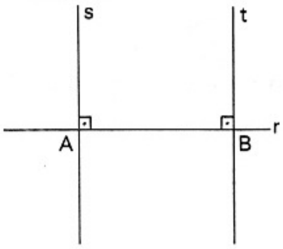
Primeiro processo

1.º) Tomam-se dois pontos A e B sobre a reta **r**, convenientemente afastados, e traçam-se por eles as retas **s** e **t** perpendiculares a **r**.

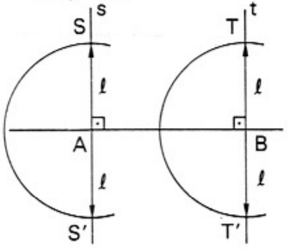
2.º) Com centro em A e depois em B, traçam-se arcos de circunferência de raios iguais a ℓ, determinando os pontos S e S' sobre **s**, e T e T' sobre **t**.

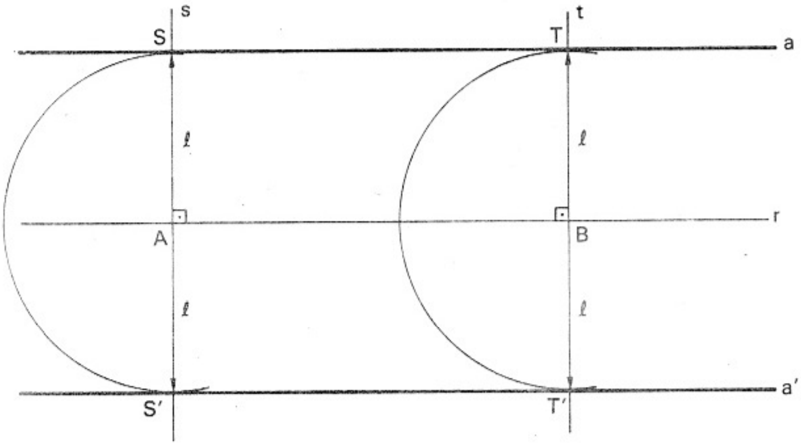
Evolução do traçado

1.º passo



2.º passo





A reta **a**, conduzida por S e T, e a reta **a'**, conduzida por S' e T', constituem o lugar geométrico procurado.

Segundo processo

O processo que passaremos a estudar é mais conveniente, por exigir um menor número de operações. Ele consiste em determinar um ponto de cada reta procurada e em seguida traçar por esses pontos as retas paralelas à reta dada.

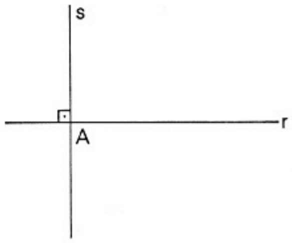
1.º) Por um ponto A qualquer da reta **r** traça-se a perpendicular **s** à mesma.

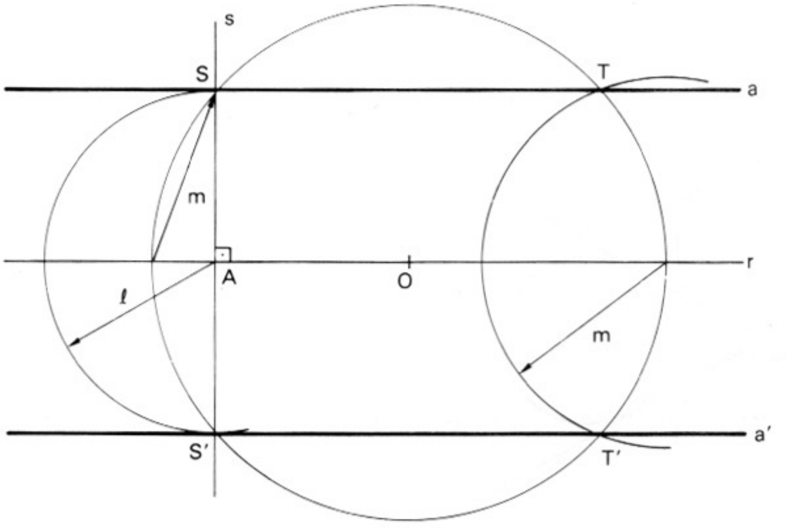
2.º) Com centro em A e raio ℓ descreve-se o arco de circunferência que intercepta **s** nos pontos S e S'.

3.º) Utilizando o segundo processo que estudamos para o traçado de paralelas, traçam-se as retas **a** e **a'** por S e S', respectivamente.

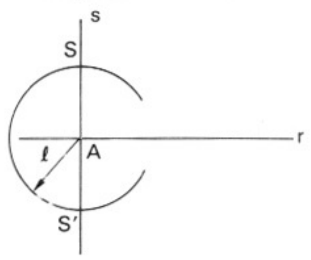
Evolução do traçado

1.º passo



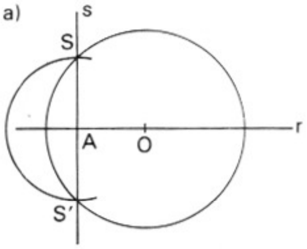


2.º passo

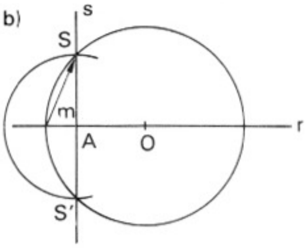


3.º passo

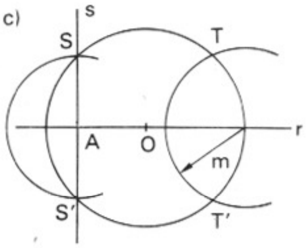
a)



b)



c)



Observação: O ponto S' nem precisa ser determinado no segundo passo, pois a circunferência que passa por S e tem centro num ponto O de **r** passa também por S'. Em todo caso, como não é nenhum trabalho a mais determinar S' antes, convém fazê-lo, para certificar-se da precisão que se está obtendo na construção.

Uma advertência importante

NOS PROBLEMAS, O LG 3 DEVE SER TOTALMENTE CONSTRUÍDO, ISTO É, DEVEM SER CONSTRUÍDAS AS **DUAS RETAS**, SOB PENA DE SE PERDEREM SOLUÇÕES, CASO ISSO NÃO SEJA FEITO.

Em algumas situações particulares é possível desrespeitar essa advertência. Mas, de um modo geral, não é conveniente fazê-lo, pois, muitas vezes, o problema admite soluções que não enxergamos, as quais aparecem inesperadamente, quando a advertência é seguida.

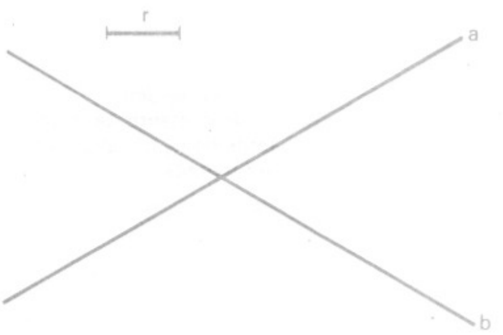
Exercícios

E8.**19** Desenhe uma reta **r** qualquer e construa o lugar geométrico dos pontos que distam 2 cm de **r**, utilizando:

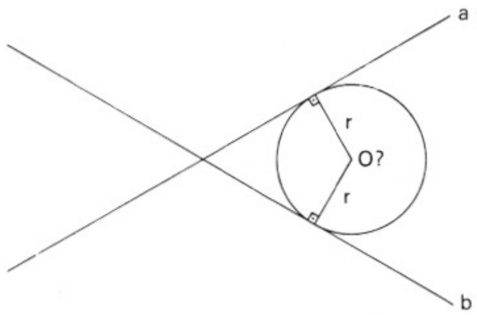
a) o primeiro processo;

b) o segundo processo.

E8.**20** Dadas duas retas **a** e **b** concorrentes, construa uma circunferência de raio **r** dado que seja tangente a ambas as retas.



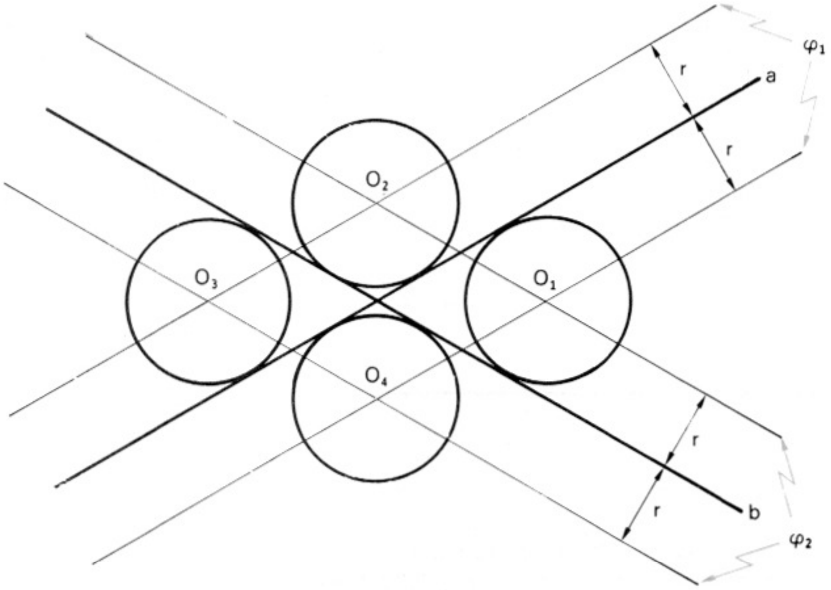
Suposto resolvido



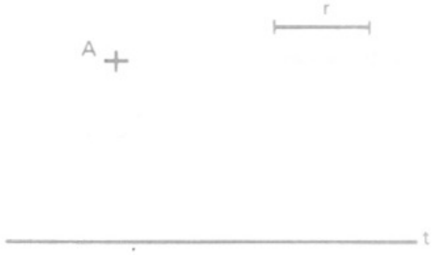
Resolução: Como foi dado o raio da circunferência, o problema se resolve com a determinação do centro O. Mas, desse ponto, conhecemos duas propriedades:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: O dista } \mathbf{r} \text{ de } \mathbf{a} \text{ (LG 3)} \\ \varphi_2\text{: O dista } \mathbf{r} \text{ de } \mathbf{b} \text{ (LG 3)} \end{cases}$$

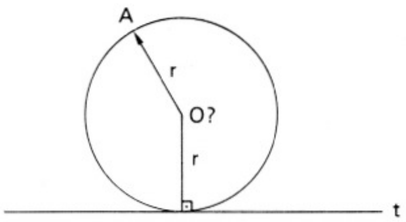
Então, o centro O encontra-se na intersecção das retas de φ_1 e φ_2.



E8.**21** São dados um ponto A, uma reta **t** e uma distância **r**. Construa uma circunferência de raio **r**, que passe pelo ponto A e seja tangente à reta **t**.



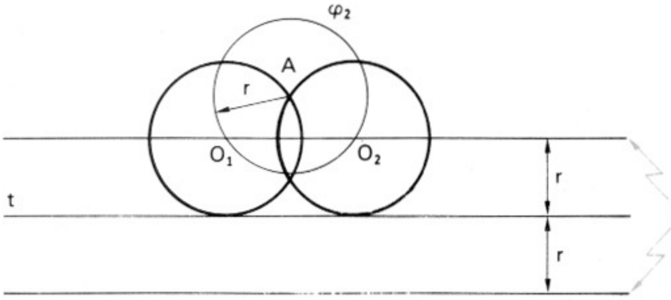
Suposto resolvido



Resolução: Novamente só precisamos determinar o centro O, pois o raio foi dado. Ocorre que do centro temos duas propriedades:

φ_1: O dista **r** de **t** (LG 3)
φ_2: O dista **r** de A (LG 3)

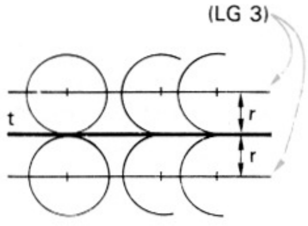
Como sempre, O está na intersecção de φ_1 e φ_2.



Nessa resolução, evidentemente, uma das retas de φ_1 não precisaria ser traçada.

Uma observação importante

Nos dois problemas anteriores, propunha-se construir circunferências de raios dados tangentes a retas dadas. Pois bem, essa é uma situação em que o LG 3 deve sempre ser aplicado. Isto é, se você tem uma reta **t** e pretende construir uma circunferência de **raio dado** tangente à reta **t**, um lugar geométrico do centro é o LG 3.

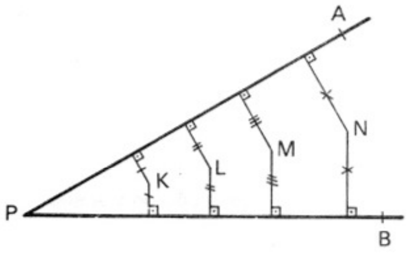


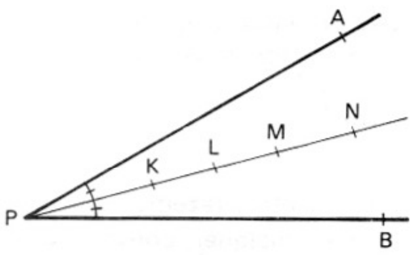
E8.22 Uma circunferência de raio igual a 30 mm é tangente aos lados de um ângulo reto. Determine, graficamente, a distância do centro da circunferência ao vértice do ângulo. (Só régua e compasso!)

Resolva os exercícios de 27 a 33 do caderno de atividades.

Bissetriz: LG 4

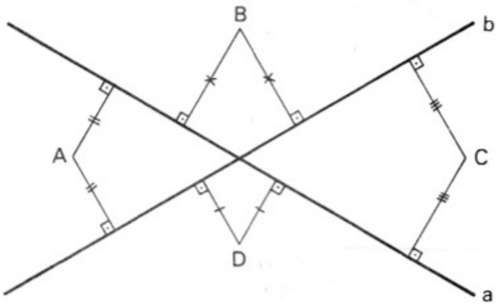
Você será convidado novamente a imaginar. Suponha que seja dado um ângulo $A\hat{P}B$; imagine um ponto que seja eqüidistante dos lados desse ângulo. Imaginou? Agora imagine outro, e outro, e mais outro, muitos outros pontos, sendo cada um deles eqüidistante dos lados do ângulo.





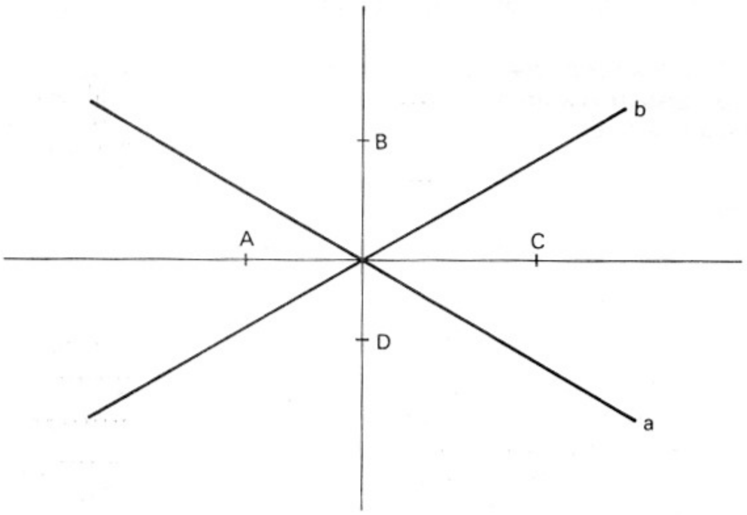
Reunindo todos os infinitos pontos, sendo que **cada um** eqüidista dos lados de um ângulo, obtém-se uma semi-reta notável. É a bissetriz do ângulo.

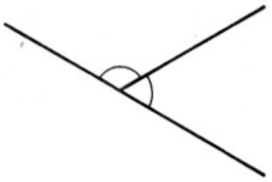
Agora você pode ampliar essa idéia. Em vez de um ângulo, considere duas retas concorrentes, **a** e **b**. Imagine pontos eqüidistantes de **a** e **b** ''espalhados'' por todos os lados.

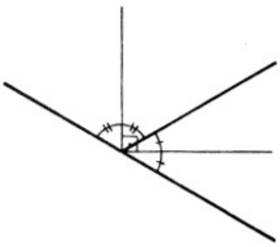


A reunião de todos os pontos, sendo **cada um** eqüidistante das retas concorrentes **a** e **b**, constitui as bissetrizes dos quatro ângulos formados por essas retas. Porém, observe com atenção: essas bissetrizes formam duas novas retas, as quais são perpendiculares entre si.

No exercício resolvido E2.18 está demonstrado que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares são perpendiculares.

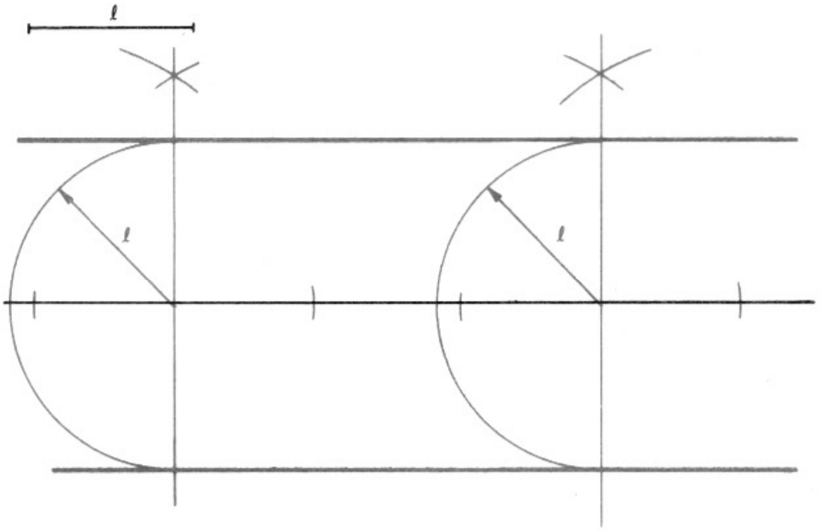






Retas paralelas: LG 3

27 São dadas uma reta **r** e uma distância ℓ. Construa o lugar geométrico dos pontos que distam ℓ de **r**, usando o primeiro processo.



28 Resolva agora o mesmo problema proposto acima, mas usando o segundo processo.

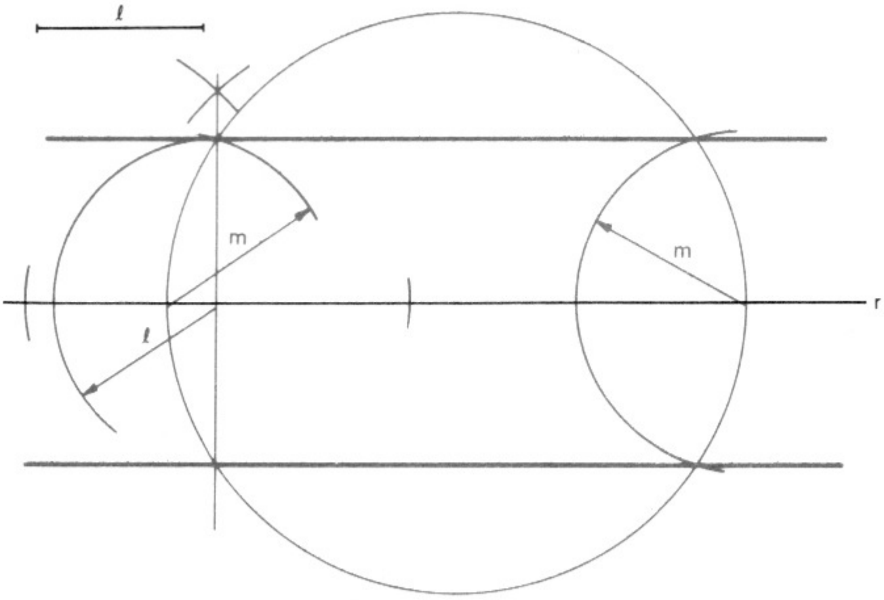


Figura auxiliar e anotações

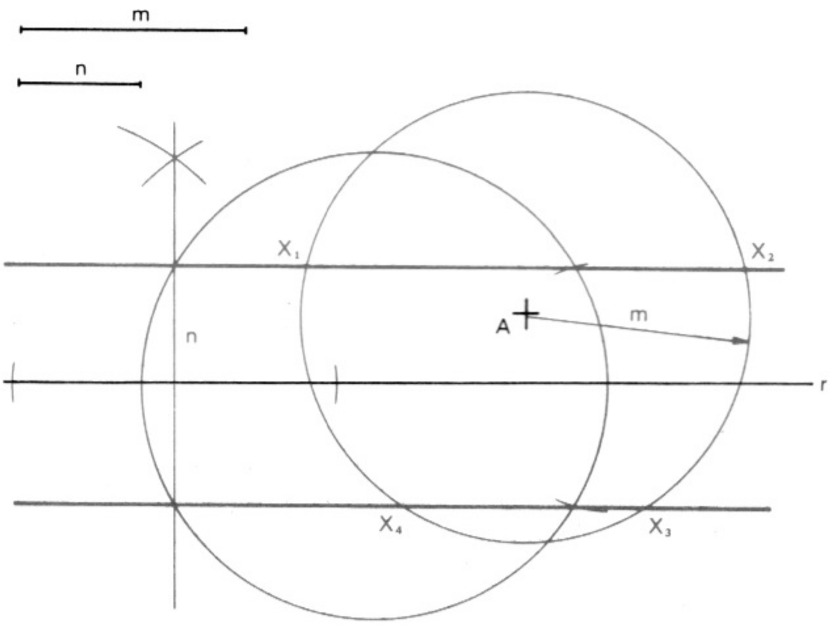
Observação:
Peça ao aluno que conte quantas operações ele utiliza para a construção do LG 3 em cada um dos processos. Em seguida, lembre-lhe que, dentre dois processos para uma determinada construção, é melhor aquele que exige o menor número de operações.

Retas paralelas: LG 3

29 São dados um ponto A, uma reta **r** e duas distâncias **m** e **n**. Determine um ponto X cuja distância ao ponto A é igual a **m** e cuja distância à reta **r** é igual a **n**. Quantas soluções admite o problema?

Figura auxiliar e anotações

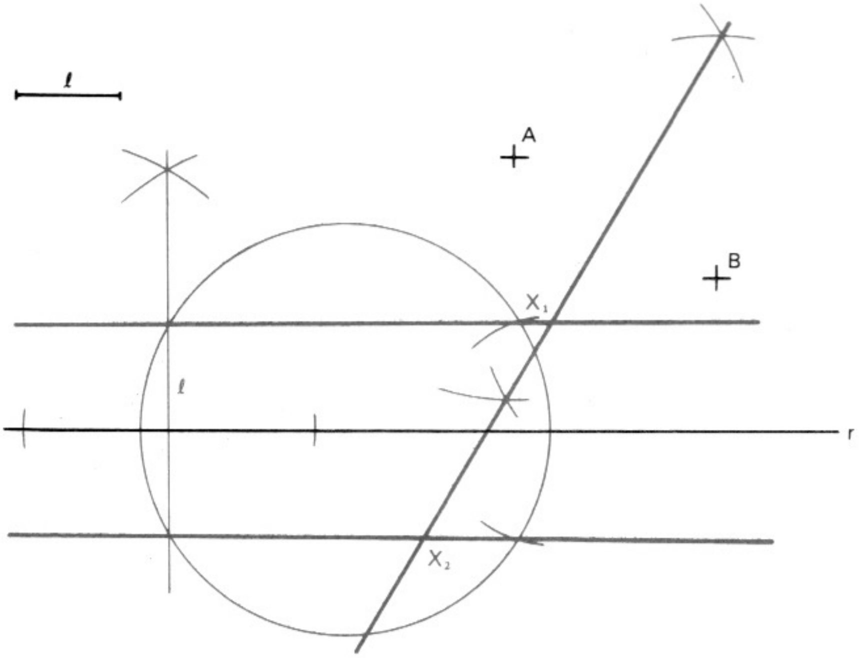
Observação:
Lembre sempre ao aluno que o LG 3 deve ser construído completamente, ou, no mínimo, deve-se fazer uma "construção" mental para tentar visualizar possíveis soluções que não se esteja percebendo.



Soluções: X_1, X_2, X_3 e X_4.

30 São dados dois pontos A e B, uma reta **r** e uma distância **ℓ**. Obtenha um ponto X que diste **ℓ** de **r** e seja eqüidistante de A e B. Quantas soluções admite o problema?

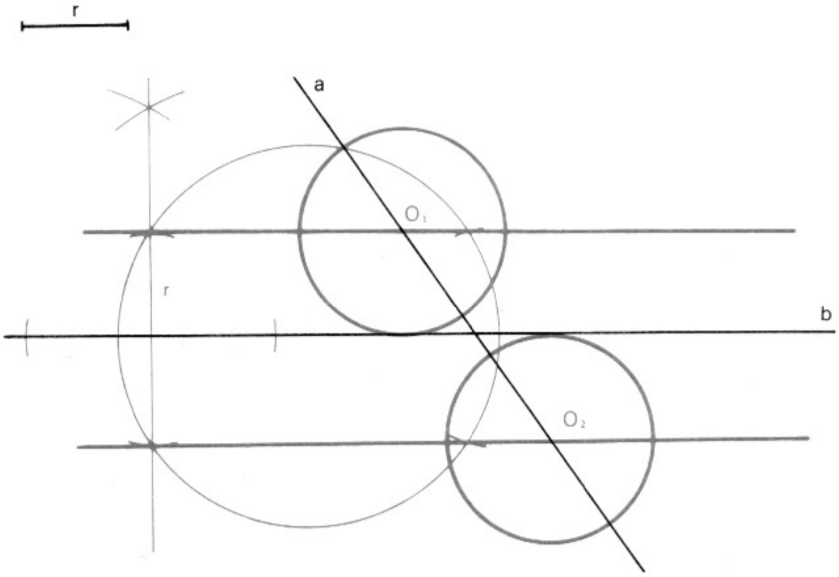
Sugestão:
Pergunte o que deve ocorrer com A e B para que o problema não tenha solução. Pergunte também se em alguma situação o problema pode admitir uma única solução.



Soluções: X_1 e X_2.

Retas paralelas: LG 3

31 São dadas duas retas concorrentes **a** e **b** e uma distância **r**. Construa uma circunferência de raio **r**, tangente à reta **b**, sabendo que o seu centro pertence à reta **a**. Quantas soluções admite o problema?



Soluções: circunferências de centro O_1 e O_2.

32 São dados um ângulo $A\hat{B}C$ e uma distância **r**. Construa uma circunferência de raio **r** tangente aos lados do ângulo dado.

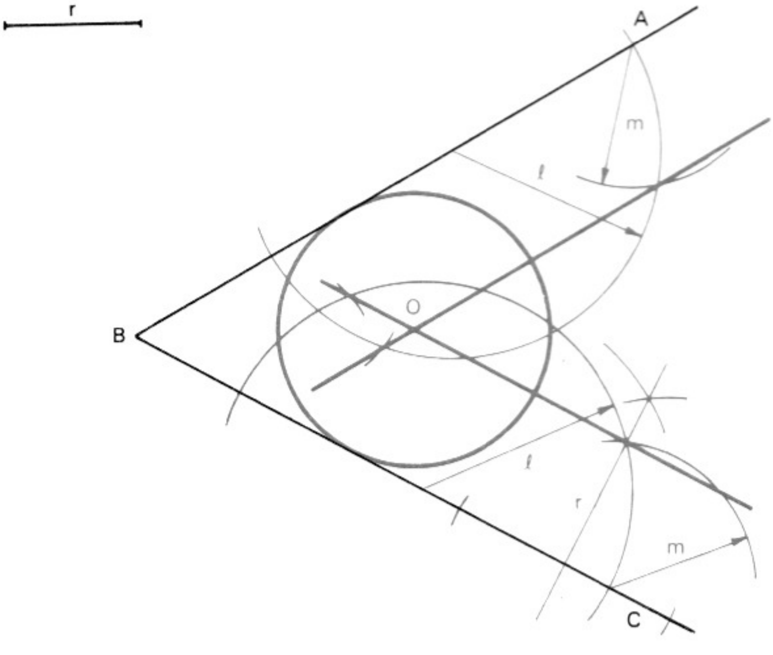


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Comente com o aluno que neste caso, ao determinar os centros O_1 e O_2, não é necessário baixar desses centros as perpendiculares à reta **b** para determinar o raio, pois o mesmo foi dado.

Observação:
Comente que, desde que se utilizem os mesmos arcos, não é necessário traçar a perpendicular (na qual se marca a distância **r**) em relação aos dois lados do ângulo.

Retas paralelas: LG 3 — Bissetriz: LG 4

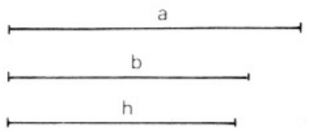
Figura auxiliar e anotações

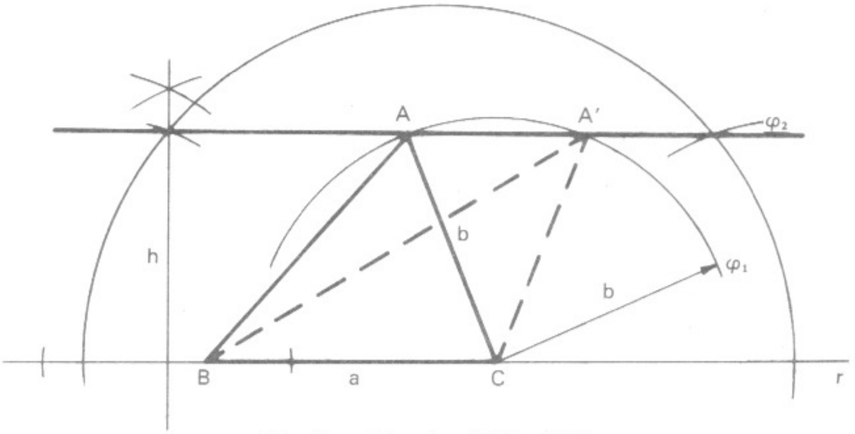
33 Construa um triângulo ABC, dados **a**, **b** e a distância **h** do vértice A ao lado $\overline{BC}$. Quantas soluções admite o problema?

Sugestão: Você pode colocar o lado $\overline{BC}$ sobre uma reta **r** qualquer e, depois, para o vértice A você conhece duas propriedades:

φ_1: A dista **b** de C (LG 1)
φ_2: A dista **h** de **r** (LG 3)

Observação:
Comente que as soluções que surgiriam abaixo de **r** são congruentes às de cima, de modo que o problema apresenta apenas duas soluções.

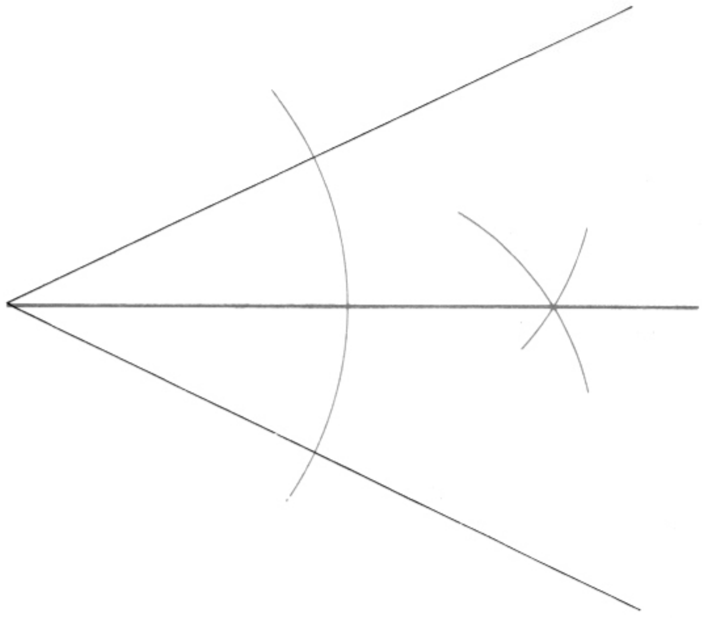




Soluções: triângulos ABC e A'BC.

34 Construa a bissetriz do ângulo dado.

Observação:
Aproveitando o traçado da bissetriz, talvez seja um momento oportuno para fazer uma breve revisão do conceito de lugar geométrico, bem como dos lugares já estudados.

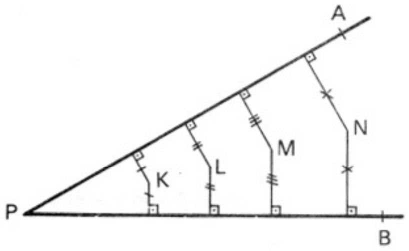


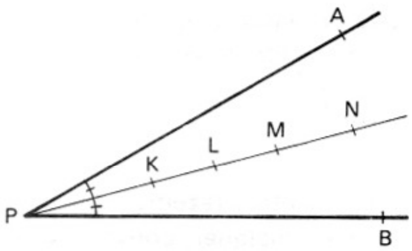
E8.22 Uma circunferência de raio igual a 30 mm é tangente aos lados de um ângulo reto. Determine, graficamente, a distância do centro da circunferência ao vértice do ângulo. (Só régua e compasso!)

Resolva os exercícios de 27 a 33 do caderno de atividades.

Bissetriz: LG 4

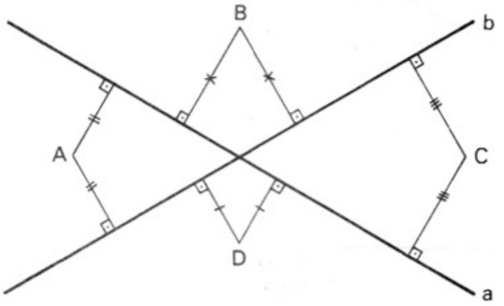
Você será convidado novamente a imaginar. Suponha que seja dado um ângulo A$\hat{P}$B; imagine um ponto que seja eqüidistante dos lados desse ângulo. Imaginou? Agora imagine outro, e outro, e mais outro, muitos outros pontos, sendo cada um deles eqüidistante dos lados do ângulo.





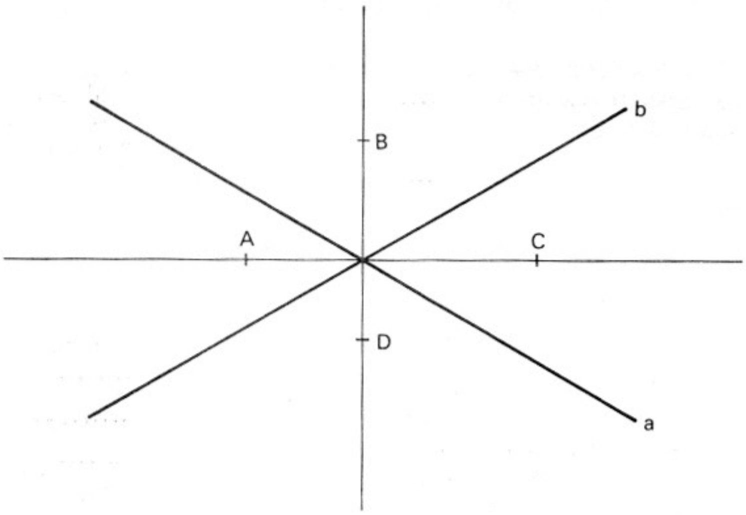
Reunindo todos os infinitos pontos, sendo que **cada um** eqüidista dos lados de um ângulo, obtém-se uma semi-reta notável. É a bissetriz do ângulo.

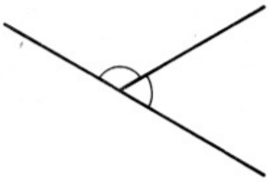
Agora você pode ampliar essa idéia. Em vez de um ângulo, considere duas retas concorrentes, **a** e **b**. Imagine pontos eqüidistantes de **a** e **b** ''espalhados'' por todos os lados.

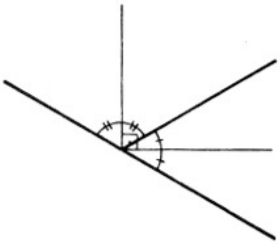


A reunião de todos os pontos, sendo **cada um** eqüidistante das retas concorrentes **a** e **b**, constitui as bissetrizes dos quatro ângulos formados por essas retas. Porém, observe com atenção: essas bissetrizes formam duas novas retas, as quais são perpendiculares entre si.

No exercício resolvido E2.18 está demonstrado que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares são perpendiculares.







Com isso, a bissetriz também ganha o *status* de lugar geométrico, pois:

- todo ponto pertencente à bissetriz de qualquer dos ângulos das retas **a** e **b** é eqüidistante dessas retas;
- somente os pontos da bissetriz de qualquer dos ângulos das retas **a** e **b** são eqüidistantes dessas retas.

Assim, podemos enunciar um novo lugar geométrico.

LG 4

O lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de duas retas concorrentes, **a** e **b**, constitui um par de retas perpendiculares, as quais contêm as bissetrizes dos ângulos determinados por **a** e **b**.

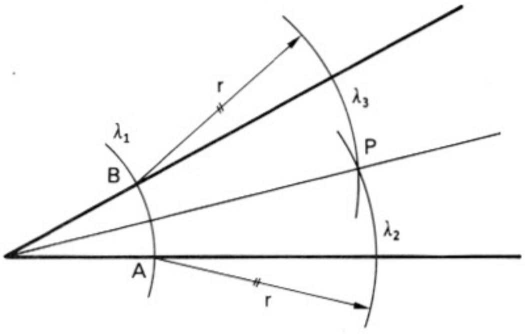
SEMPRE QUE UM PONTO PROCURADO FOR EQÜIDISTANTE DE DUAS CONCORRENTES DADAS, ESSE PONTO PERTENCERÁ À BISSETRIZ DE UM DOS ÂNGULOS FORMADOS POR ESSAS RETAS.

Construção da bissetriz

Seja dado um ângulo. Para construir sua bissetriz, fazemos o seguinte:

1.º) Com centro no vértice do ângulo e raio qualquer, convenientemente grande, descreve-se um arco de circunferência λ_1, o qual intercepta os lados nos pontos A e B.

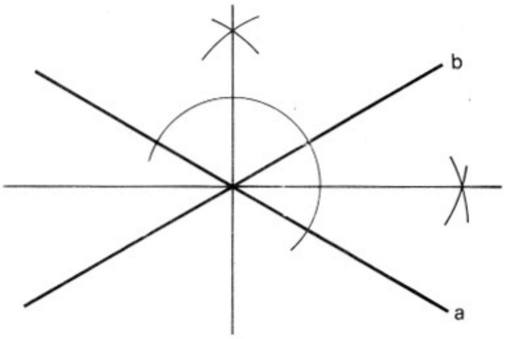
2.º) Com centro em A e depois em B, e com um mesmo raio **r** qualquer, descrevem-se os arcos de circunferências λ_2 e λ_3, os quais interceptam-se no ponto P.



A bissetriz é a semi-reta que tem origem no vértice do ângulo e passa por P.

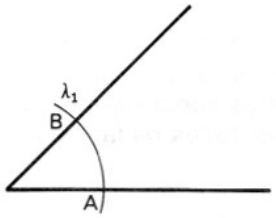
Observações:

- Os raios dos arcos λ_2 e λ_3 têm que ser iguais, mas não necessariamente iguais ao de λ_1, embora, de um modo geral, pode-se fazer a construção com um só raio para os três arcos. O importante é que se obtenha o ponto P suficientemente afastado do vértice.
- Para traçar as bissetrizes dos quatro ângulos formados por duas retas concorrentes (LG 4), basta construir as bissetrizes de dois ângulos adjacentes quaisquer e prolongá-las pelo vértice.



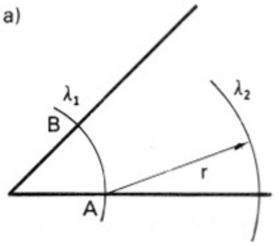
Evolução do traçado

1.º passo

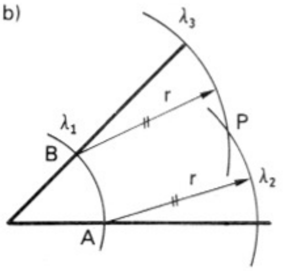


2.º passo

a)



b)



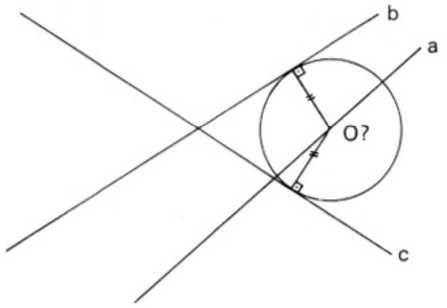
Exercícios

E8. **23** Desenhe um ângulo qualquer e construa a sua bissetriz. Com o auxílio do transferidor, meça os ângulos para verificar a precisão do seu traçado.

E8. **24** Desenhe duas retas concorrentes e construa o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dessas retas.

E8. **25** São dadas três retas, **a**, **b** e **c**, concorrentes duas a duas. Construa uma circunferência tangente às retas **b** e **c**, sabendo que o seu centro pertence à reta **a**.

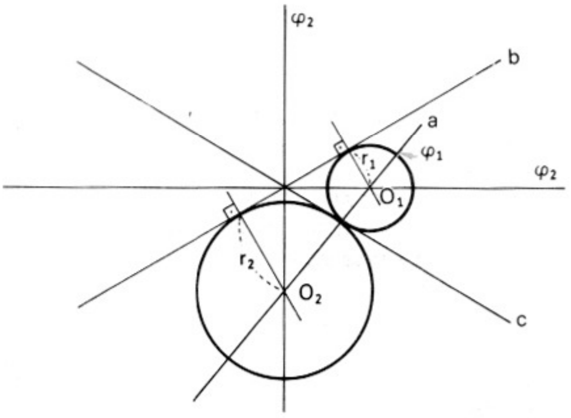
Suposto resolvido



Resolução: Conhecemos duas propriedades do centro O dessa circunferência:

φ_1: O pertence à reta **a**
φ_2: O eqüidista das retas concorrentes **b** e **c** (LG 4)

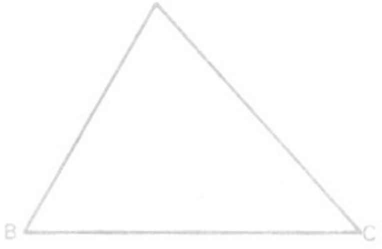
Encontramos o centro na intersecção da reta **a** com as bissetrizes dos ângulos das retas **b** e **c**.



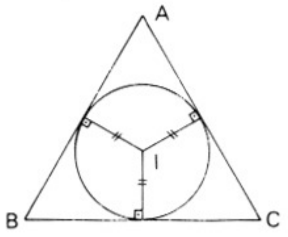
Após as determinações dos centros O_1 e O_2, os raios não podem ser achados na "base das tentativas". É necessário traçar por O_1 e O_2 retas perpendiculares a **b** ou a **c**.

E8. **26** Construa a circunferência inscrita num triângulo ABC dado.

◁ IMPORTANTE



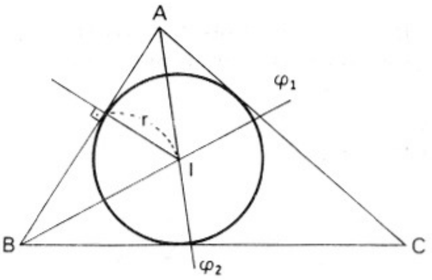
Suposto resolvido



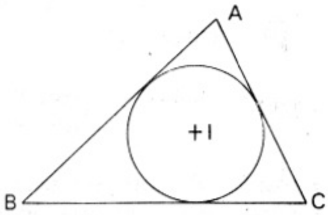
Resolução: Sabemos que o centro I da circunferência inscrita é eqüidistante dos lados. Podemos, então, por exemplo, usar as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: I eqüidista de } \overline{AB} \text{ e } \overline{BC} \text{ (LG 4)} \\ \varphi_2\text{: I eqüidista de } \overline{AB} \text{ e } \overline{AC} \text{ (LG 4)} \end{cases}$$

Obtemos o incentro na intersecção das bissetrizes dos ângulos Â e B̂. Uma vez obtido o ponto I, determinamos o raio traçando por I uma perpendicular a um lado qualquer.



Circunferência inscrita num triângulo é a circunferência que tangencia internamente os três lados desse triângulo.

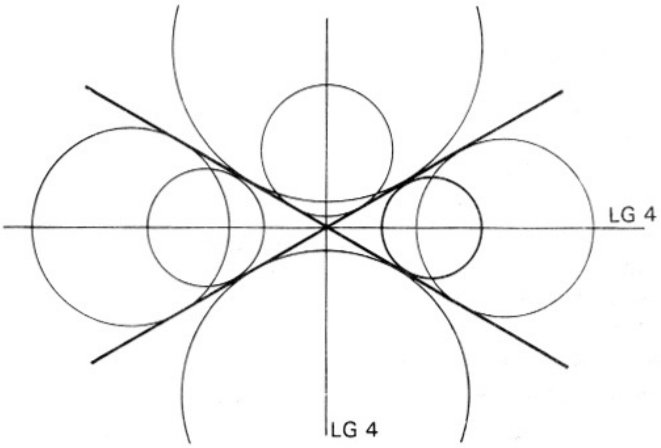


O centro I da circunferência inscrita num triângulo é denominado **incentro**.

O incentro pode ser obtido na intersecção das bissetrizes de dois ângulos internos quaisquer do triângulo. Não têm que ser necessariamente Â e B̂.

Uma observação importante

Sempre que se procura uma circunferência tangente a duas retas concorrentes, um lugar geométrico do centro são as bissetrizes dos ângulos formados por essas retas, isto é, o LG 4.



E8.**27** O que é incentro de um triângulo?

E8.**28** Construa a circunferência inscrita num triângulo eqüilátero de lado $\ell = 70$ mm. Quanto mede, aproximadamente, o raio dessa circunferência?

E8.**29** Determine, graficamente, o comprimento do raio da circunferência inscrita num triângulo retângulo cujos catetos medem 6 cm e 8 cm.

Resolva os exercícios de 34 a 39 do caderno de atividades.

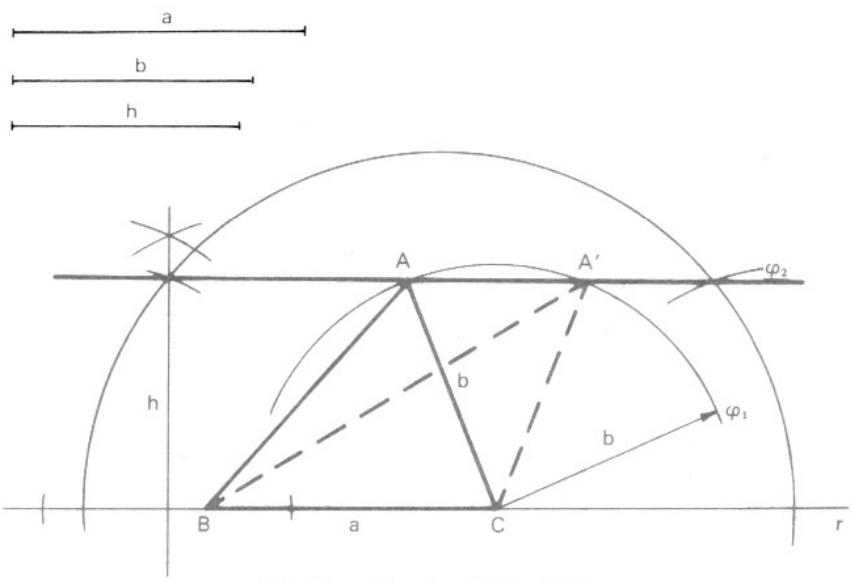
Retas paralelas: LG 3 — Bissetriz: LG 4

Figura auxiliar e anotações

33 Construa um triângulo ABC, dados **a**, **b** e a distância **h** do vértice A ao lado $\overline{BC}$. Quantas soluções admite o problema?

Sugestão: Você pode colocar o lado $\overline{BC}$ sobre uma reta **r** qualquer e, depois, para o vértice A você conhece duas propriedades:
φ_1: A dista **b** de C (LG 1)
φ_2: A dista **h** de **r** (LG 3)

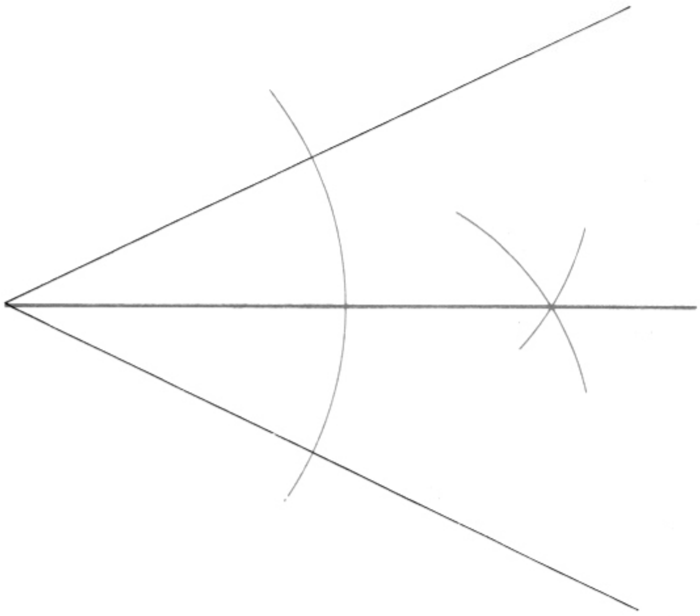
Observação:
Comente que as soluções que surgiriam abaixo de **r** são congruentes às de cima, de modo que o problema apresenta apenas duas soluções.



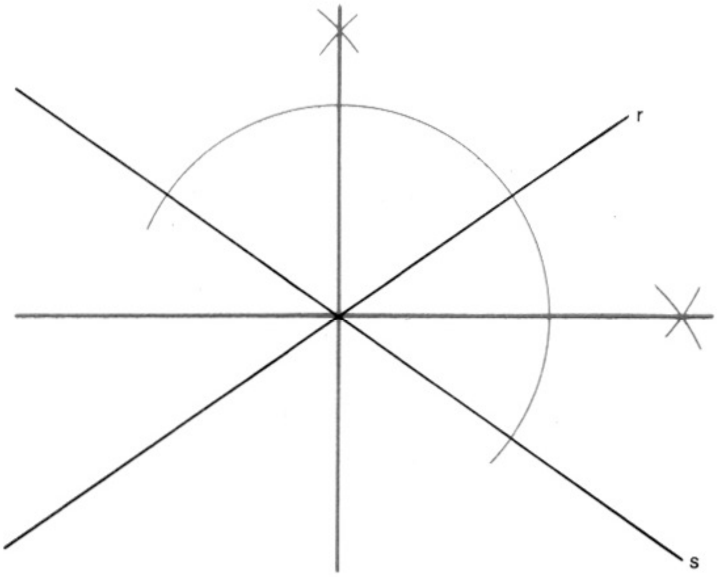
Soluções: triângulos ABC e A'BC.

34 Construa a bissetriz do ângulo dado.

Observação:
Aproveitando o traçado da bissetriz, talvez seja um momento oportuno para fazer uma breve revisão do conceito de lugar geométrico, bem como dos lugares já estudados.

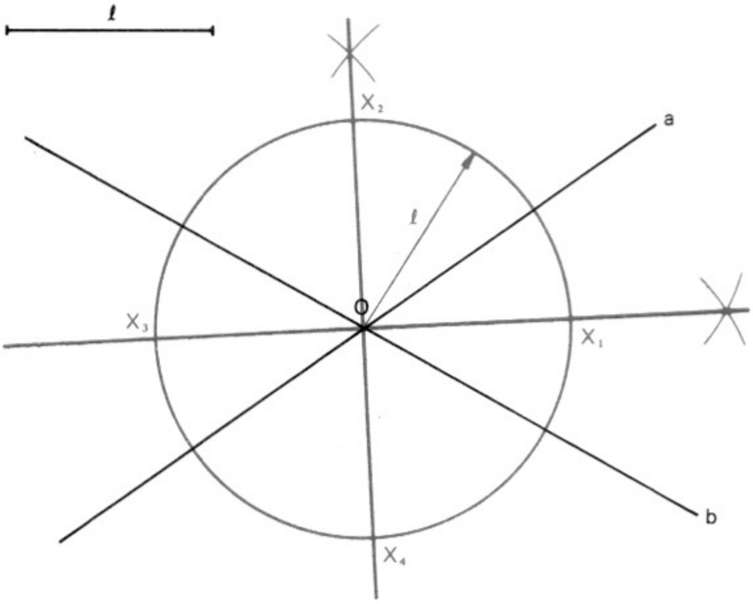


35 São dadas as retas concorrentes **r** e **s**. Construa o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de **r** e **s**.



36 São dadas duas retas concorrentes **a** e **b** e uma distância ℓ. Sendo O o ponto de intersecção de **a** e **b**, determine um ponto X que eqüidiste das retas, sabendo que sua distância a O é igual a ℓ. Quantas soluções há?

Observação:
Estimule o aluno a racionalizar as construções. Por exemplo, nesse exercício pode-se começar pela circunferência e aproveitá-la no traçado da bissetriz.



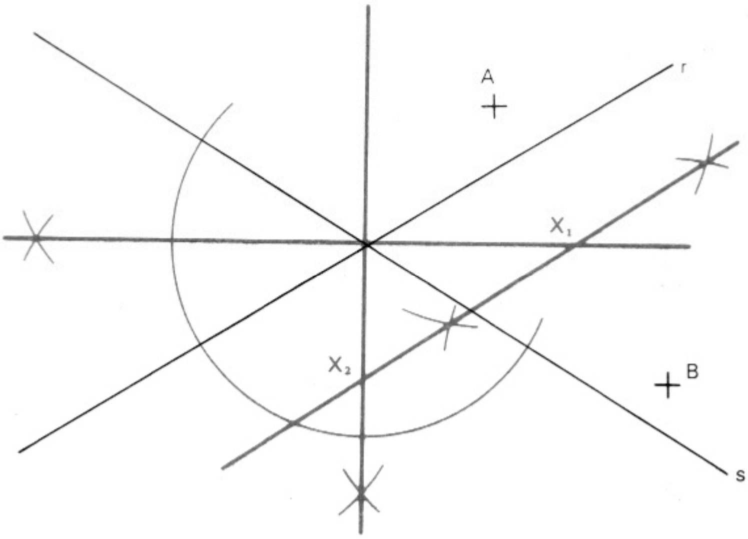
Soluções: X_1, X_2, X_3 e X_4.

Bissetriz: LG 4

Figura auxiliar e anotações

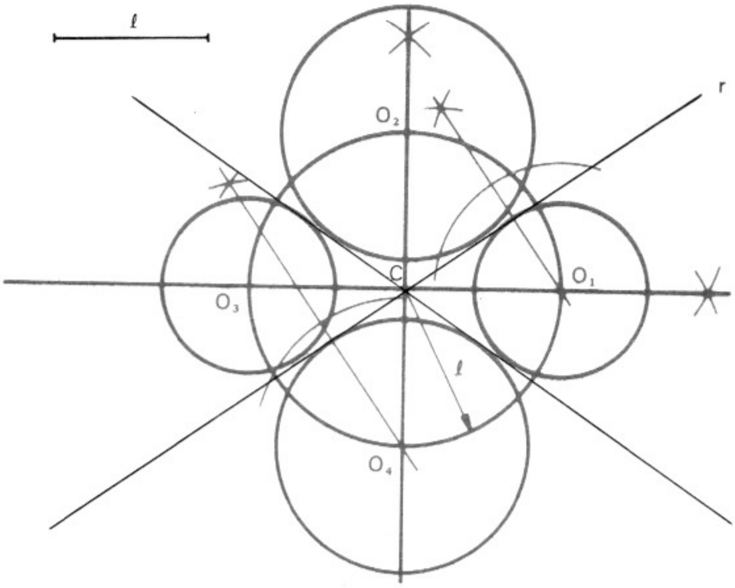
Sugestão:
Proponha para discussão: O que deve ocorrer com os pontos A e B para que o problema admita uma única solução? É possível que não tenha solução?

37 São dados dois pontos A e B e duas retas concorrentes **r** e **s**. Determine um ponto X eqüidistante de **r** e **s** e eqüidistante de A e B. Quantas soluções há?



Soluções: X_1 e X_2.

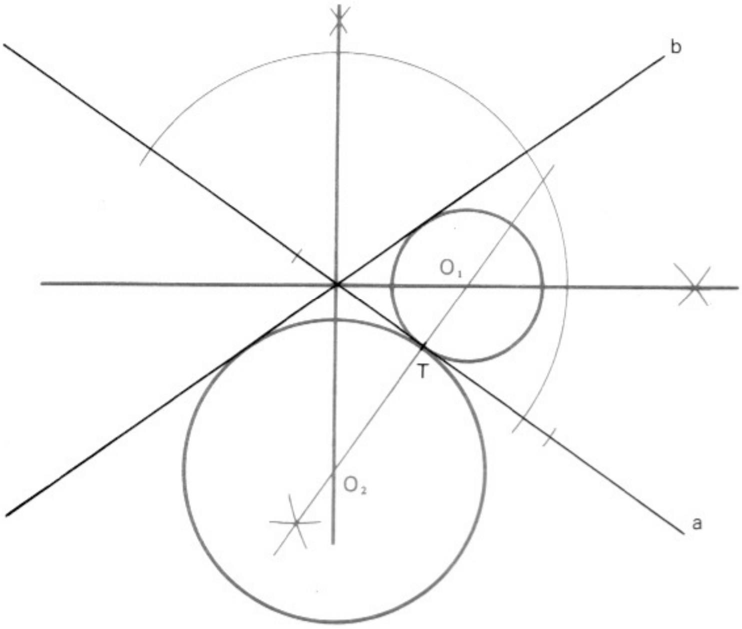
38 São dadas duas retas **r** e **s** concorrentes no ponto C e uma distância ℓ. Construa uma circunferência tangente às retas **r** e **s**, sabendo que a distância do seu centro a C é igual a ℓ.



Bissetriz: LG 4 — Transporte de ângulos

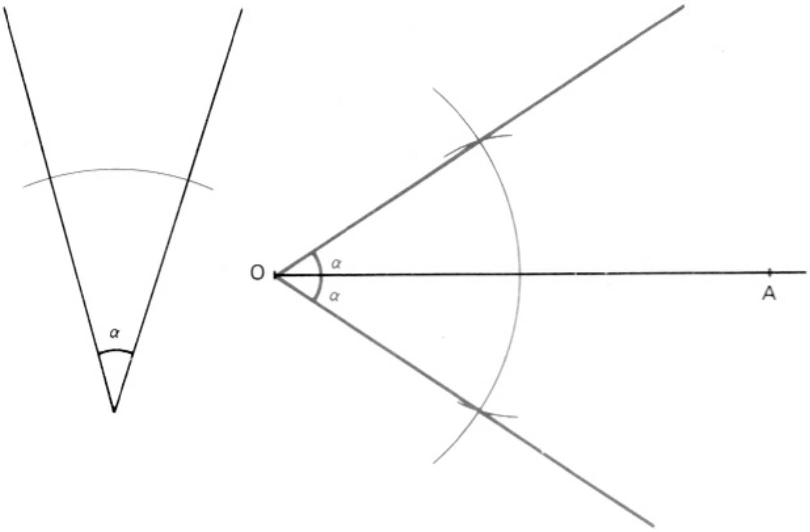
Figura auxiliar e anotações

39 São dadas duas retas concorrentes **a** e **b** e um ponto T de **a**. Construa uma circunferência tangente às retas **a** e **b**, sabendo que T é o ponto em que ela tangencia a reta **a**.



40 Dado o ângulo de medida α, transporte-o de modo que um de seus lados caia na semi-reta OA, sendo O o vértice.

Observação:
Mais uma vez, vale a pena chamar a atenção do aluno para a importância desse exercício. Conscientize-o de que o transporte de ângulos é uma das operações mais solicitadas nas construções geométricas.



9

Operações e construções com ângulos

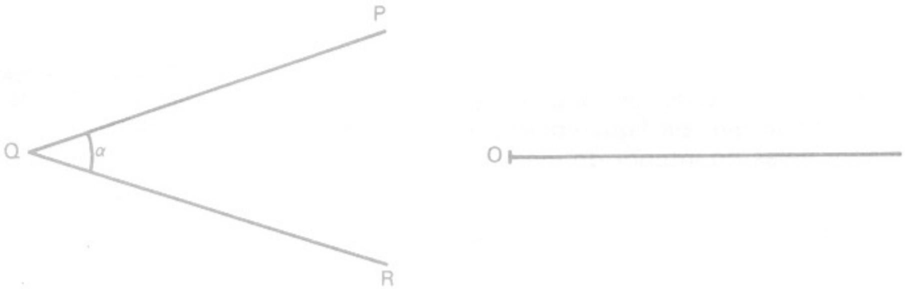
Transporte de ângulos

É muito comum, em problemas de construções geométricas, constar nos dados um ângulo. Porém, na grande maioria dos casos, esse ângulo deve ainda ser construído em outra posição que não aquela em que ele foi dado. Nesses casos, ao construir esse ângulo na posição desejada, dizemos que foi efetuado o **transporte do ângulo** dado. Verifique no problema seguinte.

Problema

Construir um ângulo, conhecidos o vértice O e um lado, de modo que ele seja congruente a um ângulo PQ̂R dado.

O problema sempre admite duas soluções e é bom ter isso em mente. Porém, na maioria dos casos em que temos que transportar um ângulo, já sabemos a posição em que ele deverá ser construído. Nesses casos, não é necessário construir os dois.

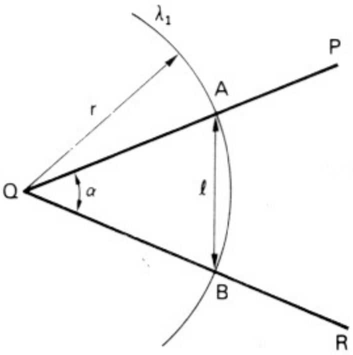


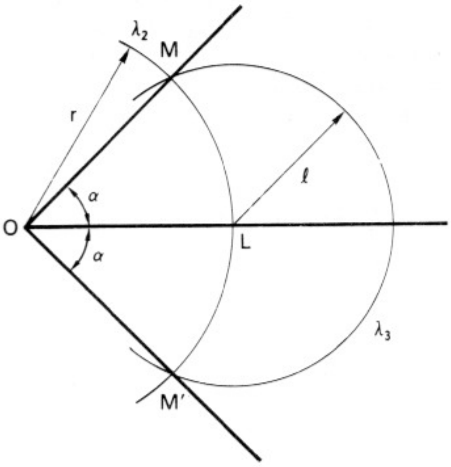
Resolução:

1.º) Com centro em Q e raio **r** qualquer, convenientemente grande, traça-se o arco de circunferência λ_1, o qual intercepta os lados do ângulo PQ̂R nos pontos A e B. Seja ℓ a distância de A e B.

2.º) Com centro em O e o **mesmo raio r** de λ_1, descreve-se um arco de circunferência λ_2, o qual intercepta o lado dado do ângulo a ser construído no ponto L.

3.º) Com centro em L e raio ℓ, descreve-se o arco de circunferência λ_3, o qual intercepta λ_2 nos pontos M e M′.

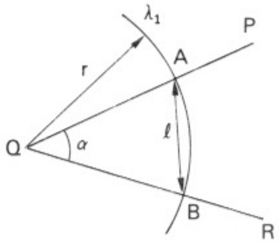




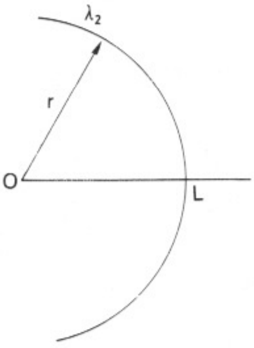
Os ângulos LÔM e LÔM′ são as soluções do problema.

Evolução do traçado

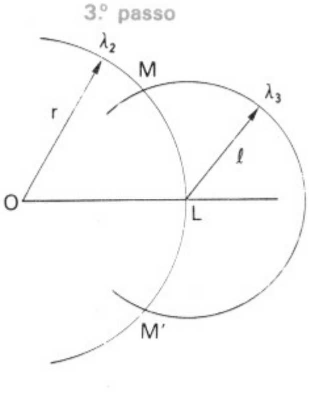
1.º passo



2.º passo



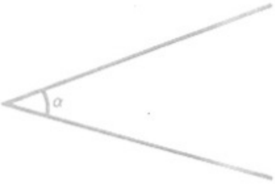
3.º passo

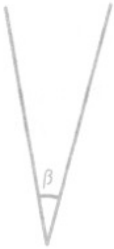


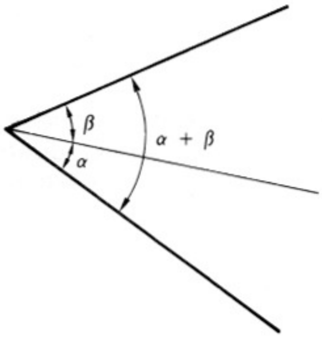
Adição e subtração de ângulos

Adição

Dados dois ângulos de medidas α e β, para obter um ângulo de medida $\alpha + \beta$ transportamos um dos ângulos de modo que ele fique adjacente ao outro.



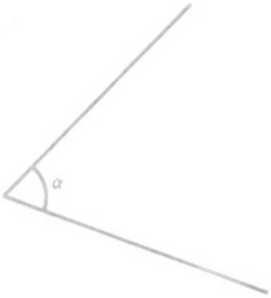


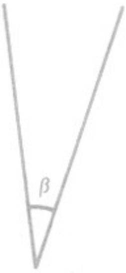


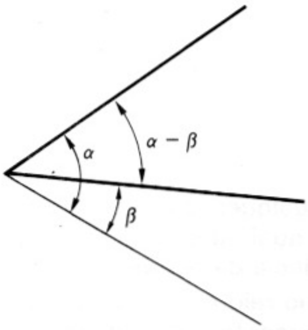
Subtração

Dados dois ângulos de medidas α e β, para obter um ângulo de medida $\alpha - \beta$ transportamos um dos ângulos de modo que ele fique consecutivo mas não adjacente ao outro (isto é, o menor deles no interior do maior).

Resolva os exercícios de 40 a 44 do caderno de atividades.





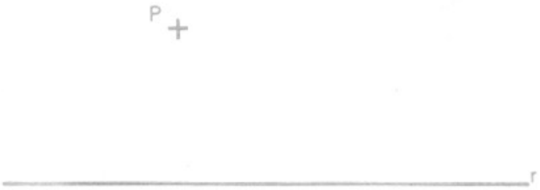


Traçado de paralelas por transporte de ângulos

Já estudamos dois processos para traçar uma paralela a uma reta dada, por um ponto fora da mesma. Através do transporte de ângulos, vamos dar um terceiro processo para essa construção. Principalmente no caso em que são dados pontos alinhados pelos quais devem ser traçadas retas paralelas a uma reta dada, esse processo é bastante eficiente.

Problema

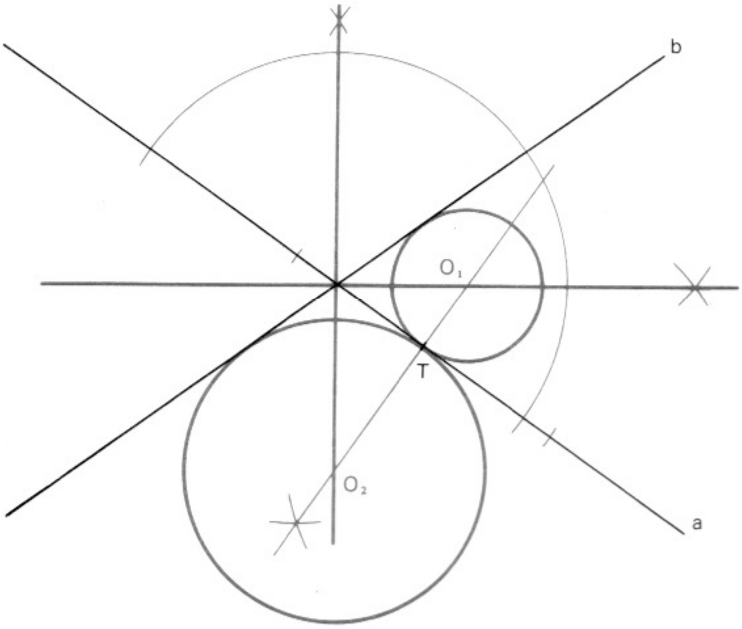
Sejam dados uma reta **r** e um ponto P fora dela. Traçar a reta **s** que passa por P e é paralela a **r**.



Bissetriz: LG 4 — Transporte de ângulos

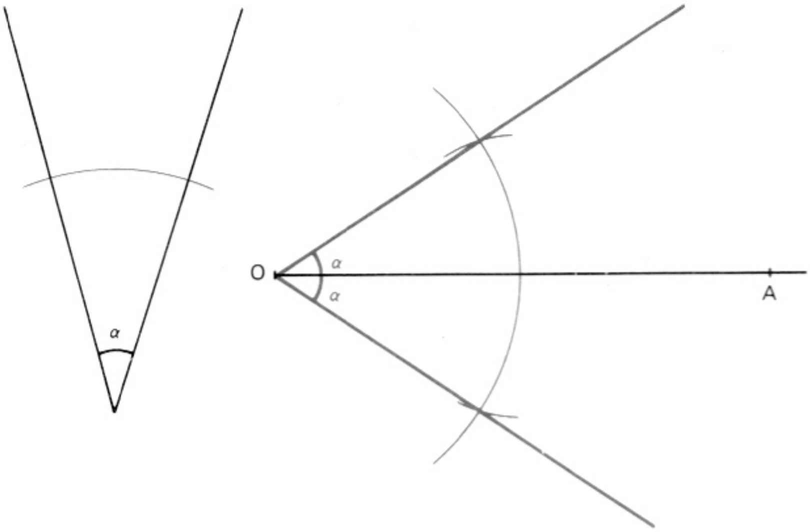
Figura auxiliar e anotações

39 São dadas duas retas concorrentes **a** e **b** e um ponto T de **a**. Construa uma circunferência tangente às retas **a** e **b**, sabendo que T é o ponto em que ela tangencia a reta **a**.



40 Dado o ângulo de medida α, transporte-o de modo que um de seus lados caia na semi-reta OA, sendo O o vértice.

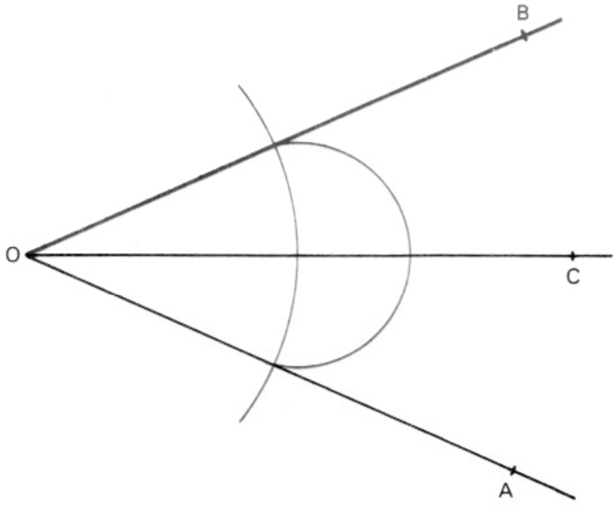
Observação:
Mais uma vez, vale a pena chamar a atenção do aluno para a importância desse exercício. Conscientize-o de que o transporte de ângulos é uma das operações mais solicitadas nas construções geométricas.



Transporte de ângulos — Adição de ângulos

Figura auxiliar e anotações

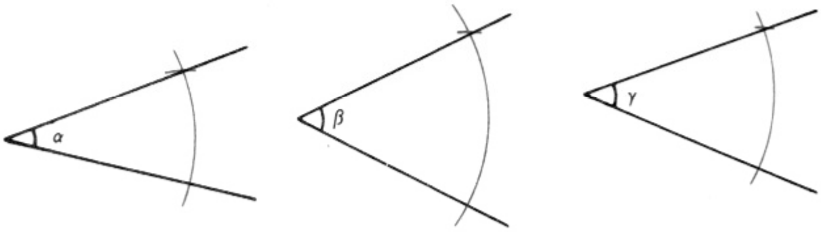
41 De um ângulo são dados o lado $\overrightarrow{OA}$ e a bissetriz $\overrightarrow{OC}$. Construa o lado $\overrightarrow{OB}$.

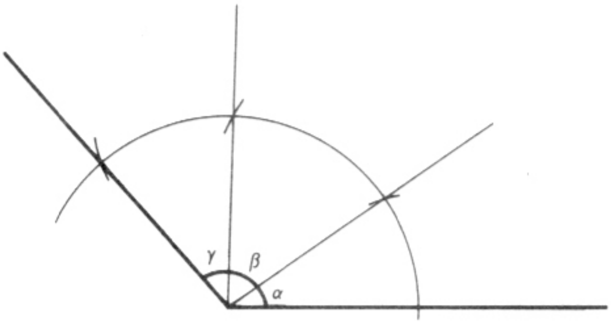


42 Dados os ângulos de medidas α, β e γ, construa o ângulo de medida $\alpha + \beta + \gamma$.

Sugestão:
Com os mesmos dados, proponha ao aluno a obtenção de ângulos com medidas tais como:

$2\alpha + \beta - \gamma$
ou
$\alpha + 2\gamma - \beta$ etc.

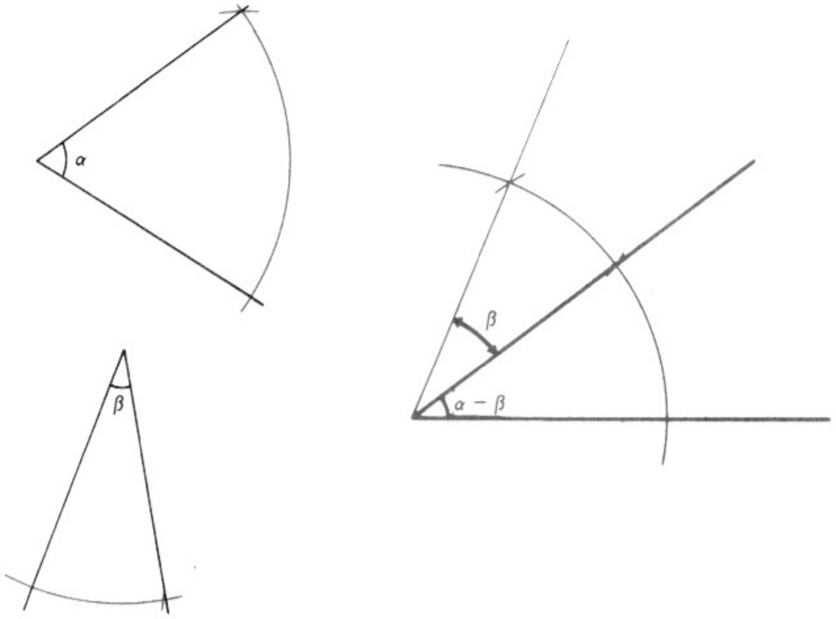




Adição e subtração de ângulos

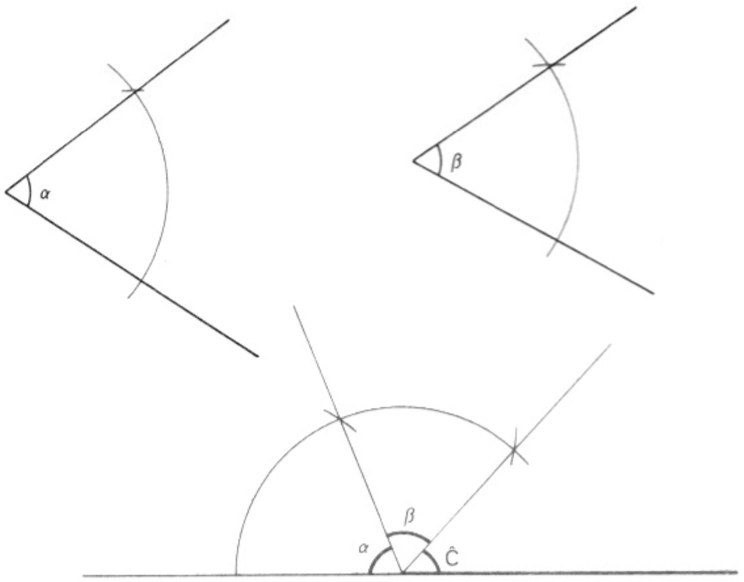
Figura auxiliar e anotações

43 Dados os ângulos de medidas α e β, construa o ângulo de medida $\alpha - \beta$.



44 De um triângulo ABC são dados $\hat{A} = \alpha$ e $\hat{B} = \beta$. Determine $\hat{C}$ graficamente.

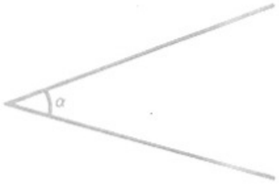
Sugestão:
Proponha problemas que são variações desse tema.
Exemplo:
De um triângulo retângulo é dado um ângulo agudo. Determine graficamente o outro ângulo agudo.

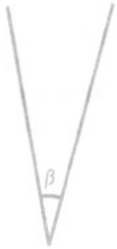


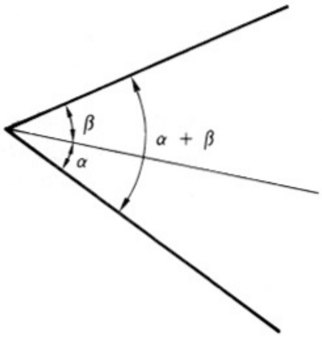
Adição e subtração de ângulos

Adição

Dados dois ângulos de medidas α e β, para obter um ângulo de medida $\alpha + \beta$ transportamos um dos ângulos de modo que ele fique adjacente ao outro.



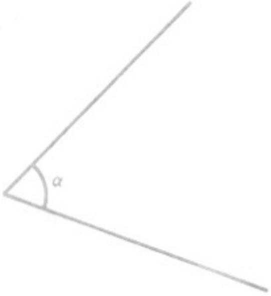


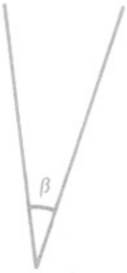


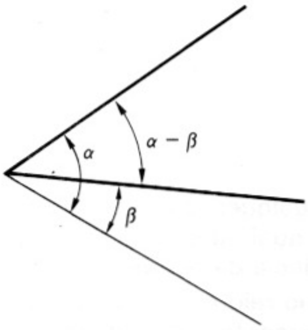
Subtração

Dados dois ângulos de medidas α e β, para obter um ângulo de medida $\alpha - \beta$ transportamos um dos ângulos de modo que ele fique consecutivo mas não adjacente ao outro (isto é, o menor deles no interior do maior).

Resolva os exercícios de 40 a 44 do caderno de atividades.





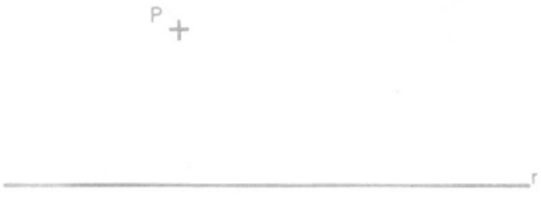


Traçado de paralelas por transporte de ângulos

Já estudamos dois processos para traçar uma paralela a uma reta dada, por um ponto fora da mesma. Através do transporte de ângulos, vamos dar um terceiro processo para essa construção. Principalmente no caso em que são dados pontos alinhados pelos quais devem ser traçadas retas paralelas a uma reta dada, esse processo é bastante eficiente.

Problema

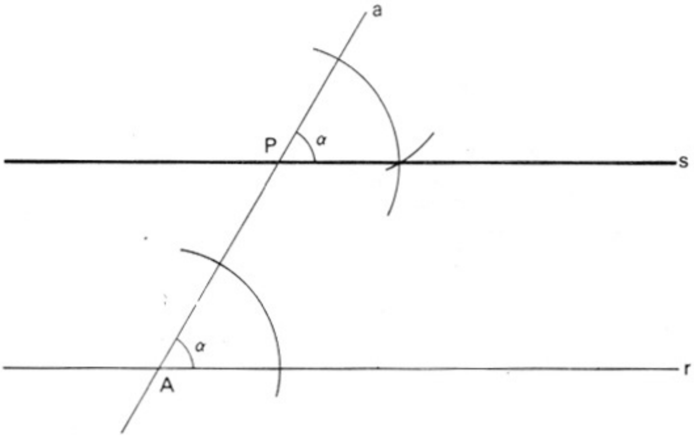
Sejam dados uma reta **r** e um ponto P fora dela. Traçar a reta **s** que passa por P e é paralela a **r**.



Resolução: Podemos proceder da seguinte forma:

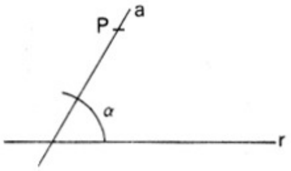
1.º) Por P traça-se uma reta **a** qualquer, que intercepta **r** no ponto A e forma com **r** um ângulo α arbitrário.

2.º) Transporta-se o ângulo α de modo que ele tenha vértice em P, um lado esteja sobre a reta **a** e, em posição correspondente, o outro lado será paralelo à reta **r**.

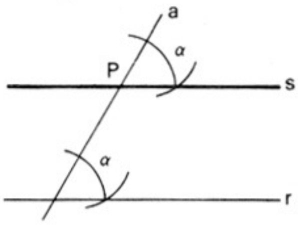


Evolução do traçado

1.º passo

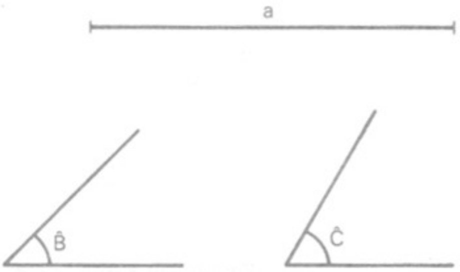


2.º passo

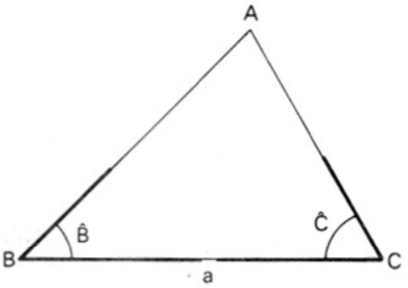


E9. Exercícios

1 Construa um triângulo ABC, dados **a**, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.



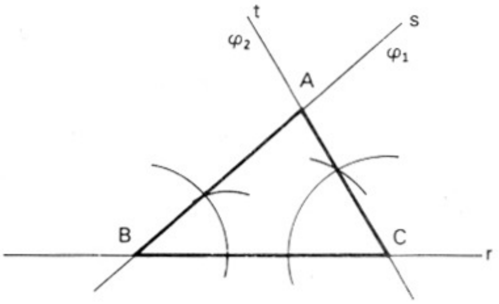
Suposto resolvido



Resolução: Sobre uma reta **r** qualquer, colocamos o lado $\overline{BC}$. Então, para o vértice A, temos duas propriedades:

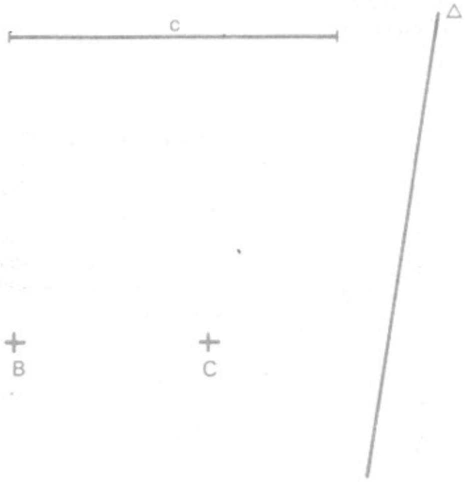
φ_1: A pertence a uma reta **s** que passa por B e forma o ângulo $\hat{B}$ com **r**

φ_2: A pertence a uma reta **t** que passa por C e forma o ângulo $\hat{C}$ com **r**

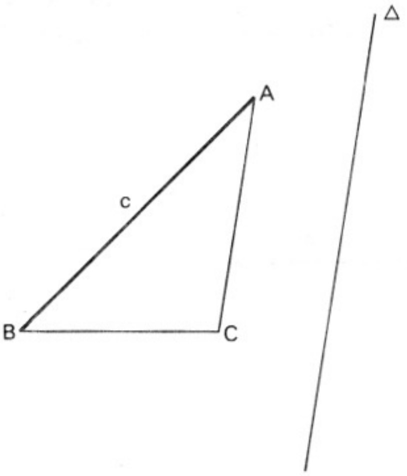


E9.2 Construa um triângulo ABC, dados os vértices B e C, o lado **c** e a direção Δ do lado $\overline{AC}$.

Δ é uma letra do alfabeto grego, que se lê "delta".



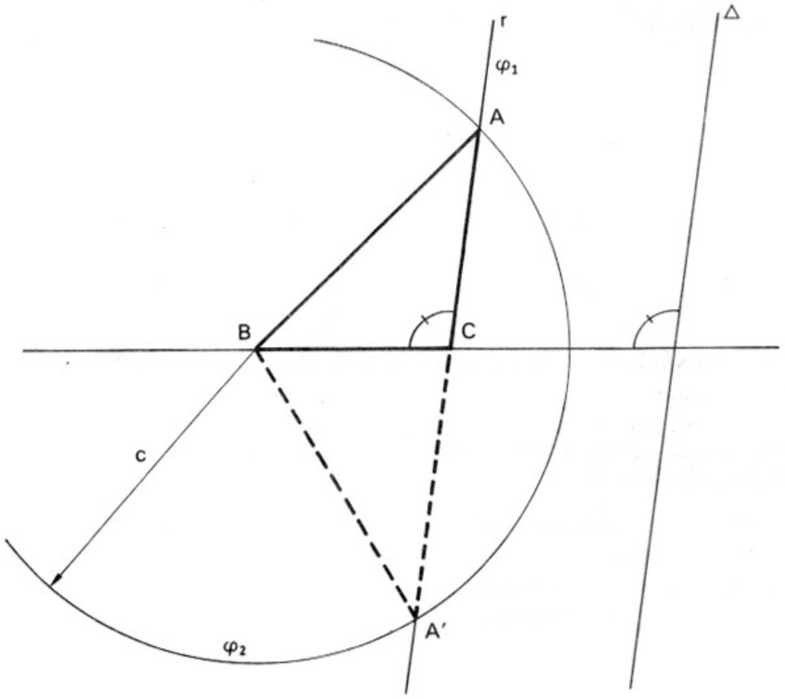
Suposto resolvido



Quando se diz que o lado $\overline{AC}$ tem a direção Δ, está-se afirmando que $\overline{AC}$ é paralelo à reta Δ.

Resolução: Como foram dados os vértices B e C, só falta determinar A. Mas, para esse vértice, temos duas propriedades:

φ_1: A pertence à reta **r** que passa por C e é paralela a Δ
φ_2: A dista **c** de B (LG 1)



Para traçar a reta **r** paralela a Δ, pode-se utilizar o transporte de ângulo.

Note que o problema admitiu duas soluções: triângulos ABC e A'BC.

E9.3 Com o auxílio do transferidor, construa os ângulos $\alpha = 25°$, $\beta = 40°$ e $\gamma = 72°$. Agora, sem o uso do transferidor, construa os seguintes ângulos:

a) $\alpha + \beta$ b) $\gamma - \alpha$ c) $\alpha + \gamma - \beta$ d) 2α

Ao término das construções, meça os ângulos obtidos para aferir a precisão do seu traçado.

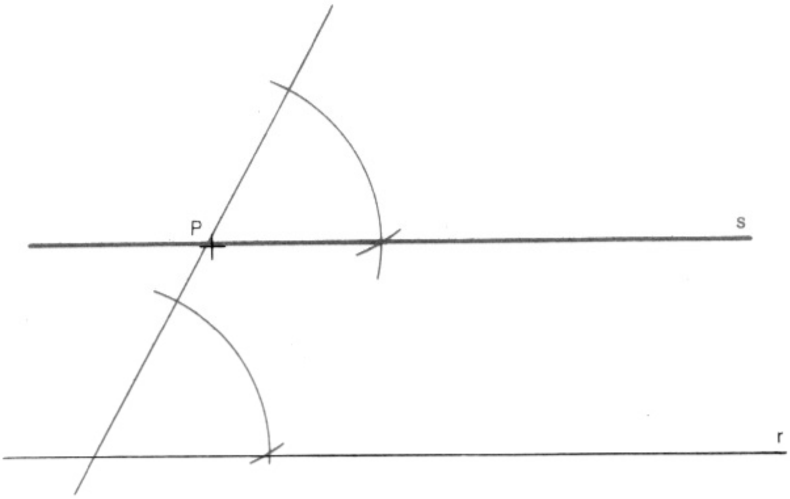
Resolva os exercícios de 45 a 50 do caderno de atividades.

Traçado de paralelas por transporte de ângulos

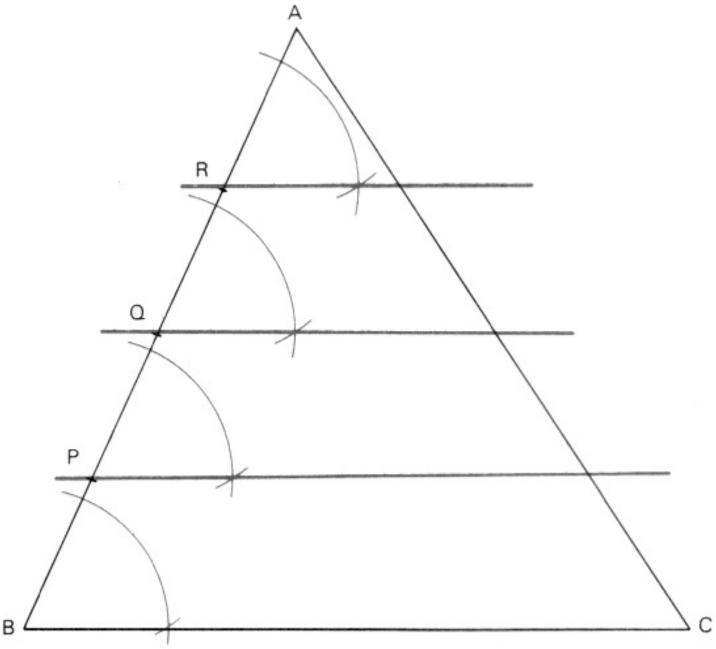
Figura auxiliar e anotações

Observação:
Chame a atenção do aluno para a simplicidade dessa construção de paralela, principalmente quando se tem que construir um feixe de paralelas, que é o caso do exercício seguinte.

45 São dados uma reta **r** e um ponto P. Utilizando o transporte de ângulo, construa a reta **s**, que passa por P e é paralela a **r**.



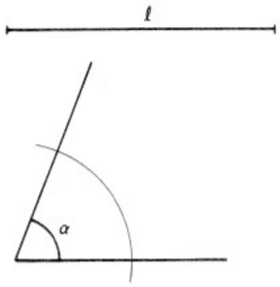
46 São dados um triângulo ABC e os pontos P, Q e R do lado $\overline{AB}$. Trace por P, Q e R retas paralelas ao lado $\overline{BC}$.

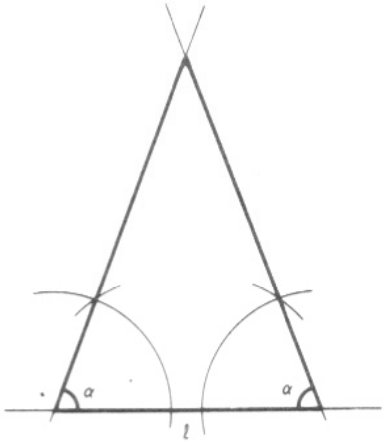


Construção de triângulo: transporte de ângulos e LG 1

Figura auxiliar e anotações

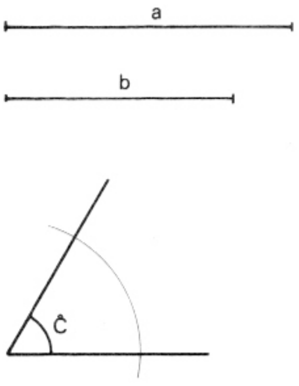
47 Dados a base *ℓ* e o ângulo α da base, construa um triângulo isósceles.

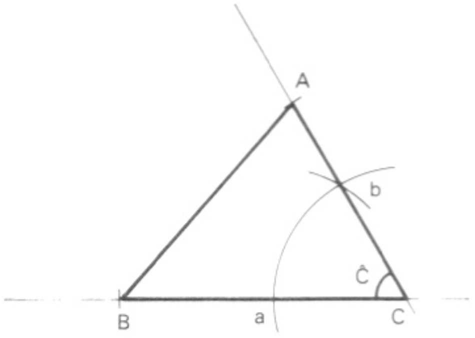




Observação:
Comente com o aluno que mais adiante será feito um estudo pormenorizado sobre construções de triângulos, embora desde já sejam propostos alguns exercícios sobre o tema.

48 Dados **a**, **b** e Ĉ, construa um triângulo ABC.





Observação:
Aproveite para mostrar que "Lado, Ângulo, Lado" é um critério de congruência de triângulos.

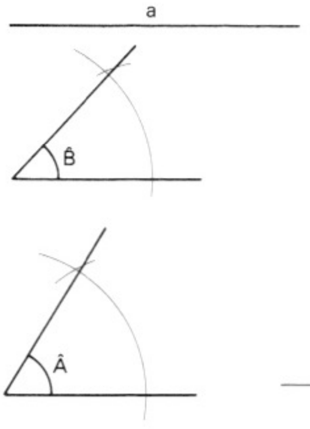
Construção de triângulo: transporte de ângulos e LG 1

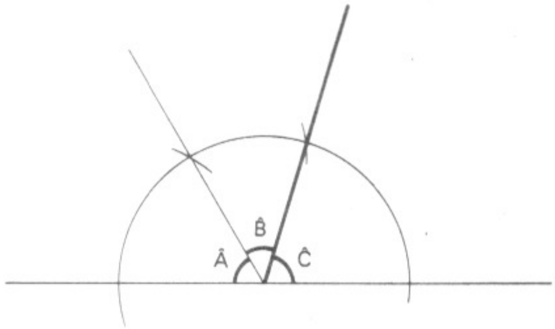
49 Dados **a**, B̂ e Â, construa um triângulo ABC.
Sugestão: Você pode primeiramente determinar Ĉ, como fez no exercício 44.

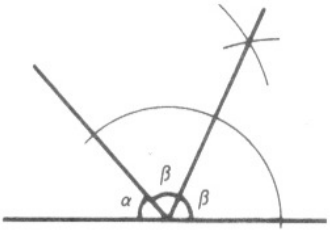
Figura auxiliar e anotações

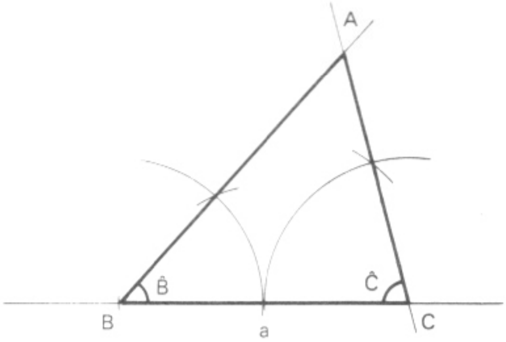
Sugestão:
Na mesma linha desse exercício, pode-se propor a construção de um triângulo isósceles do qual são dados a base e o ângulo α do vértice. Sem o recurso do arco capaz o aluno poderá ser orientado para determinar o ângulo β da base.

$$\beta = \frac{180° - \alpha}{2}$$







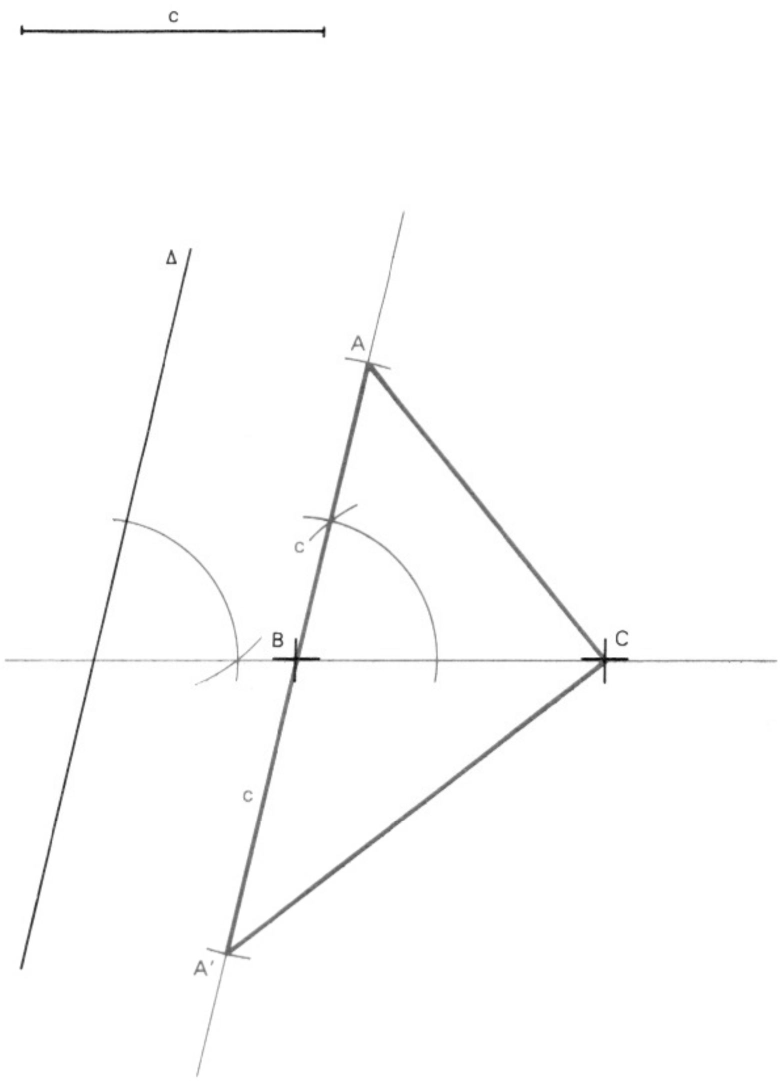


Construção de triângulo: transporte de ângulos e LG 1

50 Dados os vértices B e C, o lado **c** e a direção Δ do lado $\overline{AB}$, construa um triângulo ABC.

Figura auxiliar e anotações

Sugestão:
Pode-se propor um problema análogo a esse dando apenas o lado **b**, em vez do **c**.



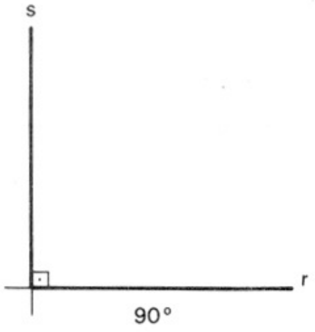
Construção de ângulos notáveis

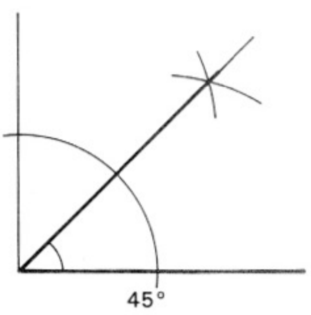
Vamos estudar as construções de ângulos para os quais está "vetado" o uso do transferidor até para colocá-los no papel. Esses ângulos são construtíveis através de régua e compasso.

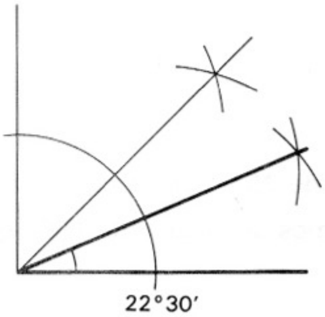
A família 90°, 45°, 22°30'...

Traçando por um ponto P de uma reta **r** qualquer uma reta **s** perpendicular a **r**, constrói-se um ângulo de 90°. Traçando a bissetriz do ângulo reto, obtém-se o ângulo de 45°. Traçando a bissetriz do ângulo de 45°, constrói-se o ângulo de 22°30'. Procedendo assim, pode-se construir uma infinidade de ângulos, mas apenas os dois primeiros nos são realmente importantes.

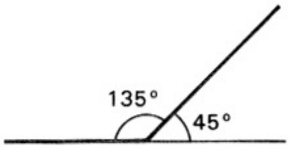
22°30' lê-se: 22 graus e 30 minutos. Lembre que 1° está subdividido em 60'. Assim, 30 minutos equivalem a meio grau, isto é, 22° 30' equivalem a 22,5°, ou seja, a metade de 45°.







Observação: É comum também se usar o ângulo de 135°. Note, porém, que esse ângulo surge naturalmente, quando se constrói o de 45°, pois 135° é o suplemento de 45°.



A família 60°, 30°, 15°...

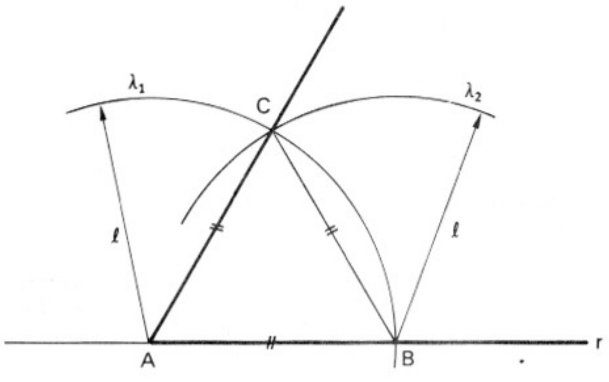
Uma vez construído o ângulo de 60°, temos que o de 30°, o de 15° etc. são obtidos por sucessivos traçados de bissetrizes.

A construção do ângulo de 60° é feita em função da construção de um triângulo eqüilátero de lado qualquer.

Tomemos, sobre uma reta **r**, o ponto A para vértice do ângulo. Temos, então:

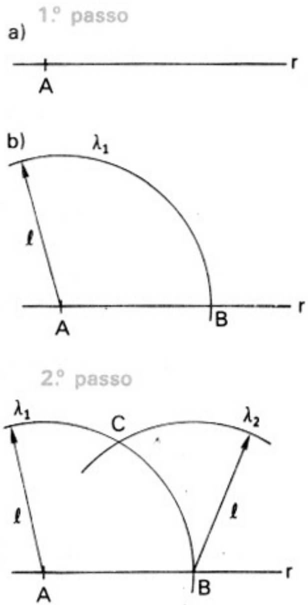
1.º) com centro em A e raio ℓ qualquer, convenientemente grande, traça-se o arco de circunferência λ_1, que intercepta **r** em B;

2.º) com centro em B e o **mesmo raio** ℓ, traça-se o arco de circunferência λ_2, o qual intercepta λ_1 no ponto C.



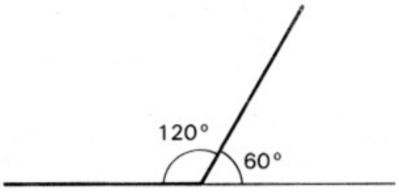
O ângulo BÂC mede 60°.

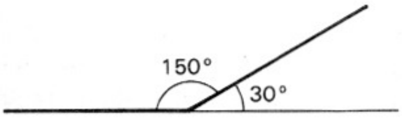
Evolução do traçado



A justificativa é imediata, pois o triângulo ABC é eqüilátero de lado ℓ. Logo, $B\hat{A}C = 60°$.

Observação: Também são freqüentemente usados os ângulos de 120° e o de 150°, os quais são os suplementos de 60° e 30°, respectivamente.

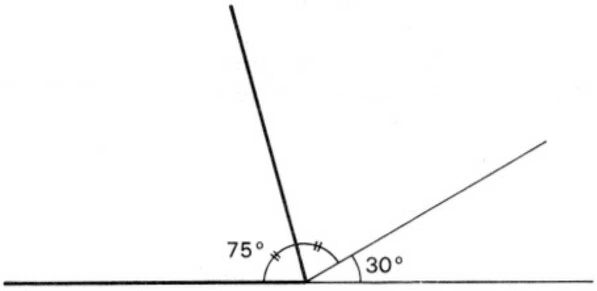




Exercícios

E9.**4** Construa um ângulo de 75°, com régua e compasso.

Resolução: Construímos um ângulo de 150° e traçamos a sua bissetriz.



Para os exercícios seguintes, procure fazer construções as mais precisas possíveis, e só use o transferidor para medir possíveis respostas.

E9.**5** Construa os seguintes ângulos:

a) 45° e 135° b) 60° e 120° c) 30° e 150°

Meça os resultados obtidos e verifique a precisão das suas figuras.

E9.**6** Calcule a medida do lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC, dados b = 40 mm, c = 50 mm e $\hat{A} = 60°$.

E9.**7** Construa um triângulo ABC isósceles, dados b = c = 40 mm e $\hat{A} = 150°$. Quanto mede o lado $\overline{BC}$?

E9.**8** Construa um triângulo ABC, dados a = 60 mm, $\hat{B} = 60°$ e $\hat{C} = 45°$. Quanto vale o perímetro desse triângulo?

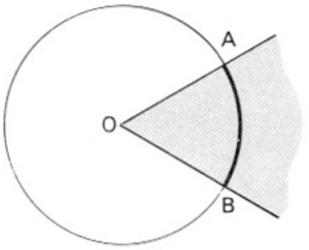
10

Ângulos na circunferência

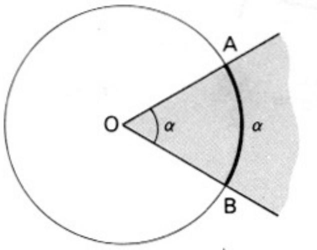
Ângulo inscrito

Antes de estudarmos o próximo lugar geométrico, vamos fazer um breve resumo de Geometria para conceituar elementos e propriedades que nos serão muito úteis. Portanto, você pode abandonar temporariamente a régua e o compasso como instrumentos de precisão.

Já vimos anteriormente que um ângulo é **central** em relação a uma circunferência, quando o seu vértice coincide com o centro da mesma. Além disso, ficou definido que a medida do ângulo central é igual à medida do arco correspondente, ou o arco que esse ângulo enxerga.



Ângulo inscrito



$A\hat{O}B = \alpha \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \alpha$

Nas figuras ao lado, **arc $\overset{\frown}{AB}$** é o arco que o ângulo AÔB enxerga.

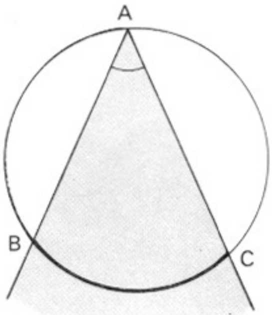
Vamos acrescentar agora o conceito de ângulo inscrito numa circunferência.

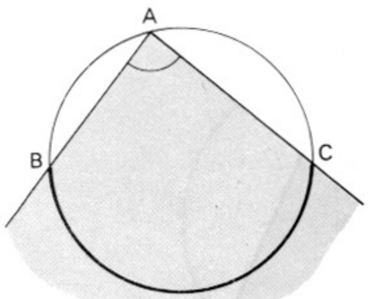
Definição

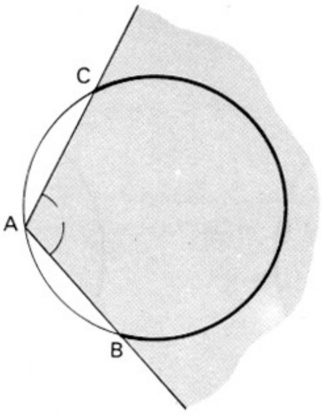
Um ângulo convexo é **inscrito numa circunferência**, quando o seu vértice é um ponto dessa circunferência e cada um de seus lados contém uma corda da mesma.

Assim como no caso do ângulo central, o arco interceptado por um ângulo inscrito é **correspondente** a esse ângulo ou, mais freqüentemente, ele é chamado **arco que o ângulo enxerga**.

Exemplos de ângulos inscritos numa circunferência, destacando-se os arcos que eles enxergam:







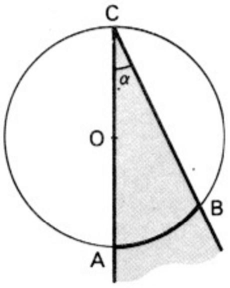
A seguir, vamos estabelecer uma propriedade fundamental dos ângulos inscritos.

Teorema

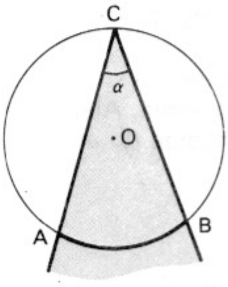
A medida de um ângulo inscrito numa circunferência é igual à metade da medida do arco que ele enxerga.

A demonstração completa desse teorema exige que analisemos três casos. No primeiro, um dos lados do ângulo passa pelo centro; no segundo, o centro está no interior do ângulo e, no terceiro, o centro está no exterior.

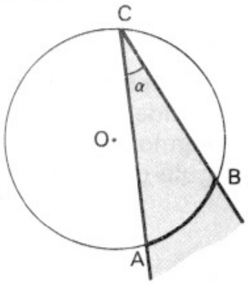
1.º caso



2.º caso



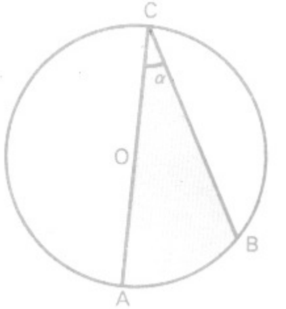
3.º caso

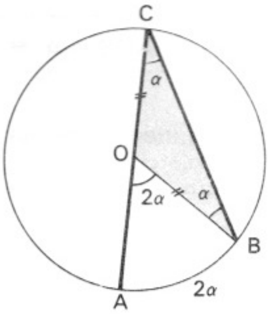


Nos três casos, queremos provar que $\alpha = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$.

☐ **Demonstração:**

1.º caso



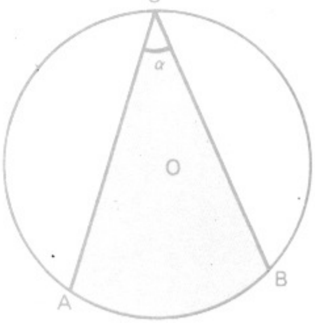


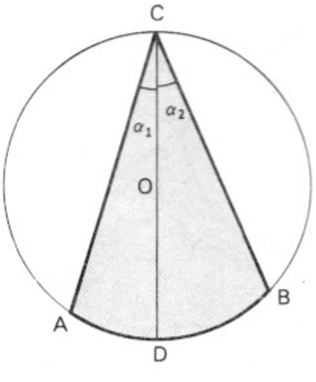
Traçando o raio $\overline{OB}$ no triângulo OBC, teremos OB = OC; portanto, nesse triângulo isósceles, $\hat{B} = \hat{C} = \alpha$. Como o ângulo $A\hat{O}B$ é externo do triângulo OBC, teremos $A\hat{O}B = 2\alpha$. Mas ∡ $A\hat{O}B$ é um ângulo central, e a sua medida é, por definição, a medida do arco que ele enxerga.

Observe que a propriedade ficou demonstrada para todo ângulo inscrito que tem um lado passando pelo centro.

Logo, $\widehat{AB} = 2\alpha$ ∴ $\boxed{\alpha = \dfrac{\widehat{AB}}{2}}$

2.º caso

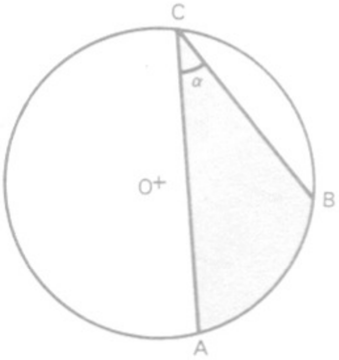


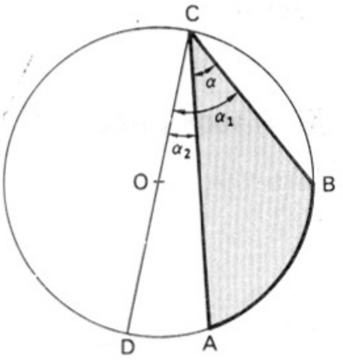


Traçando o diâmetro $\overline{CD}$, o ângulo AĈB fica dividido em dois, ∡ AĈD e ∡ DĈB, os quais têm um lado passando pelo centro, isto é, recaímos no primeiro caso. Então, temos:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\widehat{AD}}{2} \\ \alpha_2 &= \frac{\widehat{DB}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\widehat{AD}}{2} - \frac{\widehat{DB}}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}}$$

3.º caso



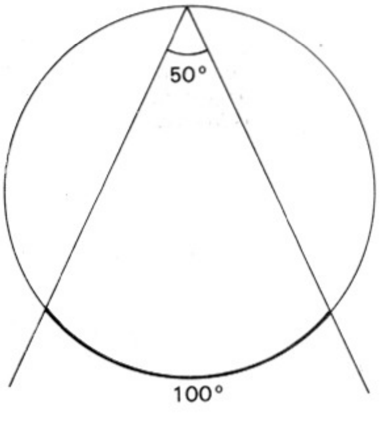


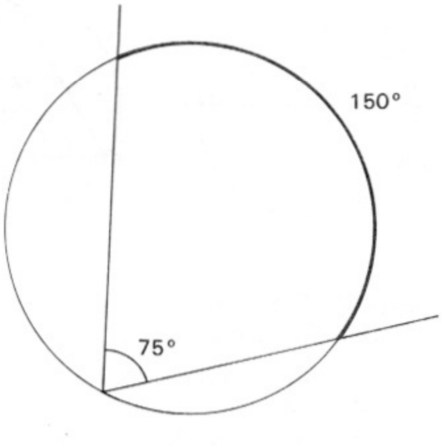
Traçando o diâmetro $\overline{CD}$ obtemos os ângulos BĈD e AĈD que têm um lado passando pelo centro. Dessa forma:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \alpha_2 &= \frac{\widehat{AD}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\widehat{BD}}{2} - \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}}$$

■ c.q.d.

Assim, por exemplo, se um ângulo inscrito enxergar um arco de 100°, ele medirá 50°, se enxergar um arco de 150°, medirá 75° e assim por diante.

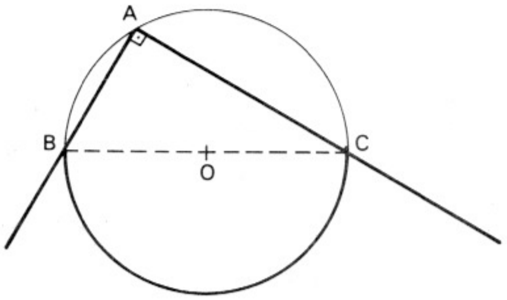




Ângulo inscrito numa semicircunferência

Uma situação particular muito importante é aquela em que o arco que o ângulo inscrito enxerga é uma semicircunferência. Nesse caso, diz-se também que o ângulo está inscrito numa semicircunferência.

Propriedade: Todo ângulo inscrito numa semicircunferência é **reto**.

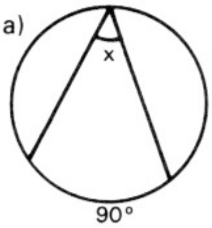


A justificativa é imediata, pois como $\overset{\frown}{BC} = 180°$ e $B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$, teremos $B\hat{A}C = 90°$.

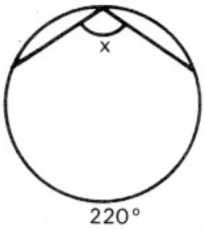
Exercícios

E10.**1** Nas figuras seguintes, dê o valor de **x**.

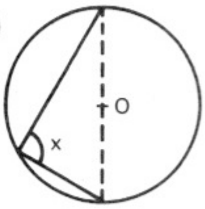
a)



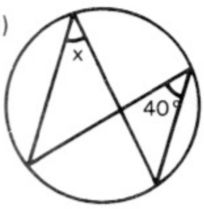
b)



c)

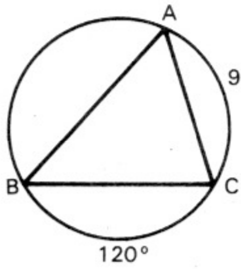


d)

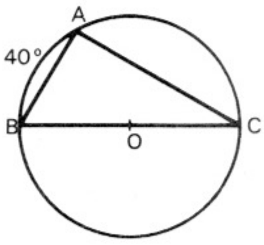


E10.**2** Calcule as medidas dos ângulos internos do triângulo ABC nos seguintes casos.

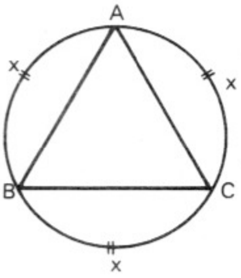
a)



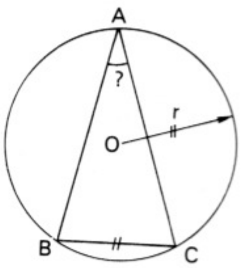
b)



c)



E10.**3** O lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC é congruente ao raio da circunferência circunscrita a esse triângulo. Calcule a medida do ângulo Â.

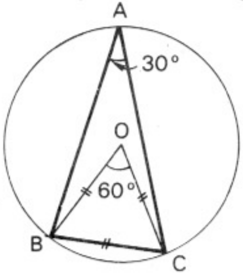


Resolução: Unindo B e C ao centro O da circunferência circunscrita, obtemos um triângulo OBC eqüilátero, pois BC = OB = OA. Então, o ângulo central $B\hat{O}C$ mede 60° e o arco $\overset{\frown}{BC}$ que ele enxerga também mede 60°.

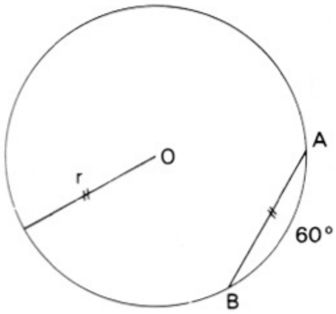
Logo, $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{60°}{2}$

$\therefore\ \hat{A} = 30°$

Resposta: Â = 30°



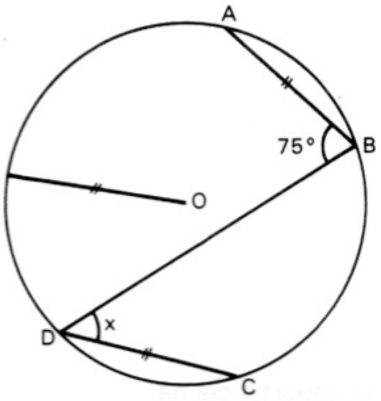
Observação: Note que se uma corda de circunferência é congruente ao raio, então suas extremidades determinam um arco de 60°.



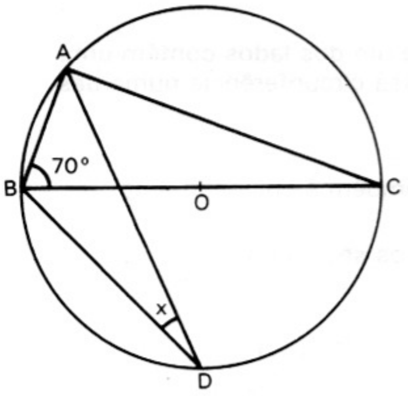
Se AB = r, então $\widehat{AB} = 60°$.

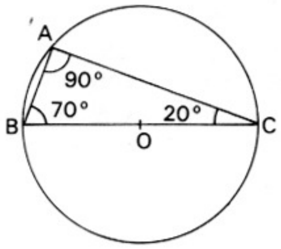
E10.**4** A base de um triângulo isósceles é congruente ao raio da circunferência circunscrita a esse triângulo. Calcule as medidas dos ângulos internos desse triângulo.

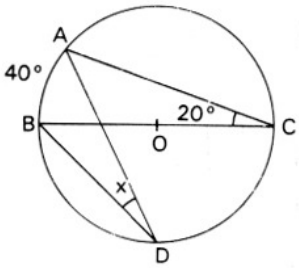
E10.**5** Na figura seguinte, os segmentos AB e CD são congruentes ao raio da circunferência. Calcule **x**.



E10.**6** Na figura seguinte, calcule **x**.







Resolução: Como $\overline{BC}$ é um diâmetro da circunferência, o ângulo $B\hat{A}C$ está inscrito na semicircunferência. Logo, no triângulo ABC temos:

$$\hat{A} = 90° \text{ e } \hat{B} = 70°$$

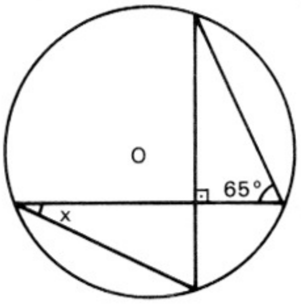
Portanto $\hat{C} = 20°$.

Mas o ângulo $A\hat{C}B$ está inscrito na circunferência e enxerga o arco $\widehat{AB}$. Assim, $\widehat{AB} = 40°$ e, portanto, $x = 20°$.

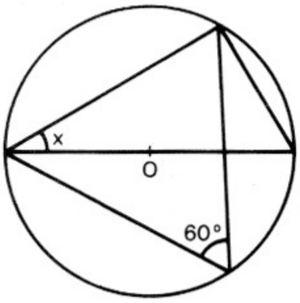
Resposta: $x = 20°$

E10.7 Calcule **x** nas seguintes figuras.

a)

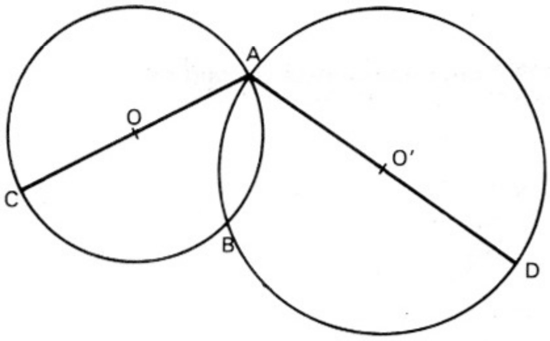


b)



E10.8 Na figura seguinte, $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ são diâmetros das circunferências. Demonstre que os pontos C, B e D estão alinhados.

Sugestão: Analise os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{B}D$.



Ângulo de segmento

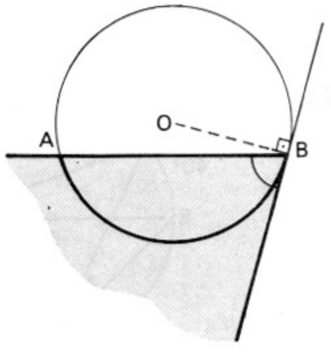
O ângulo que definiremos em seguida será de extrema importância na construção do próximo lugar geométrico que estudaremos.

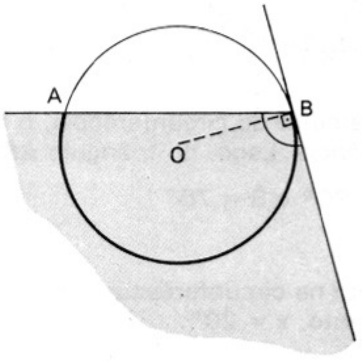
Definição

Chama-se **ângulo de segmento** todo ângulo em que um dos lados contém uma corda de uma circunferência e o outro tangencia essa circunferência numa das extremidades dessa corda.

O arco interceptado por um ângulo de segmento também é chamado arco **correspondente** a esse ângulo.

Exemplos de ângulos de segmento, destacando-se os seus arcos correspondentes:



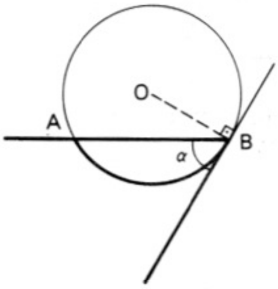


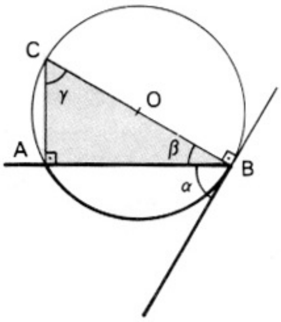
Teorema

A medida de um ângulo de segmento é igual à metade da medida do arco correspondente.

☐ **Demonstração**:

Na figura seguinte, queremos provar que $\alpha = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$.





Traçando o diâmetro $\overline{BC}$, obtemos um triângulo retângulo ABC, pois o ângulo $B\hat{A}C$ está inscrito numa semicircunferência. Fazendo nesse triângulo $\hat{B} = \beta$ e $\hat{C} = \gamma$, temos:

$$\beta + \gamma + 90° = 180° \Rightarrow \boxed{\beta + \gamma = 90°}$$

Como $\alpha + \beta = 90°$, temos $\alpha + \beta = \beta + \gamma$

$$\therefore \quad \boxed{\alpha = \gamma}$$

Mas, $\gamma = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$ (ângulo inscrito).

Logo, $\boxed{\alpha = \dfrac{\widehat{AB}}{2}}$

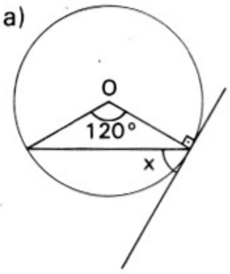
■ c.q.d

Evidentemente podemos dizer que o ângulo de segmento, assim como o inscrito, tem suas medidas iguais à metade do ângulo central correspondente ao mesmo arco.

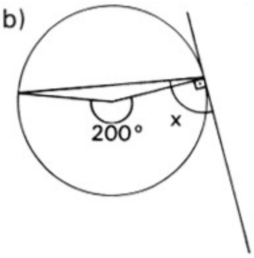
Exercício

E10. **9** Calcule **x** nas figuras seguintes.

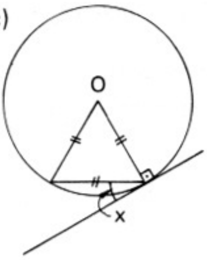
a)



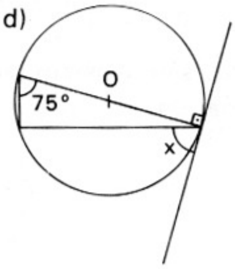
b)



c)



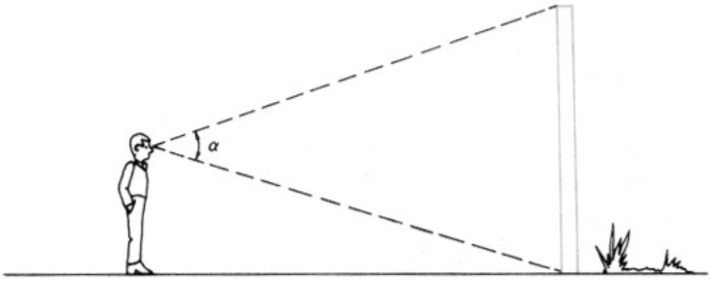
d)

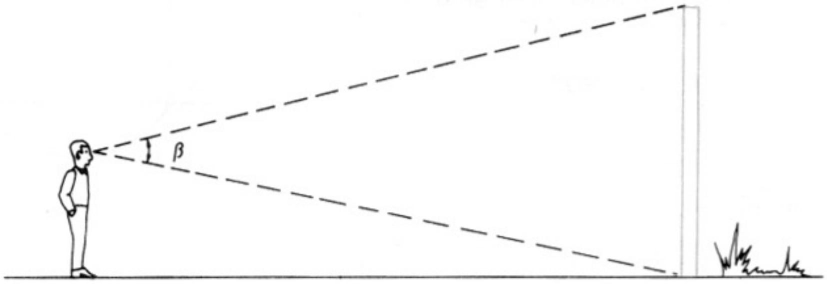


11

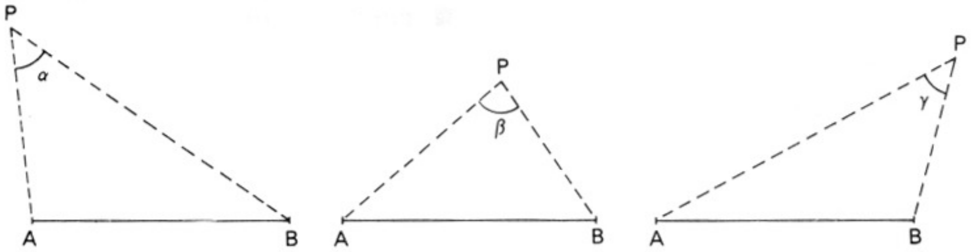
Arcos como lugares geométricos

Quando você olha para um poste na rua, você o vê segundo um certo ângulo. Esse ângulo pode variar em função da posição em que você o esteja olhando.





Fazendo uma analogia com essa situação, quando temos um segmento AB e um ponto P fora dele, dizemos que o ponto P enxerga o segmento segundo um certo ângulo.



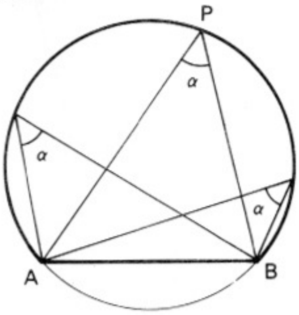
Observe que um segmento AB só pode ser visto por um ponto, segundo um ângulo cuja medida esteja compreendida entre 0° e 180°.

Agora reflita bem sobre as perguntas que serão feitas.

Dado um segmento AB, existe mais de um ponto que enxerga $\overline{AB}$ segundo um mesmo ângulo? Quantos?

As respostas a essas perguntas são: **existem infinitos pontos**.

Para justificá-las, basta imaginar um arco de circunferência que tenha extremidades nos pontos A e B.



Todo ponto P desse arco enxerga o segmento AB segundo um mesmo ângulo α, pois o ângulo $A\hat{P}B$ está inscrito na circunferência e tem o arco $\widehat{AB}$ como correspondente.

Logo, $A\hat{P}B = \dfrac{\widehat{AB}}{2}$.

Por essa razão, dizemos que arc $\widehat{APB}$ é um **arco capaz** do ângulo α.

Observação: Quando se diz que **todo** ponto do arco capaz enxerga $\overline{AB}$ segundo um mesmo ângulo α, pode surgir uma justa dúvida: os pontos A e B também enxergam $\overline{AB}$ segundo um ângulo α? Dizemos que os pontos A e B enxergam $\overline{AB}$ segundo qualquer ângulo. Assim, podemos também dizer que A e B enxergam $\overline{AB}$ segundo o ângulo α.

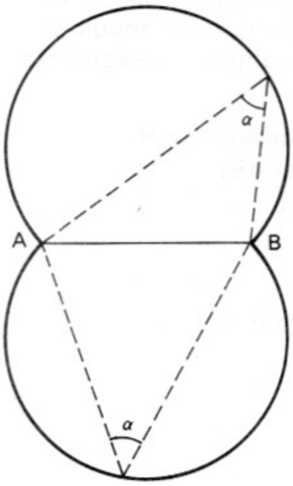
Agora, preste bastante atenção na seguinte pergunta:

Um arco capaz do ângulo α é um lugar geométrico de pontos que vêem um segmento segundo um mesmo ângulo α?

Para responder a essa pergunta, é necessário responder a outras duas.

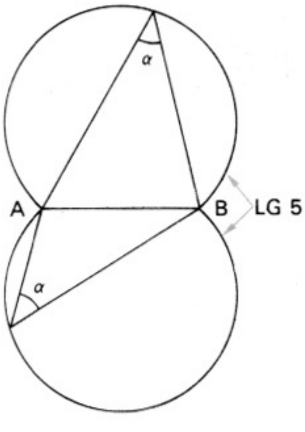
- Todo ponto desse arco capaz enxerga $\overline{AB}$ segundo o ângulo α?
- Somente os pontos desse arco capaz enxergam $\overline{AB}$ segundo o ângulo α?

A resposta à primeira pergunta é ''sim'', mas à segunda é ''não''. Isso porque há pontos do ''outro lado'' de $\overline{AB}$ que o enxergam segundo o ângulo α. Porém, esses pontos, por sua vez, constituem um segundo arco capaz, congruente ao primeiro. A reunião dos dois arcos constitui um lugar geométrico.



Estamos prontos para retomar as construções geométricas.

Arco capaz: LG 5



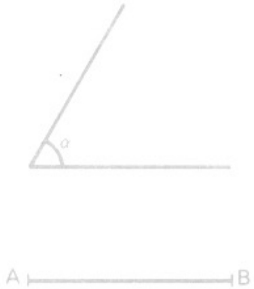
LG 5

O lugar geométrico dos pontos que enxergam um segmento AB segundo um ângulo de medida α constante é o par de **arcos capazes** do ângulo α descrito sobre $\overline{AB}$.

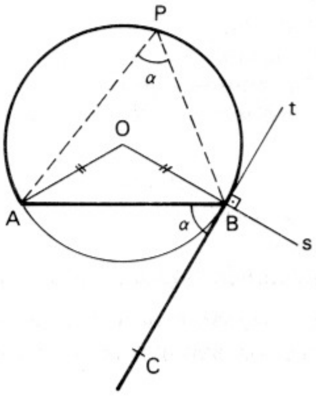
SEMPRE QUE UM PONTO PROCURADO ENXERGAR UM SEGMENTO DADO SEGUNDO UM ÂNGULO α, ESSE PONTO PERTENCERÁ A UM DOS ARCOS CAPAZES DO ÂNGULO α DESCRITOS SOBRE ESSE SEGMENTO.

Construção do arco capaz: LG 5

Sejam dados um segmento AB e um ângulo α. Vamos construir um arco capaz do ângulo α sobre $\overline{AB}$. Estando o primeiro construído, o outro, como veremos, é imediato.



Suposto resolvido



Resolução: É importante notar que o problema se resolve com a determinação do centro O do arco, pois em seguida tomamos $\overline{OA}$ ou $\overline{OB}$ como raios. Vamos supor o problema resolvido. A construção será feita em função do ângulo de segmento $A\hat{B}C$. Sendo **t** a reta que contém o lado $\overrightarrow{BC}$ do ângulo de segmento temos duas propriedades para o centro O:

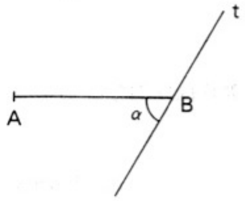
φ_1: O pertence à reta **s** perpendicular a **t** conduzida por B.
φ_2: O eqüidista de A e B (LG 2 — mediatriz de $\overline{AB}$)

Então, para construir o arco capaz, faz-se o seguinte:

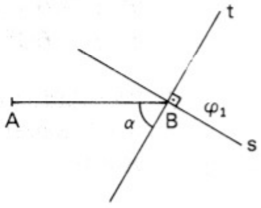
1.º) Por B, traça-se uma reta **t**, que faz o ângulo α com $\overline{AB}$.
2.º) Traça-se a reta **s** perpendicular a **t** em B.
3.º) Traça-se a mediatriz de $\overline{AB}$, que intercepta **s** no centro O.
4.º) Com centro em O e raio $\overline{OA}$, traça-se o arco capaz.

Evolução do traçado

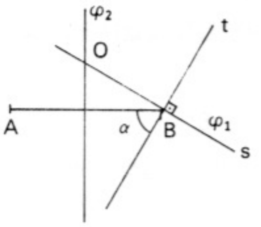
1.º passo

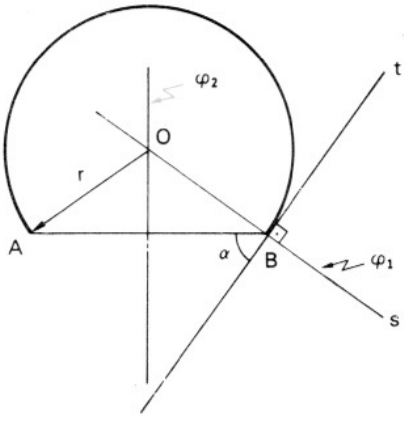


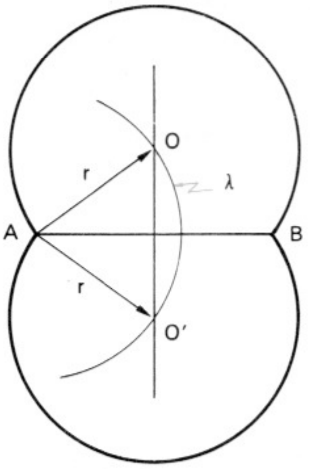
2.º passo



3.º passo



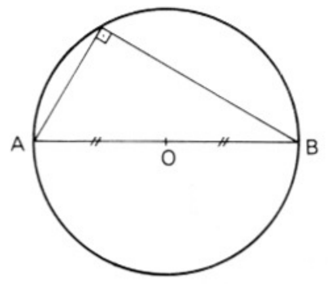




Uma vez construído o primeiro arco, para obter o centro O' do segundo, basta fazer centro em A e com o mesmo raio do primeiro arco traçar o arco de circunferência λ, o qual intercepta a **mediatriz** de $\overline{AB}$ em O'.

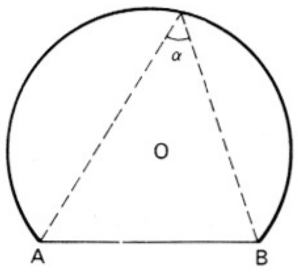
Arco capaz de 90°

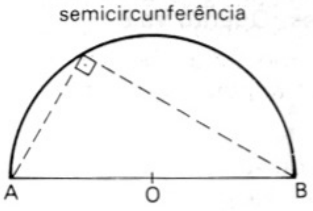
Um arco capaz de 90° é uma semicircunferência. Por essa razão, a sua construção é extremamente simples, pois o centro do arco é o ponto médio do segmento AB.

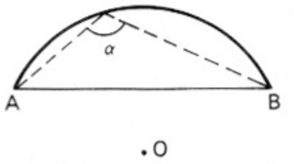


A circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ é a reunião dos dois arcos capazes de 90°.

Observação: Convém notar que para α **agudo** o arco capaz é maior que a semicircunferência; para α **reto** é a própria semicircunferência e para α obtuso é menor que a semicircunferência.





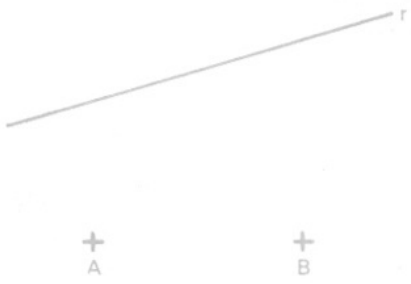


Exercícios

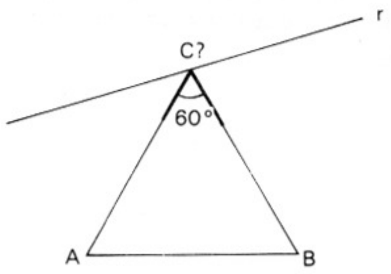
E11.1 **1** Construa o par de arcos capazes do ângulo α sobre o segmento AB nos seguintes casos (Use só régua e compasso!):

a) $\alpha = 30°$ e AB = 30 mm
b) $\alpha = 45°$ e AB = 30 mm
c) $\alpha = 60°$ e AB = 35 mm
d) $\alpha = 90°$ e AB = 30 mm
e) $\alpha = 120°$ e AB = 50 mm
f) $\alpha = 135°$ e AB = 50 mm

E11.2 **2** São dados dois pontos A e B e uma reta **r**. Construa um triângulo ABC, sabendo que C pertence à reta **r** e que $\hat{C} = 60°$.



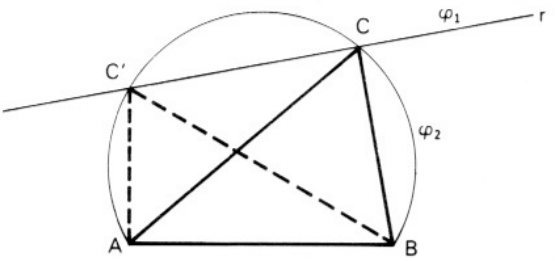
Suposto resolvido



Resolução: Para construir o triângulo só resta determinar o vértice C, para o qual temos duas propriedades:

φ_1: C pertence à reta **r**
φ_2: C enxerga $\overline{AB}$ segundo um ângulo de 60° (LG 5)

Encontramos C na intersecção da reta **r** com o arco capaz de 60° construído sobre $\overline{AB}$.

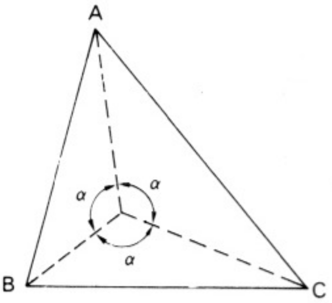


Pelas posições dos pontos B e C e da reta **r**, é evidente que não precisamos construir o segundo arco capaz.

E11.3 Construa um triângulo isósceles ABC, dados a base a = 32 mm e $\hat{A} = 45°$. Quanto vale o perímetro desse triângulo?

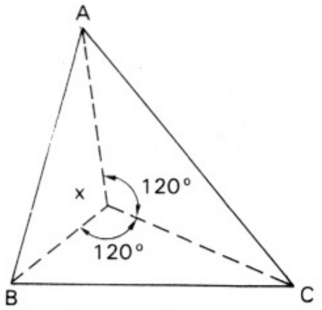
E11.4 Construa um triângulo ABC, dados a = 55 mm, $\hat{A} = 60°$ e sabendo que o vértice A pertence a uma reta paralela a $\overline{BC}$ e distante 37 mm desse lado. Qual é o perímetro desse triângulo?

E11.5 Construa um triângulo ABC, dados a = 60 mm, b = 70 mm e c = 55 mm. Determine um ponto X, no interior desse triângulo, que veja os três lados segundo ângulos congruentes. Quanto vale XA + XB + XC?



$$3\alpha = 360°$$

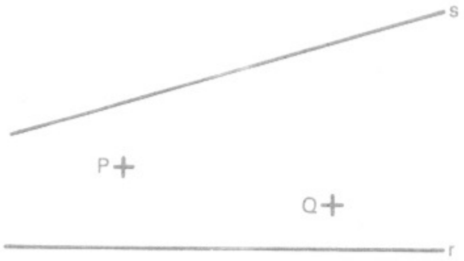
$$\boxed{\alpha = 120°}$$



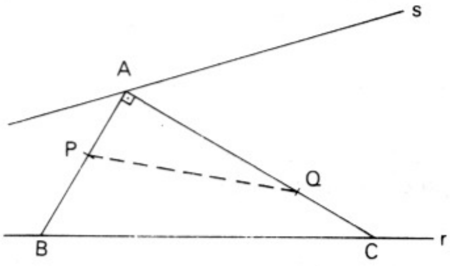
Sugestão: É fácil descobrir que X vê cada lado segundo um ângulo de 120°. Então, basta tomar, por exemplo, as seguintes propriedades para X:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: X vê } \overline{BC} \text{ segundo um ângulo de } 120° \\ \varphi_2\text{: X vê } \overline{AC} \text{ segundo um ângulo de } 120° \end{cases}$$

E11.6 São dados dois pontos P e Q e duas retas **r** e **s**. Construa um triângulo retângulo sabendo que a hipotenusa está contida na reta **r**, o vértice do ângulo reto pertence à reta **s** e que os pontos P e Q pertencem, cada um, a um dos catetos.

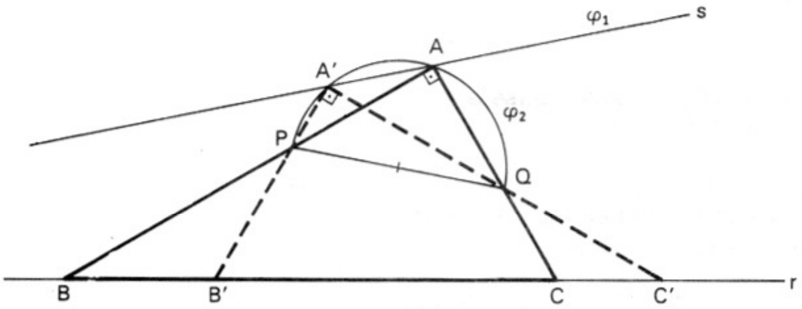


Suposto resolvido



Resolução: Seja ABC o triângulo procurado e A o vértice do ângulo reto. O problema se resolve com a determinação do ponto A, pois, em seguida, traçamos as retas por A e P e por A e Q, as quais determinam os vértices B e C em **r**. Mas, para A, conhecemos duas propriedades:

φ_1: A pertence à reta **s**
φ_2: A enxerga $\overline{PQ}$ segundo um ângulo reto (LG 5)



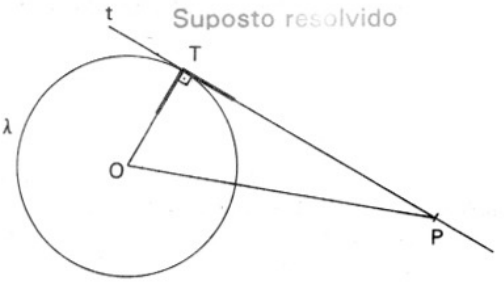
Resolva os exercícios de 51 a 58 do caderno de atividades.

Traçado de tangentes

O problema que vamos propor em seguida tem na sua resolução uma aplicação do arco capaz. É muito importante que você o aprenda bem, pois ele se apresenta freqüentemente nas construções geométricas.

Problema

São dados uma circunferência λ de centro O e um ponto P no exterior da mesma. Traçar por P uma reta tangente a λ.



Resolução: Vamos supor o problema resolvido e seja **t** a reta procurada. Como de **t** só conhecemos um ponto, precisamos de um segundo ponto para determiná-la. Seja, então, T o ponto onde a reta **t** tangencia a circunferência. Esse ponto é facilmente determinável, pois dele conhecemos duas propriedades:

φ_1: T pertence à circunferência λ
φ_2: T enxerga $\overline{QP}$ segundo um ângulo reto (LG 5)

Assim, para obter o ponto de tangência T, construímos os arcos capazes de 90° sobre o segmento OP, os quais interceptam λ no ponto T.

Arco capaz: LG 5

51 São dados um ângulo de medida α e um segmento AB. Construa o par de arcos capazes do ângulo de medida α sobre o segmento AB.

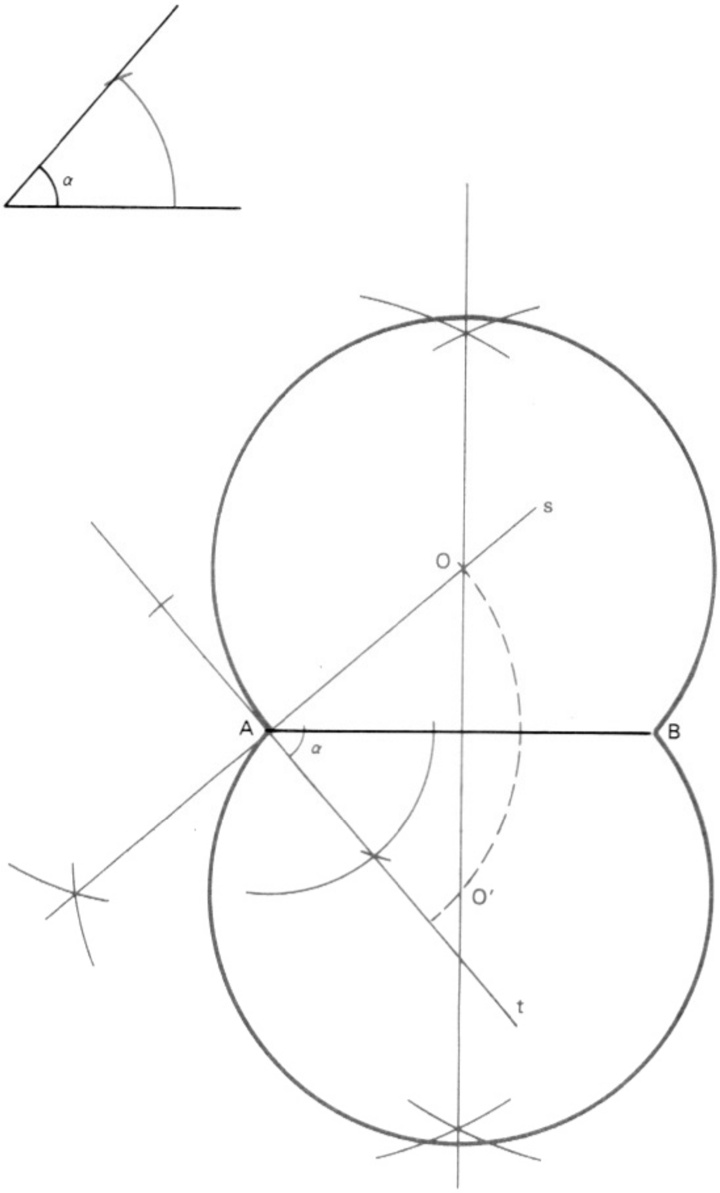


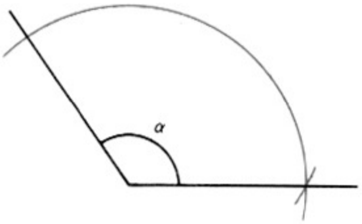
Figura auxiliar e anotações

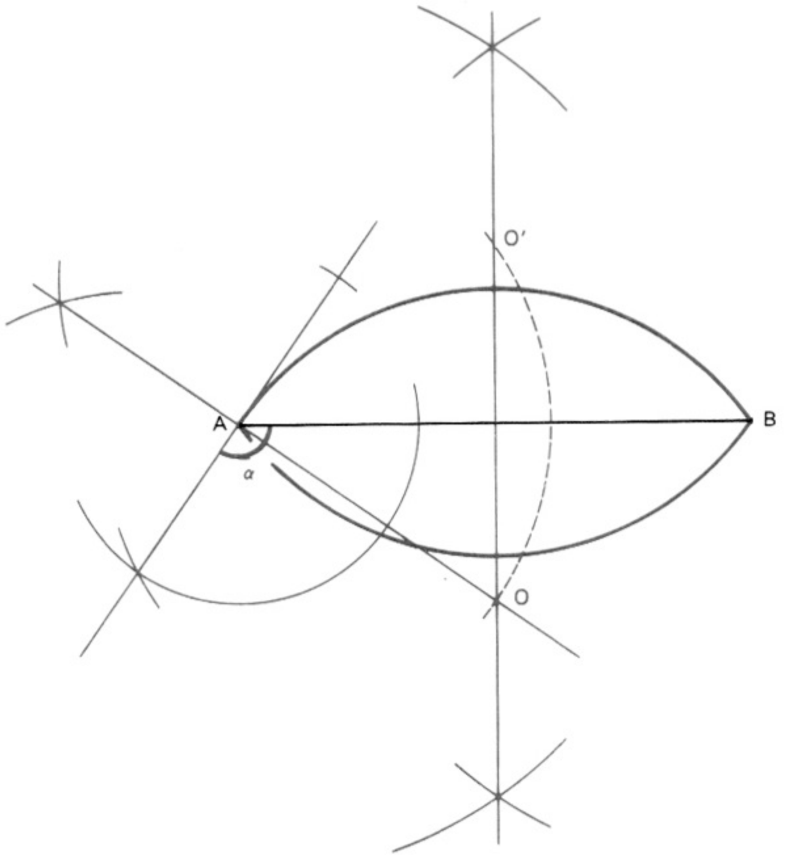
Observação:
Quando o aluno começa a aprender a construção do **arco capaz**, é comum ele ficar na dúvida se o centro O está na reta **s** (da figura) ou na **t**. Convém insistir que O é a intersecção da mediatriz de $\overline{AB}$ com a reta **s**.

Arco capaz: LG 5

Figura auxiliar e anotações

52 Construa o par de arcos capazes do ângulo α sobre o segmento AB.
Observação: Sempre que nos referirmos a um **ângulo** α, entenda como sendo **ângulo de medida** α.



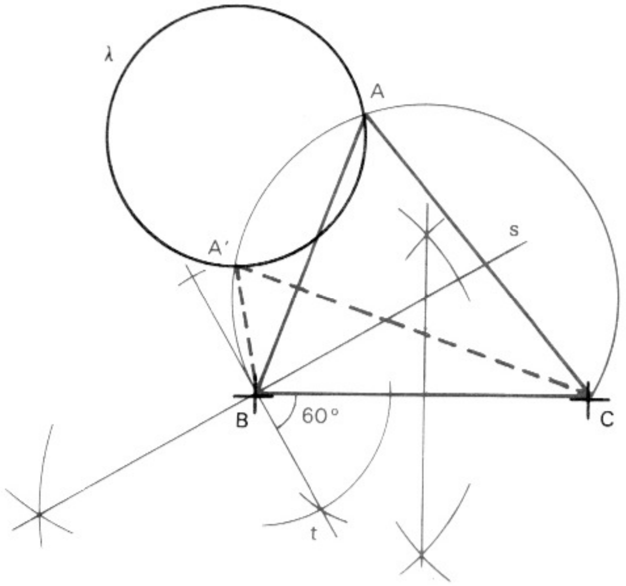


Arco capaz: LG 5

Figura auxiliar e anotações

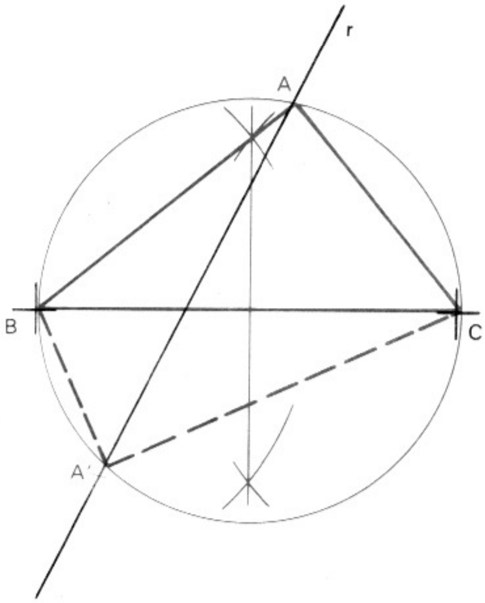
53 São dados dois pontos B e C e uma circunferência λ. Construa um triângulo ABC, sabendo que A pertence a λ e Â = 60°.

Observação:
Comente com o aluno que, quando o ângulo do arco capaz é um dos notáveis, pode-se traçar diretamente a reta **s** (da figura) sem ter que traçar a reta **t**, pois o ângulo que **s** faz com $\overline{BC}$ é conhecido (30°). Tais observações reforçam no aluno a conveniência de planejar as suas construções.



54 São dados dois pontos B e C e uma reta **r**. Construa um triângulo ABC retângulo, sabendo que A é o vértice do ângulo reto e pertence a **r**. Quantas soluções há?

Observação:
Uma vez que o arco capaz de 90° é muito usado, convém insistir que ele é sempre uma semicircunferência.



Soluções: triângulos ABC e A'BC.

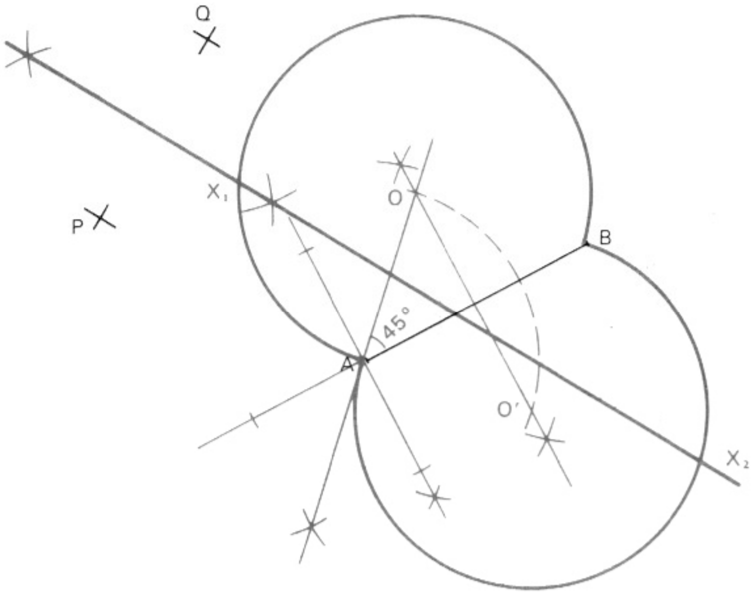
Arco capaz: LG 5

Figura auxiliar e anotações

55 São dados dois pontos P e Q e um segmento AB. Determine um ponto X eqüidistante de P e Q, sabendo que X enxerga $\overline{AB}$ segundo um ângulo de 45°. Quantas soluções há?

Observação:
Volte a insistir com o aluno que o LG 5, a exemplo do LG 3, deve no mínimo ser imaginado por completo, para que ele pressinta soluções a princípio inesperadas.

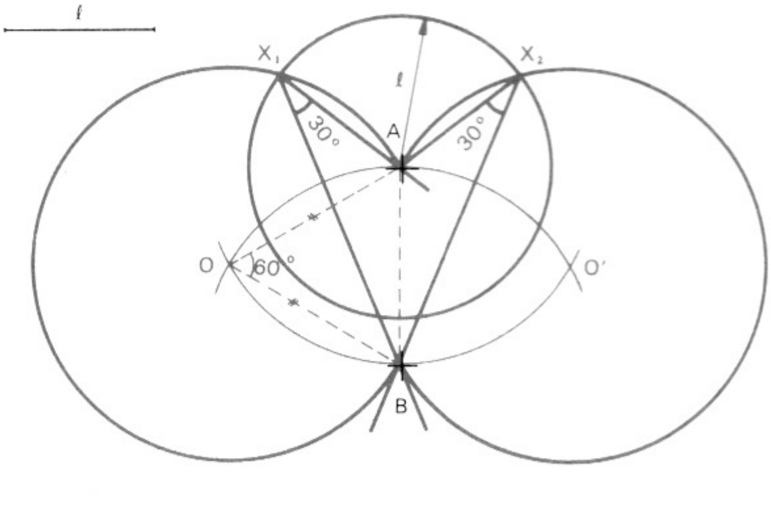
Sugestão:
Pergunte ao aluno se ele percebe que esse problema poderia ter até 4 soluções.



Soluções: X_1 e X_2.

56 Dados dois pontos A e B e uma distância ℓ, determine um ponto X distante ℓ de A, tal que $A\hat{X}B = 30°$. Quantas soluções há?

Observação:
Como o arco capaz de 30° também é freqüentemente usado, convém mostrar ao aluno que o ângulo central desse arco é de 60°. Assim, para determinar o centro O, basta construir um triângulo eqüilátero (OAB) de lado $\overline{AB}$.



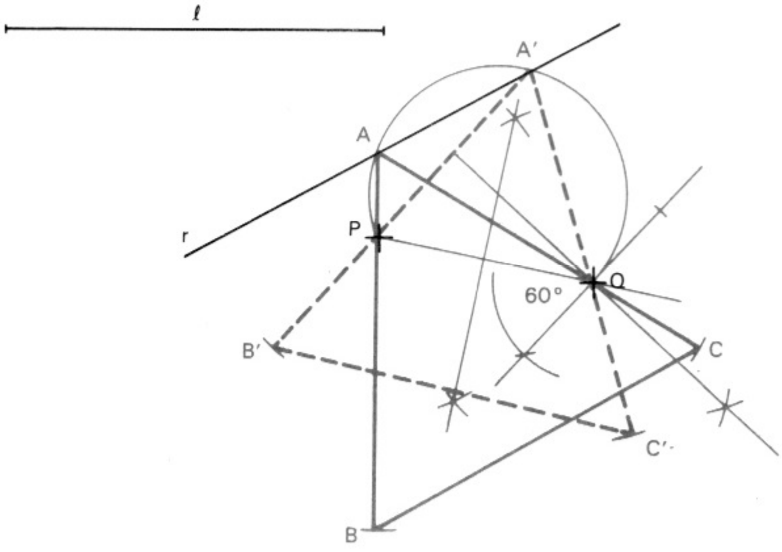
Soluções: X_1 e X_2.

Arco capaz: LG 5

Figura auxiliar e anotações

57 São dados dois pontos P e Q, uma reta **r** e uma distância ℓ. Construa um triângulo ABC eqüilátero de lado ℓ, sabendo que A pertence a **r**, P pertence a $\overline{AB}$ e Q pertence a $\overline{AC}$. Quantas soluções há?

Observação:
Conscientize o aluno de que cada vez mais se faz necessária a execução da figura auxiliar onde se supõe que o problema esteja resolvido. Um problema como esse dificilmente se resolve sem a figura auxiliar.

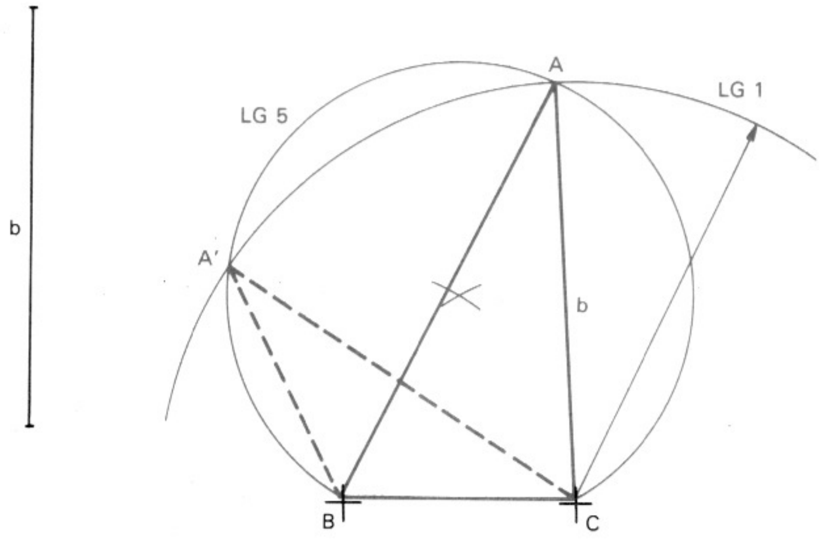


Soluções: triângulos ABC e A'B'C'.

58 Dados os vértices B e C, o lado **b** e Â = 30°, construa um triângulo ABC.

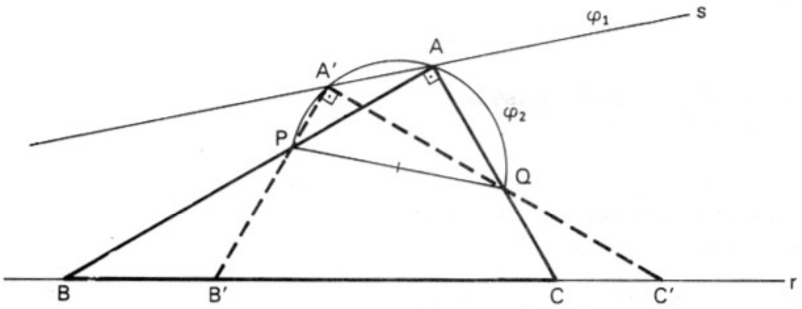
Sugestão: Você conhece duas propriedades para o vértice A.
φ_1: A enxerga $\overline{BC}$ segundo um ângulo de 30° (LG 5).
φ_2: A dista **b** de C (LG 1).

Sugestão:
Aproveite esse exercício para mostrar que "Lado, Lado, Ângulo" não é um critério de congruência de triângulos, de um modo geral, o sendo apenas quando o lado oposto ao ângulo dado for maior do que o lado dado.



Resolução: Seja ABC o triângulo procurado e A o vértice do ângulo reto. O problema se resolve com a determinação do ponto A, pois, em seguida, traçamos as retas por A e P e por A e Q, as quais determinam os vértices B e C em **r**. Mas, para A, conhecemos duas propriedades:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: A pertence à reta } \mathbf{s} \\ \varphi_2\text{: A enxerga } \overline{PQ} \text{ segundo um ângulo reto (LG 5)} \end{cases}$$



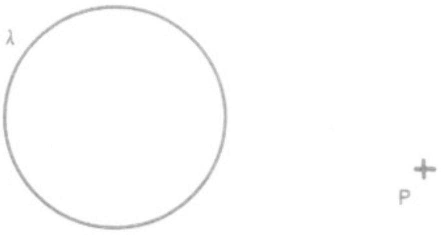
Resolva os exercícios de 51 a 58 do caderno de atividades.

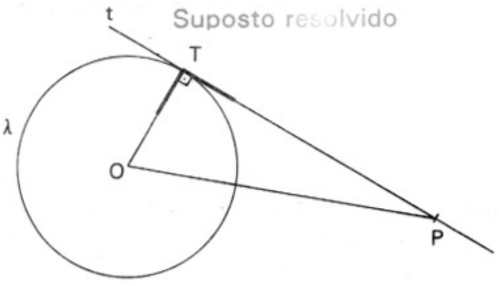
Traçado de tangentes

O problema que vamos propor em seguida tem na sua resolução uma aplicação do arco capaz. É muito importante que você o aprenda bem, pois ele se apresenta freqüentemente nas construções geométricas.

Problema

São dados uma circunferência λ de centro O e um ponto P no exterior da mesma. Traçar por P uma reta tangente a λ.

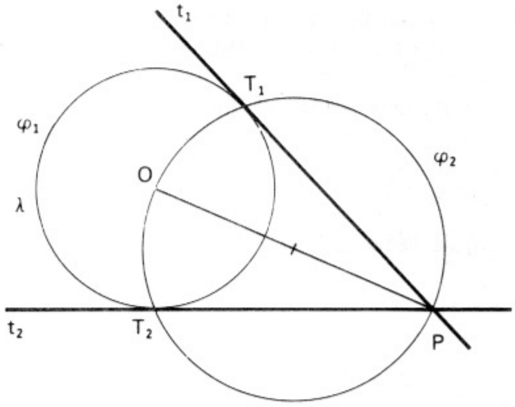




Resolução: Vamos supor o problema resolvido e seja **t** a reta procurada. Como de **t** só conhecemos um ponto, precisamos de um segundo ponto para determiná-la. Seja, então, T o ponto onde a reta **t** tangencia a circunferência. Esse ponto é facilmente determinável, pois dele conhecemos duas propriedades:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: T pertence à circunferência } \lambda \\ \varphi_2\text{: T enxerga } \overline{OP} \text{ segundo um ângulo reto (LG 5)} \end{cases}$$

Assim, para obter o ponto de tangência T, construímos os arcos capazes de 90° sobre o segmento OP, os quais interceptam λ no ponto T.



t_1
T_1
φ_1
φ_2
O
λ
t_2
T_2
P

Os segmentos PT_1 e PT_2 são chamados **segmentos das tangentes**.

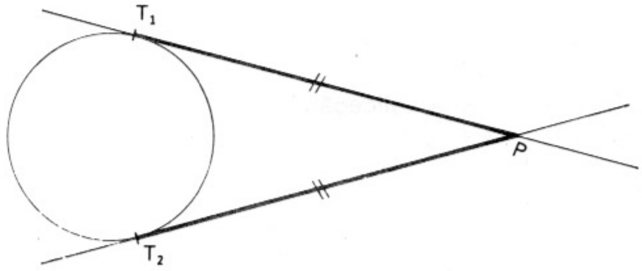
Observação: O problema sempre admite duas soluções: as retas t_1 e t_2.

Uma propriedade das tangentes

Pode ser útil, em algumas situações, conhecer o seguinte:

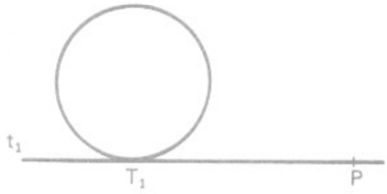
Propriedade

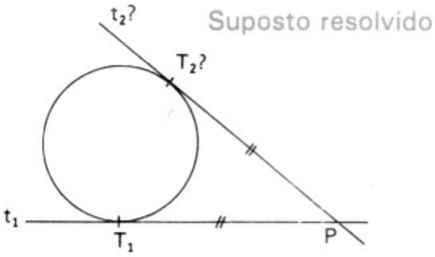
Os segmentos das tangentes a uma circunferência conduzidos por um mesmo ponto são congruentes.



$$\boxed{\overline{PT_1} \equiv \overline{PT_2}}$$

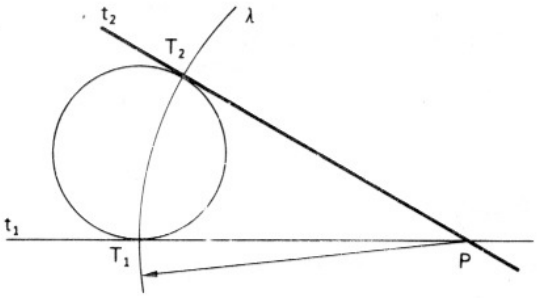
Essa propriedade pode ser utilizada na seguinte situação: suponha que você tenha uma reta t_1 tangente a uma circunferência em T_1 e que por um ponto P dessa reta você queira traçar uma segunda tangente t_2.





t_2?
Suposto resolvido
T_2?
t_1
T_1
P

Resolução: Ora, como $PT_1 = PT_2$, com centro em P e raio PT_1 você traça o arco de circunferência λ, o qual intercepta a circunferência no ponto onde t_2 a tangencia.

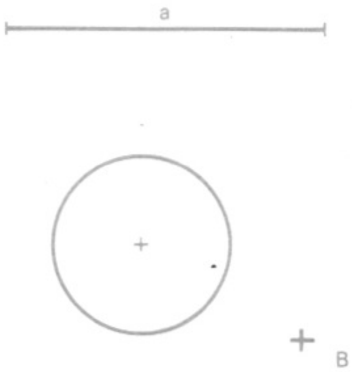


t_2
λ
T_2
t_1
T_1
P

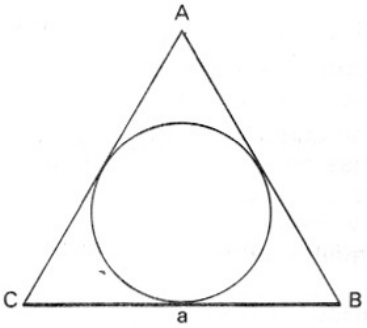
Exercícios

E11.**7** Trace um segmento AB com 75 mm. Com centro em A trace uma circunferência de raio r = 45 mm. Agora, construa as retas que passam por B e tangenciam a circunferência. Sendo T um dos pontos de tangência, quanto mede o segmento de tangente BT?

E11.**8** Construa um triângulo ABC, dados o vértice B, a circunferência inscrita e o lado **a**.



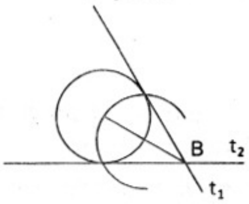
Suposto resolvido



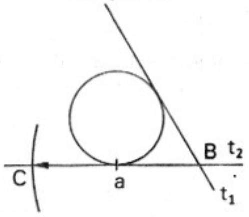
Resolução: Por B traçamos as tangentes t_1 e t_2. Seja t_1 a reta que contém A, e t_2 a que contém C. Então, podemos determinar C, pois conhecemos **a**. Finalmente, por C, traçamos a tangente t_3, a qual intercepta t_1 em A.

Evolução do traçado

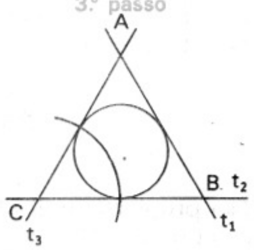
1.º passo



2.º passo



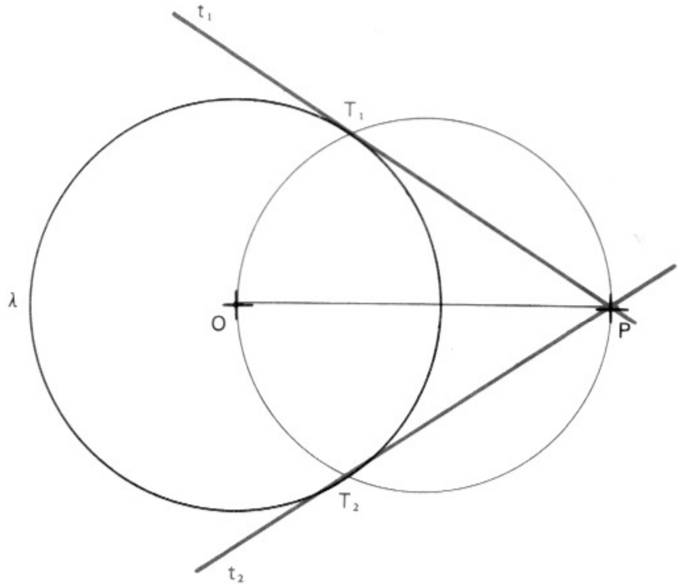
3.º passo



Resolva os exercícios de 59 a 62 do caderno de atividades.

Traçado de tangentes

59 São dados um ponto P e uma circunferência λ. Trace por P as retas tangentes a λ.



60 São dados dois pontos O e P e uma distância ℓ. Conduza uma reta por P que diste ℓ de O.

Sugestão: Esse problema recai diretamente no anterior.

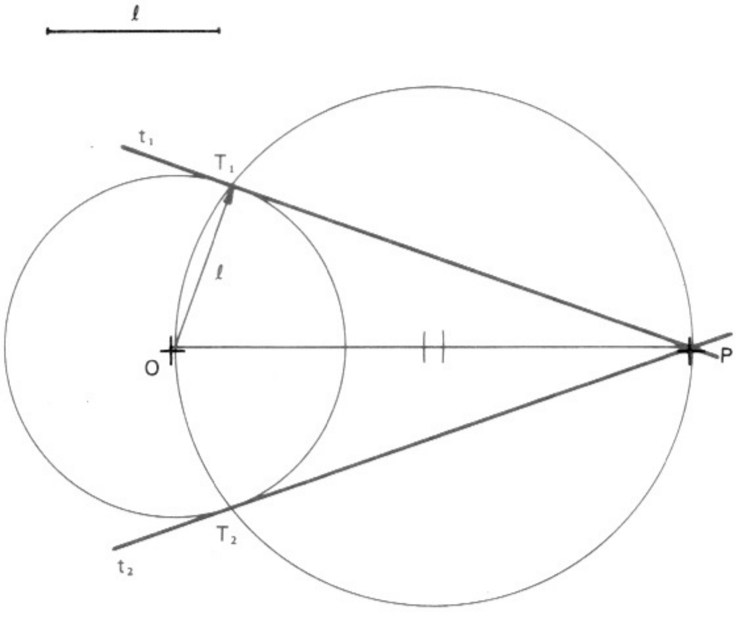


Figura auxiliar e anotações

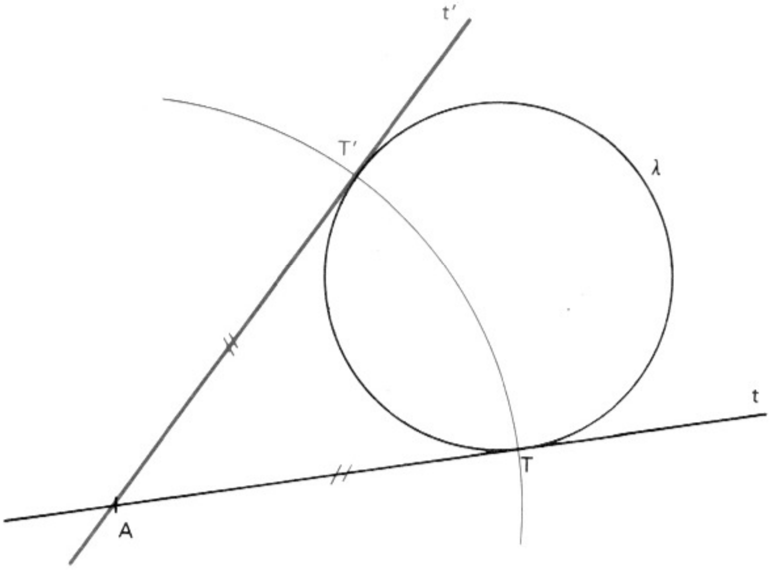
Observação:
Enfatize a importância dessa construção. Conscientize o aluno de que freqüentemente ele terá que empregá-la como um mero detalhe dentro de um problema maior.

Sugestão:
Proponha esse mesmo problema supondo o centro desconhecido, para obrigar o aluno a primeiramente determinar o centro.

Observação:
Convém, sempre que a situação se apresentar, lembrar ao aluno que a distância de um ponto a uma reta é medida num segmento perpendicular à reta.

Traçado de tangentes

61 São dados uma reta **t** tangente a uma circunferência λ, o ponto T de tangência e um ponto A sobre **t**. Trace por A a segunda tangente a λ, sem usar arco capaz.



62 De um triângulo ABC são dadas a reta **t**, que tangencia a circunferência inscrita, o ponto T de tangência, os vértices B e C e o raio **r** da circunferência inscrita. Construa o triângulo.

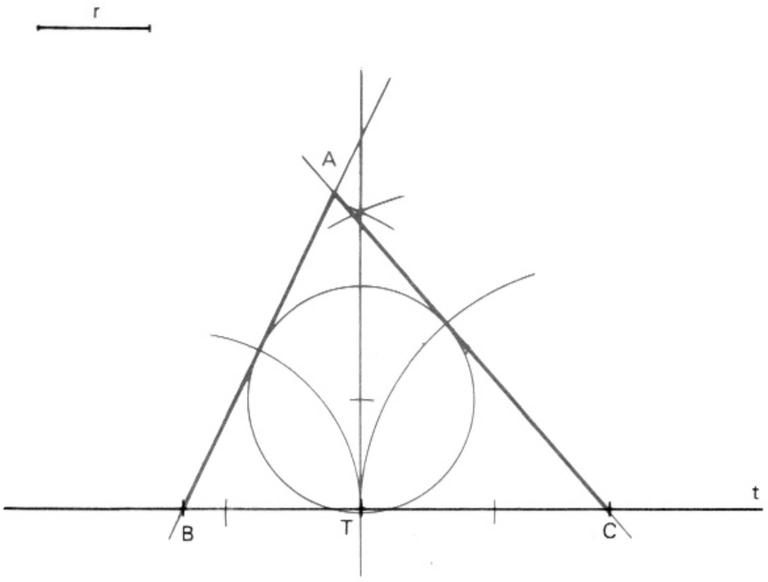


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Insista na propriedade que garante que os segmentos das tangentes são congruentes ($\overline{AT} \equiv \overline{AT'}$). No próximo exercício o aluno já terá a oportunidade de verificar como, às vezes, essa propriedade reduz bastante o seu trabalho.

12

Razão e proporção

Uma futura mamãe, durante o período de gravidez, fica, repentinamente, com vontade de comer torta de ameixas e amêndoas. Ela se dispõe a fazer o doce, seguindo esta receita:

Ingredientes: 250 g de açúcar
300 g de ameixas
300 g de amêndoas
10 ovos
500 g de *chantilly*

Modo de preparar: Bata primeiramente cinco gemas com o açúcar... (O modo de preparo será omitido, pois não se trata da ''especialidade'' deste livro.)

A futura mamãe, porém, defronta-se com um probleminha. Embora disponha de todos os ingredientes, tem apenas dois ovos, isto é, **a quinta parte** do que é exigido na receita. Como a vontade de comer a torta é incontrolável, ela resolve prepará-la assim mesmo. Evidentemente, para isso, é necessário reduzir também os demais ingredientes **à quinta parte**.

	Açúcar	Ameixas	Amêndoas	Ovos	Chantilly
Disponível	50 g	60 g	60 g	2	100 g
Exigido	250 g	300 g	300 g	10	500 g

Pois bem, as seqüências de medidas dos ingredientes disponíveis e dos exigidos constituem um exemplo do que chamamos proporcionalidade. Pode-se expressar essa idéia a partir de uma série de frações equivalentes:

$$\frac{50}{250} = \frac{60}{300} = \frac{60}{300} = \frac{2}{10} = \frac{100}{500} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

Você observa que as frações constituídas pelas medidas dos mesmos ingredientes representam apenas formas diferentes de expressar o número $\frac{1}{5}$. Como todas as frações têm o mesmo valor, dizemos que elas são constantes.

O valor $\frac{1}{5}$ é chamado **constante de proporcionalidade**.

Deixando ''as doçuras'' de lado, vamos apresentar alguns conceitos sobre a proporcionalidade, os quais serão muito aplicados em Desenho Geométrico.

O conceito de razão

Definição

Chama-se **razão** entre dois números reais, **a** e **b**, não-nulos, o número real $\frac{a}{b}$.

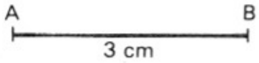
Assim, a razão entre os números 12 e 8 é o número $\frac{12}{8}$, isto é, $\frac{3}{2}$; entre os números -15 e 20 é $\frac{-15}{20}$, ou seja, $\frac{-3}{4}$ ou $-\frac{3}{4}$, e assim por diante.

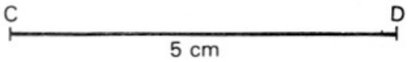
É muito freqüente trabalharmos com razões de elementos de mesma natureza geométrica (razão entre segmentos, entre ângulos, entre áreas etc.).

A razão entre dois elementos geométricos de mesma natureza deve ser entendida como a razão entre **os números** que expressam as medidas desses elementos numa **mesma unidade**.

Exemplo 1

Razão entre os segmentos AB e CD.

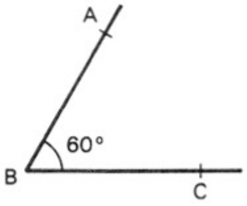


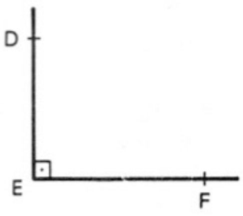


$$\boxed{\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}}$$

Exemplo 2

Razão entre os ângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$.





$$\boxed{\frac{A\hat{B}C}{D\hat{E}F} = \frac{60}{90} = \frac{3}{5}}$$

O conceito de proporção

Definição

Se a razão entre os números **a** e **b** é igual à razão entre os números **m** e **n**, dizemos que **a** e **b** são **proporcionais** a **m** e **n**.

Uma igualdade entre duas razões é chamada **proporção**: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

Exemplos:

$$\underset{\frac{1}{2}}{\underset{\uparrow}{\frac{3}{6}}} = \underset{\frac{1}{2}}{\underset{\uparrow}{\frac{4}{8}}} \qquad \underset{\frac{2}{3}}{\underset{\uparrow}{\frac{10}{15}}} = \underset{\frac{2}{3}}{\underset{\uparrow}{\frac{14}{21}}} \qquad \underset{\frac{13}{2}}{\underset{\uparrow}{\frac{13}{2}}} = \underset{\frac{13}{2}}{\underset{\uparrow}{\frac{39}{6}}}$$

A proporção $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ também pode ser escrita na forma $\boxed{a : b :: m : n}$ que deve ser lida: **a** *está para* **b** *assim como* **m** *está para* **n**.

Nessa proporção, os termos **a** e **n** são chamados **extremos** e os termos **b** e **m** são chamados **meios**.

$$\underbrace{a : \overbrace{b :: m}^{\text{meios}} : n}_{\text{extremos}}$$

Propriedades

Entre as muitas propriedades de uma proporção, as que mais freqüentemente usaremos são:

1.ª) **O produto dos extremos é igual ao produto dos meios.**

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow a \cdot n = b \cdot m}$$

Esta propriedade é a famosa multiplicação em cruz:

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{9} \Leftrightarrow 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$$

2.ª) **A troca dos meios não altera a proporcionalidade.**

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{a}{m} = \frac{b}{n}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

3.ª) **A troca dos extremos não altera a proporcionalidade.**

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow \frac{n}{b} = \frac{m}{a}}$$

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$

A primeira propriedade é bastante útil para verificar a proporcionalidade entre duas razões, principalmente quando não a percebemos de imediato.

Exemplo: Verificar se 4 e 5 são proporcionais a 34 e $\frac{85}{2}$.

Resolução:

$$\frac{4}{5} \overset{?}{=} \frac{34}{\frac{85}{2}} \quad \begin{cases} \text{produto dos extremos: } 4 \times \frac{85}{2} = 170 \\ \text{produto dos meios: } 5 \times 34 = 170 \end{cases}$$

Resposta: 4 e 5 são proporcionais a 34 e $\frac{85}{2}$.

Seqüências proporcionais

Definição

As seqüências de números reais, não-nulos (a, b, c, ...) e (m, n, p, ...) são proporcionais se $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = \ldots$

Exemplo:

(4, 6, 8, 10) e (6, 9, 12, 15) são seqüências proporcionais, pois $\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Lembre-se: $\frac{2}{3}$ é a **constante de proporcionalidade.**

Consideremos, então, as seqüências de números proporcionais (a, b, c, ...) e (m, n, p, ...) e seja **k** a constante de proporcionalidade, isto é:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = \ldots = k$$

Daí decorre que:

$$\frac{a}{m} = k \Rightarrow a = k \cdot m$$

$$\frac{b}{n} = k \Rightarrow b = k \cdot n$$

$$\frac{c}{p} = k \Rightarrow c = k \cdot p$$

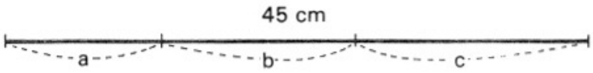
etc.

Estas últimas igualdades podem ser interpretadas assim:

> Se a, b, c,... são proporcionais a m, n, p,... , então:
> $a = k \cdot m,\ b = k \cdot n,\ c = k \cdot p, \ldots$

Essa forma de interpretar seqüências de números proporcionais pode ser bastante útil nas resoluções algébricas de problemas.

Exemplo: Dividir um segmento de 45 cm em partes proporcionais a 2, 3 e 4.



Resolução: Sejam **a, b** e **c** as partes procuradas. Então, podemos escrever:

$$a = 2k, \quad b = 3k \quad \text{e} \quad c = 4k$$

$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k$

Como $a + b + c = 45$, temos:

$$2k + 3k + 4k = 45$$
$$9k = 45$$
$$\boxed{k = 5}$$

Assim:

$$a = 2k \qquad b = 3k \qquad c = 4k$$
$$a = 10 \qquad b = 15 \qquad c = 20$$

Resposta: 10 cm, 15 cm e 20 cm

Exercícios

E12.**1** Verifique se **a** e **b** são proporcionais a **m** e **n** nos seguintes casos:

a) $a = 4$, $b = 6$, $m = 12$ e $n = 18$

b) $a = 3$, $b = 2$, $m = -9$ e $n = 6$

c) $a = 5$, $b = 4$, $m = \frac{15}{2}$ e $n = 6$

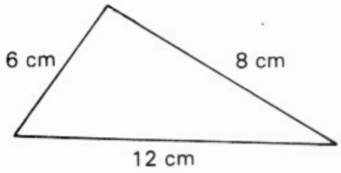
E12.**2** Verifique se as seqüências seguintes são ou não proporcionais. Em caso afirmativo, dê o valor da constante **k** de proporcionalidade.

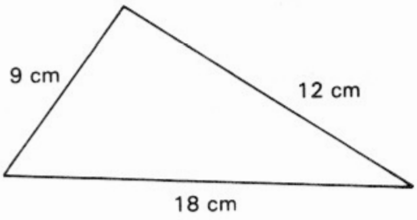
a) (4, 10, 12) e (6, 15, 18)

b) (3, 8, 10) e (9, 16, 30)

c) (10, 30, 50, 70) e (6, 18, 30, 42)

E12.**3** Os lados dos triângulos seguintes são proporcionais? Se forem, qual o valor da constante de proporcionalidade?





E12.**4** Dividindo um segmento de reta de 66 cm em partes **a**, **b** e **c** proporcionais a 2, 4 e 5, que valores teremos para **a**, **b** e **c**?

E12.**5** O perímetro de um triângulo é igual a 38 cm. Calcule as medidas de seus lados, sabendo que elas são proporcionais a 5, 6 e 8.

E12.**6** As medidas dos ângulos internos de um triângulo são proporcionais a 2, 3 e 4. Calcule essas medidas.

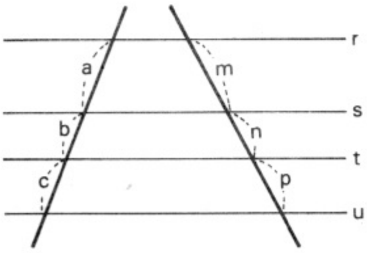
E12.**7** Uma circunferência é dividida em quatro arcos proporcionais a 3, 4, 5 e 6. Calcule as medidas desses arcos, em graus.

Teorema de Tales

Teorema

Um feixe de retas paralelas determina sobre duas ou mais transversais quaisquer segmentos de uma proporcionais aos segmentos correspondentes nas outras.

$$\boxed{\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}}$$



Assim, o teorema de Tales garante que os segmentos **a**, **b** e **c** são proporcionais aos segmentos **m**, **n** e **p** na figura acima, desde que as retas **r**, **s**, **t** e **u** sejam paralelas.

Convém notar que podemos ter variações na forma de montar as proporções. Observe algumas, acompanhando os resultados na figura.

Já que $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$, trocando os meios, $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.

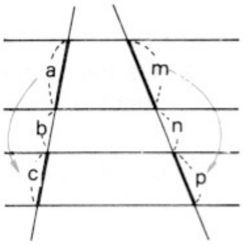
Como $\frac{b}{n} = \frac{c}{p}$, trocando os extremos $\frac{p}{n} = \frac{c}{b}$, e assim por diante.

É bom insistir para que você acompanhe essas duas últimas proporções, analisando-as na figura. Você percebeu a "lei" que permite armar as proporções?

É simples. Escreve-se a razão entre dois segmentos de uma das transversais. Por exemplo: $\frac{a}{c}$. Agora, olha-se para a outra transversal e escreve-se a razão entre os segmentos que correspondem a esses dois, na mesma ordem: $\frac{m}{p}$.

Pronto: a proporção fica assim:

$$\frac{a}{c} = \frac{m}{p}$$



Teremos várias oportunidades para aplicar o teorema de Tales nos problemas de construções geométricas. Antes, porém, vamos exercitar um pouco para que ele nos fique bem familiar.

Exercícios

E12. **8** Complete as proporções referentes à figura dada, onde r_1, r_2, r_3, r_4 e r_5 são paralelas.

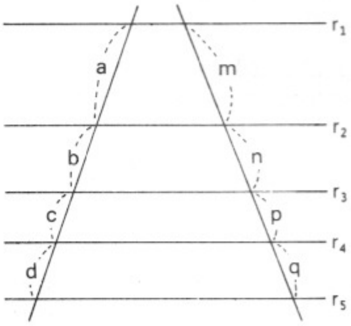
a) $\frac{a}{b} = \frac{?}{?}$

b) $\frac{d}{a} = \frac{?}{?}$

c) $\frac{n}{p} = \frac{?}{?}$

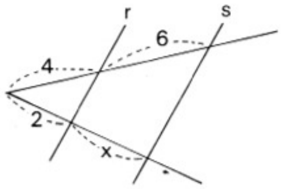
d) $\frac{p}{m} = \frac{?}{?}$

e) $\frac{a + b}{d} = \frac{?}{?}$



Observe que o correspondente de a + b na outra transversal é m + n.

E12.9 Determine **x** na figura seguinte.



Resolução: $\frac{x}{2} = \frac{6}{4} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 6}{4}$

$$\boxed{x = 3}$$

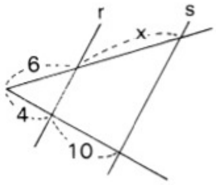
Observe que também podemos escrever:

$\frac{x}{6} = \frac{2}{4}$ ou $\frac{4}{2} = \frac{6}{x}$

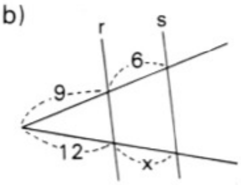
Resposta: x = 3

E12.10 Calcule **x** nas figuras seguintes, onde se tem r // s.

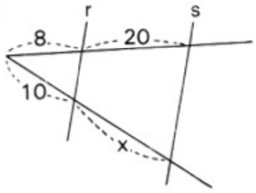
a)



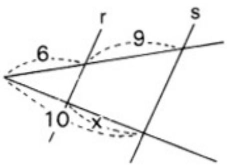
b)



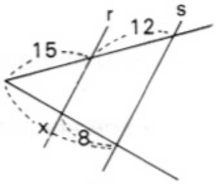
c)



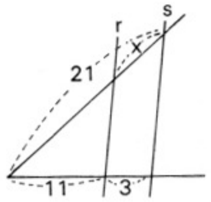
d)



e)



f)

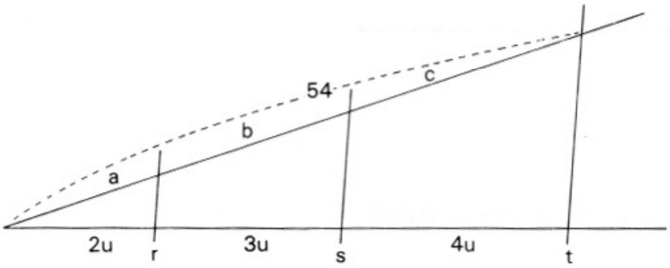


E12.11 Num triângulo ABC, sabe-se que AB = 25 e AC = 20. Uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ corta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CA}$ nos pontos D e E, respectivamente. Se AD = 15, calcule EC.

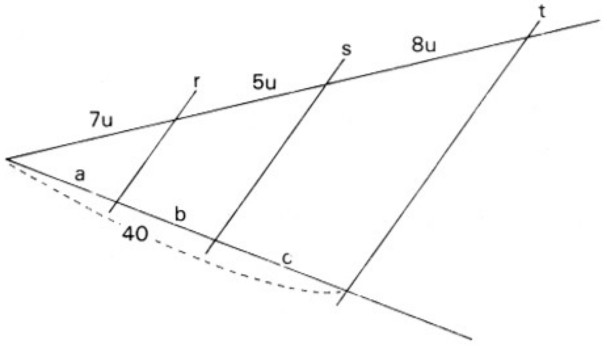
E12.12 Na figura seguinte, calcule **a**, **b**, e **c** sabendo que **r**, **s** e **t** são paralelas.

Sugestão: Os segmentos indicados por 2u, 3u, 4u são proporcionais a 2, 3 e 4. Então, pelo teorema de Tales, **a**, **b** e **c** também são proporcionais a 2, 3 e 4. Assim, podemos escrever:

a = 2k, b = 3k e c = 4k


54
c
b
a
2u
r
3u
s
4u
t

E12.13 Na figura seguinte, calcule **a**, **b** e **c**, sabendo que **r**, **s** e **t** são paralelas.


t
s
8u
r
5u
7u
a
b
40
c

13

Divisão gráfica de segmentos

Vamos retomar o desenho de precisão, agora com uma novidade: será permitido o uso do esquadro para o traçado de paralelas. Isso porque as técnicas de construções que iremos estudar ''abusarão do direito'' de traçar paralelas e com o uso do esquadro ganharemos um bom tempo nessas construções. Porém, cuidado! Não será permitido fazer determinados tipos de contas com os dados dos problemas. Por exemplo:

Sejam os segmentos a = 2 cm, b = 3 cm e c = 4 cm. Determinar um segmento **x**, tal que:

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$$

Algebricamente, faríamos:

$$\frac{x}{2} = \frac{3}{4}$$

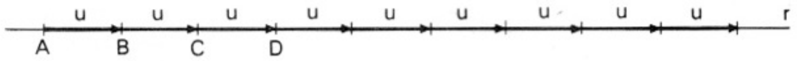
$$x = \frac{2 \cdot 3}{4}$$

$$x = 1{,}5$$

É exatamente isso o que não podemos fazer. Um pouco adiante, estudaremos como obter **x** por processos gráficos.

Vale ainda reforçar que a escala da régua continuará sendo usada apenas para colocar dados no papel e para medir possíveis respostas.

Freqüentemente você será obrigado a ''adotar uma unidade **u** arbitrária de comprimento''. Como se faz isso? Sobre uma reta **r**, toma-se um ponto A. Com centro em A e raio arbitrário **u**, traça-se um arquinho, o qual intercepta **r** em B. Com centro em B e raio **u**, traça-se outro arquinho, o qual intercepta **r** em C; e assim por diante.



Divisão de segmentos em partes proporcionais

Problema

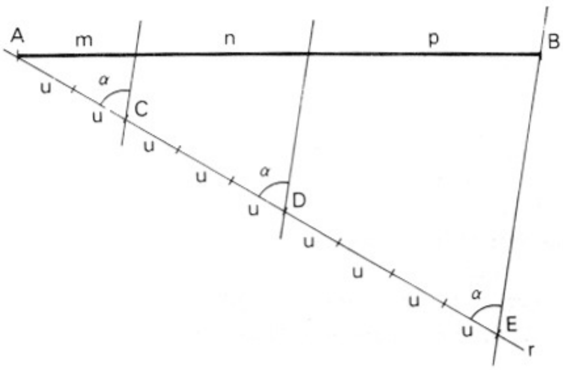
Dividir um segmento AB em partes proporcionais a 2, 3 e 4.

Resolução:

1.º) Traça-se uma reta **r** qualquer passando por uma das extremidades de $\overline{AB}$ (por exemplo, por A).

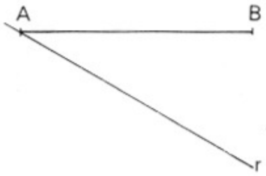
2.º) Adota-se uma unidade **u**, arbitrária e conveniente, e marcam-se, sobre **r**, os segmentos AC = 2u, CD = 3u e DE = 4u.

3.º) Traça-se a reta BE, e por C e D as paralelas a ela, as quais interceptam $\overline{AB}$ nos pontos que o dividem nas partes desejadas.

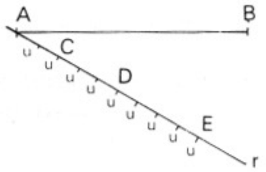


Evolução do traçado

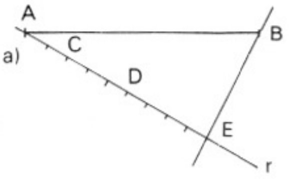
1.º passo

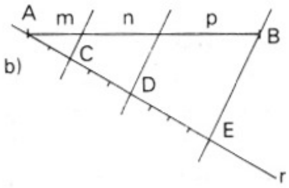


2.º passo



3.º passo

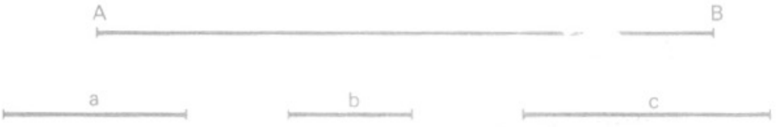




Justificativa: Como $\overline{AC}$, $\overline{CE}$ e $\overline{DE}$ são proporcionais a 2, 3 e 4, pelo teorema de Tales **m**, **n** e **p** também são proporcionais a 2, 3 e 4.

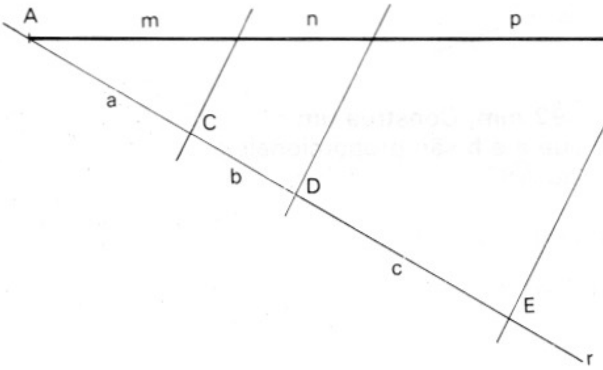
Problema

Dividir um segmento AB em partes proporcionais aos segmentos **a**, **b** e **c** dados.



Resolução: Este problema é idêntico ao anterior, apenas tomamos sobre a reta **r** os segmentos AC = a, CD = b e DE = c.

Caso estivesse vetado o uso do esquadro, poder-se-ia traçar as paralelas a $\overline{BE}$ pelo transporte do ângulo α.



Há outros processos para resolver esses problemas, mas o apresentado é o mais usado.

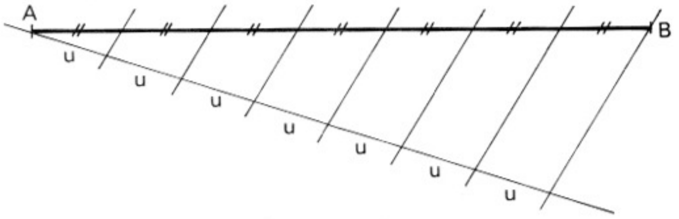
Exercícios

E13. **1** Divida um segmento de 11 cm em partes proporcionais a 1, 2 e 3.

E13. **2** São dados um segmento AB com 115 cm e os segmentos a = 27 mm, b = 33 mm e c = 48 mm. Divida $\overline{AB}$ em partes proporcionais a **a**, **b** e **c**.

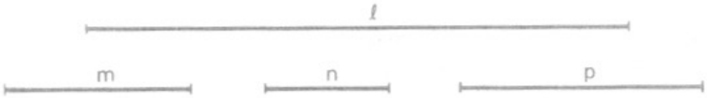
E13. **3** Divida o segmento AB em sete partes iguais.

Resolução: Dividir em sete partes iguais é dividir em sete partes proporcionais a 1.

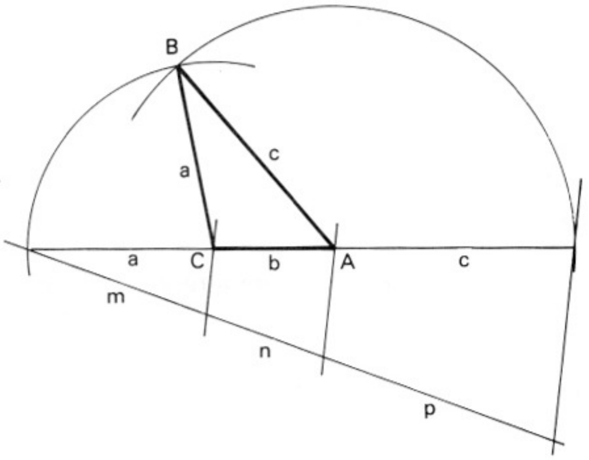


E13.**4** Divida um segmento de 105 mm em seis partes iguais.

E13.**5** São dados os segmentos ℓ, **m**, **n** e **p**. Construa um triângulo ABC de perímetro igual a ℓ, sabendo que os lados **a**, **b** e **c** são proporcionais a **m**, **n** e **p**.



Resolução: Basta dividir ℓ em partes proporcionais a **m**, **n** e **p** para obtermos, respectivamente, os lados **a**, **b** e **c** do triângulo.

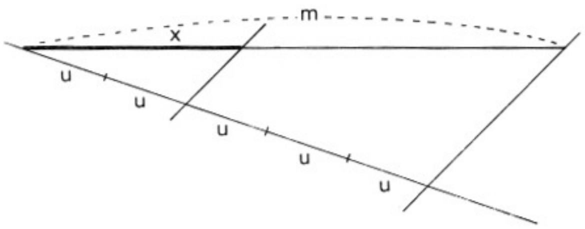


E13.**6** Trace um segmento de comprimento $\ell = 92$ mm. Construa um triângulo ABC, sabendo que $a + b = \ell$, que **a** e **b** são proporcionais a 2 e 3, e que $\hat{C} = 60°$. Quanto mede o lado $\overline{AB}$?

E13.**7** Dado um segmento de comprimento **m**, obtenha um segmento **x**, tal que $x = \frac{2}{5}m$.

Resolução: Divide-se o segmento **m** em cinco partes iguais e toma-se, para resposta, um segmento de comprimento igual a **duas** dessas partes.

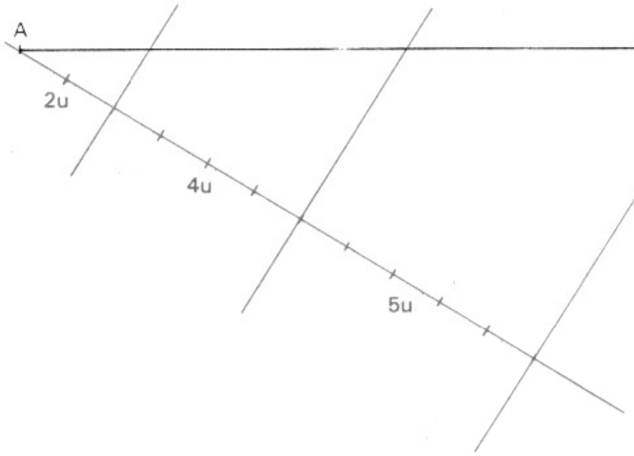
Evidentemente não precisamos traçar todas as paralelas, mas apenas aquela que nos interessa.



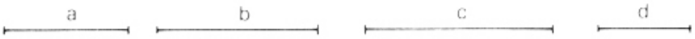
Resolva os exercícios de 63 a 70 do caderno de atividades.

Divisão de segmentos em partes proporcionais

63 Dado o segmento AB, divida-o em partes proporcionais a 2, 4 e 5.



64 Divida o segmento AB em partes proporcionais aos segmentos **a**, **b**, **c** e **d**.



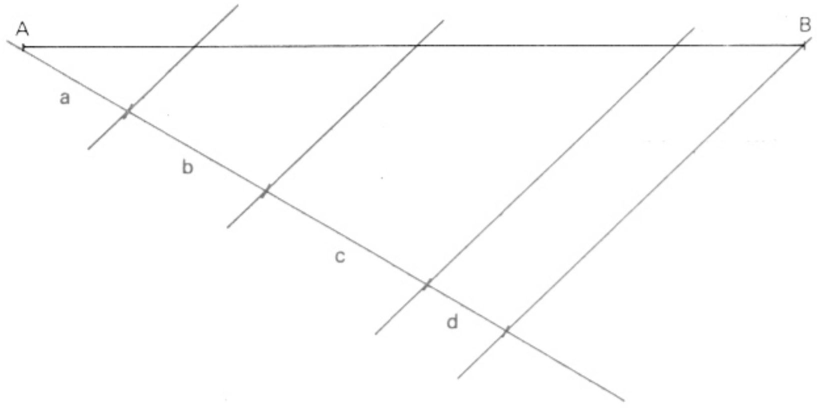


Figura auxiliar e anotações

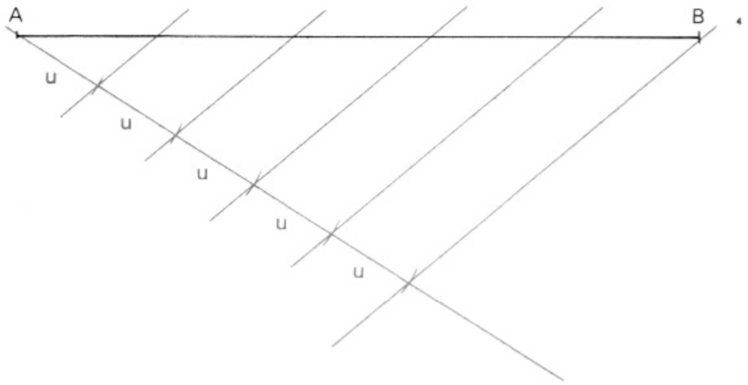
Sugestão:
Daqui para frente, libere o uso do esquadro para traçar paralelas. Isso faz com que se ganhe muito tempo.

Observação:
Conscientize o aluno de que essas construções constituem uma ferramenta que permitirá a resolução gráfica de expressões algébricas. Mais adiante ela nos será bastante útil.

Divisão de segmentos em partes proporcionais

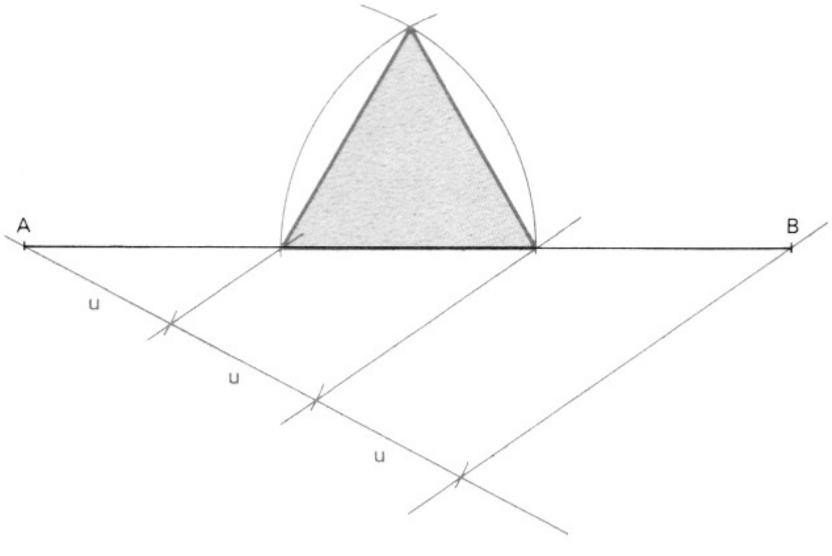
Figura auxiliar e anotações

65 Divida o segmento AB em 5 partes iguais.



66 O segmento AB é o perímetro de um triângulo eqüilátero. Construa esse triângulo.

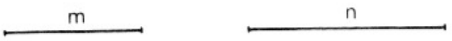
Sugestão:
Pode-se propor um problema análogo a esse, da seguinte forma:
"Dado o perímetro de um pentágono regular, determine o seu lado."



Divisão de segmentos em partes proporcionais

67 São dados os segmentos ℓ, **m** e **n**. Construa um triângulo ABC isósceles de base **a**, sabendo que o seu perímetro é ℓ e que **a** e **b** são proporcionais a **m** e **n**, respectivamente.

Sugestão: Divide-se ℓ em partes proporcionais a **n**, **m** e **n** (já que b = c) para obter os lados.



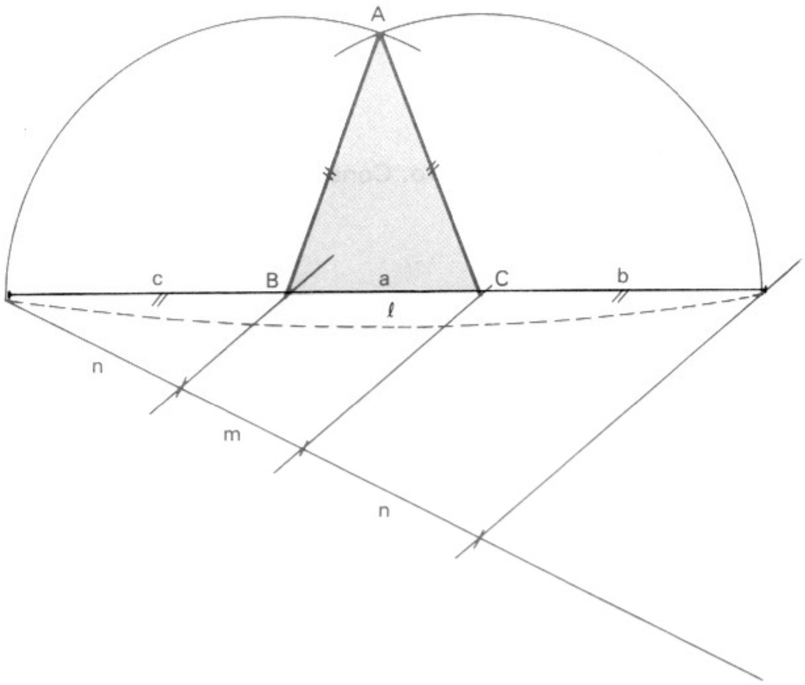


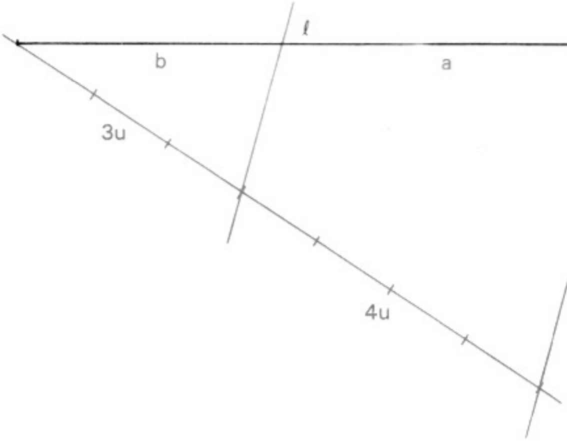
Figura auxiliar e anotações

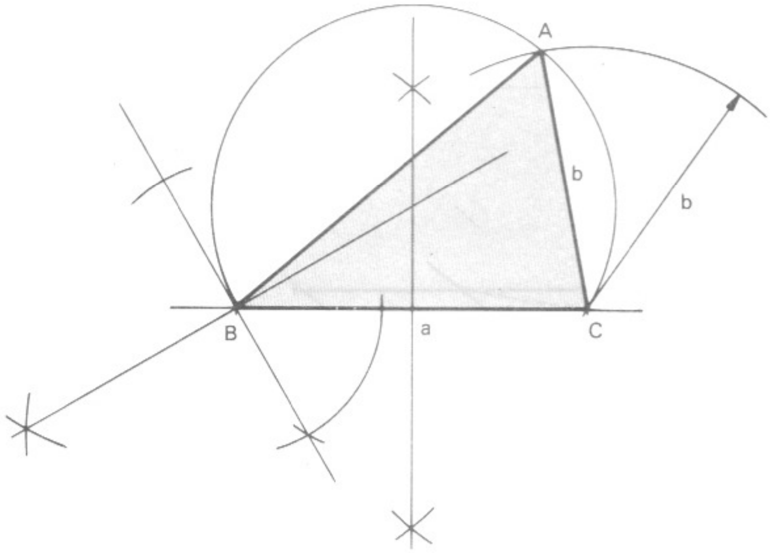
Observação:
Estimule o aluno a aproveitar os segmentos (e também os ângulos) no local em que eles são determinados graficamente, evitando transportes desnecessários sempre que for possível (novamente o planejamento da execução dos traçados). Assim, ganha-se muito em precisão.

Divisão de segmentos em partes proporcionais

68 Dado um segmento de comprimento ℓ, construa um triângulo ABC, sabendo que $a + b = \ell$, que **a** e **b** são proporcionais a 4 e 3, e que $\hat{A} = 60°$.

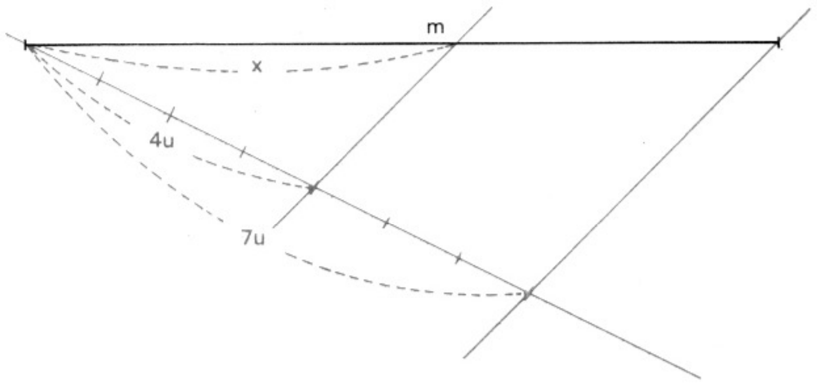
Sugestão: Depois que determinar **a** e **b** você recairá no exercício 58 deste caderno.





Divisão de segmentos em partes proporcionais

69 Dado o segmento de comprimento **m**, obtenha um segmento **x**, tal que $x = \frac{4m}{7}$.



70 Dado o segmento de comprimento **p**, obtenha um segmento **x**, tal que $5x = 4p$.

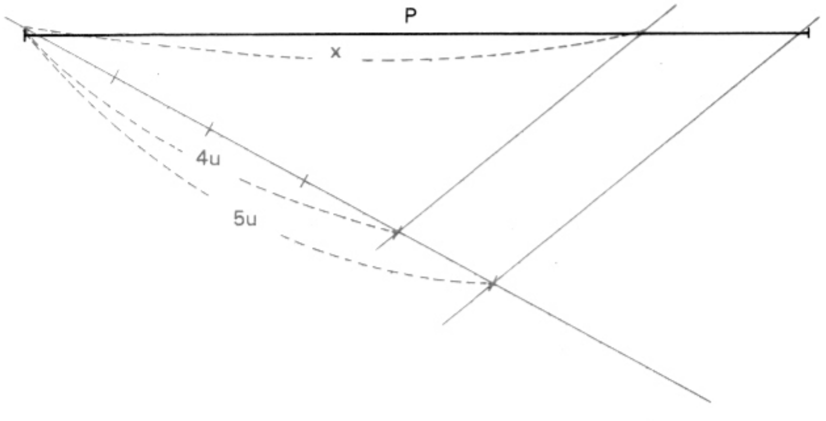


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Insista que $\frac{4}{7}$ significa "dividir em 7 e pegar 4". Dê outros exemplos para que a idéia fique bem clara.

Observação:
Comente com o aluno que essa construção é a resolução gráfica de uma equação do 1.º grau.

Sugestão:
Aproveitando o problema resolvido, proponha ao aluno a determinação de:

$5x = 7p$

Quarta proporcional

Examinemos a proporção:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{x}$$

Vamos supor que **a**, **b** e **m** sejam conhecidos e diferentes entre si, e que queiramos determinar **x**. Então, estamos com **três elementos conhecidos** e queremos determinar um **quarto elemento** que, juntamente com os demais, completa uma proporção. Pois bem, esse quarto elemento é denominado **quarta proporcional**.
Vamos isolar **x** naquela proporção:

Vamos sempre supor que nenhum dos elementos nas proporções é nulo.

$$\overset{(1)}{\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{x}}} \Leftrightarrow \overset{(2)}{\boxed{x = \frac{b \cdot m}{a}}}$$

Você observa que **x** é igual à **razão entre** b · m e **a**. É muito importante que você perceba a igualdade (1) quando se dá a igualdade (2), isto é, reconheça em (2) uma quarta proporcional.
Porém, surge aqui um pequeno problema. Dados três segmentos, **a**, **b** e **m**, de comprimentos diferentes, podem-se obter três quartas proporcionais diferentes:

$$\boxed{x_1 = \frac{b \cdot m}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{x_1}}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{a \cdot m}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{m}{x_2}}$$

$$\boxed{x_3 = \frac{a \cdot b}{m} \Leftrightarrow \frac{m}{b} = \frac{a}{x_3}}$$

Por essa razão, seria necessário especificar qual das quartas proporcionais está se querendo. Para resolver essa questão, vamos convencionar o que é quarta proporcional.

Definição

Chama-se **quarta proporcional** entre os segmentos **a**, **b** e **m**, **citados nessa ordem**, o segmento **x** que se obtém na proposição:

$$a : b :: m : x$$

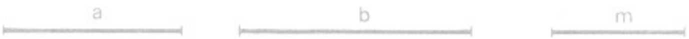
Observe que **a**, **b** e **m** foram mantidos na ordem dada, e **x** foi colocado na **quarta posição**.
Assim, por exemplo, quando pedirmos a quarta proporcional entre os segmentos **c**, **ℓ** e **r**, estaremos pedindo **x**, tal que:

$$c : \ell :: r : x \text{ ou } \frac{c}{\ell} = \frac{r}{x} \text{ ou ainda } x = \frac{\ell \cdot r}{c}$$

Determinação gráfica da quarta proporcional

Problema

Dados os segmentos **a**, **b** e **m**, obter um segmento **x**, tal que a : b :: m : x.

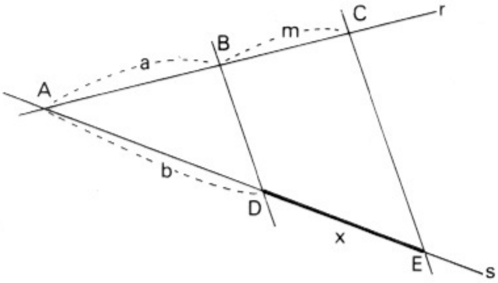


Resolução: A obtenção de **x** é feita em função do teorema de Tales:

1.º) Traçam-se duas retas **r** e **s** quaisquer, concorrentes em A.

2.º) Tomam-se AB = a e BC = m em **r**, e AD = b em **s**.

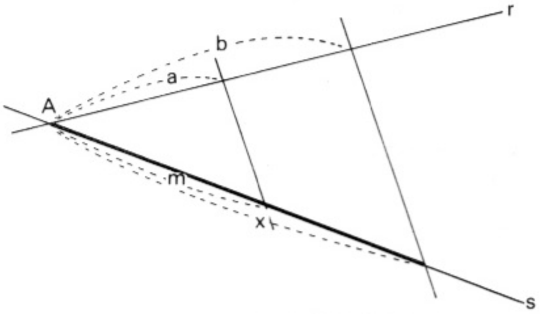
3.º) Traça-se a reta BD e, por C, a paralela a ela, à qual intercepta **s** em E.



$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{x}}$$

Pelo teorema de Tales, DE = x.

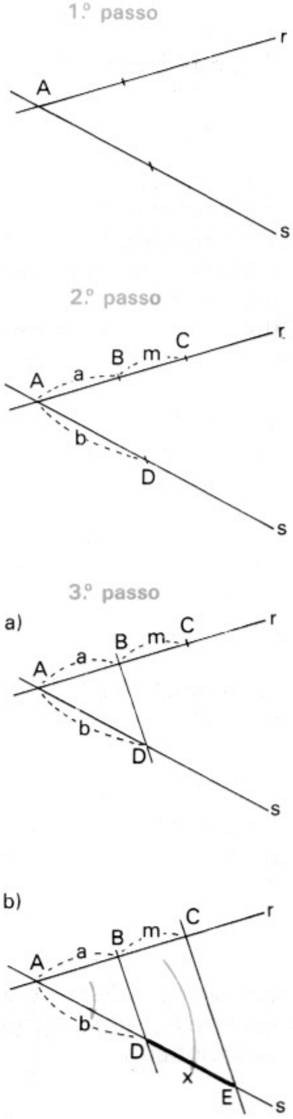
Observação: Sempre apoiados no teorema de Tales, podemos pensar em outras formas de dispor os segmentos **a**, **b** e **m**. Por exemplo, se os segmentos dados forem suficientemente grandes, a ponto de a disposição anterior não caber no papel, pode-se proceder da seguinte forma:



$$\frac{a}{b} = \frac{m}{x}$$

Porém, se não houver problemas com os limites do papel, convém usar sempre uma mesma disposição. Isso evita enganos.

Evolução do traçado



$$\frac{a}{b} = \frac{m}{x}$$

Exercício

E13. **8** Trace os seguintes segmentos: a = 25 mm, b = 35 mm, c = 40 mm e d = 43 mm. Determine graficamente a quarta proporcional entre:

a) a, b, c b) d, a, c c) c, a, b

Após a resolução gráfica, calcule algebricamente as quartas proporcionais pedidas e compare com as respostas gráficas.

Terceira proporcional

Acabamos de ver que na proporção $\frac{a}{b} = \frac{m}{x}$, onde **a**, **b**, e **m** são conhecidos e de comprimentos diferentes, **x** é chamado quarta proporcional. Agora, vamos supor que os meios dessa proporção sejam iguais, isto é, m = b. Nesse caso, teremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

Na prática, temos dois elementos conhecidos, **a** e **b**, que juntamente com um terceiro, **x**, constituem uma proporção. Pois bem, esse terceiro elemento é denominado **terceira proporcional**.

Assim, a terceira proporcional é apenas o caso particular da quarta proporcional em que os meios são iguais.

Vamos isolar **x**:

$$\overset{(1)}{\boxed{\frac{a}{b} = \frac{b}{x}}} \Leftrightarrow \overset{(2)}{\boxed{x = \frac{b^2}{a}}}$$

Agora, você observa que **x** é igual à razão entre b^2 e **a**. Aqui também é muito importante que você perceba que a igualdade (2) traduz uma terceira proporcional.

Novamente temos um problema, pois dados dois segmentos, **a** e **b**, podem-se obter duas terceiras proporcionais:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{b}{x_1} \Leftrightarrow x_1 = \frac{b^2}{a}}$$

$$\boxed{\frac{b}{a} = \frac{a}{x_2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{a^2}{b}}$$

Para eliminarmos a dupla possibilidade, vamos também fazer a seguinte convenção:

Definição

Chama-se **terceira proporcional** entre os segmentos **a** e **b**, **citados nessa ordem**, o segmento **x** que se obtém na proporção:

$$a : b :: b : x$$

Como se vê, repete-se o segundo elemento e coloca-se **x** na quarta posição.

Então, se for pedida a terceira proporcional entre os segmentos ℓ e **r**, por exemplo, faremos:

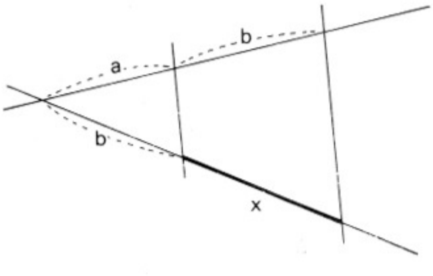
$$\ell : r :: r : x \text{ ou } \frac{\ell}{r} = \frac{r}{x} \text{ ou ainda, } x = \frac{r^2}{\ell}$$

Determinação gráfica da terceira proporcional

Problema

Dados dois segmentos, **a** e **b**, obter um segmento **x**, tal que **a : b :: b : x**.

Resolução: É idêntica à obtenção da quarta proporcional.



Exercícios

E13. **9** Dados os segmentos a = 30 mm, b = 40 mm e c = 25 mm, obtenha graficamente a terceira proporcional entre:

a) **a e b** b) **c e a** c) **b e c**

Após a resolução gráfica, calcule algebricamente as terceiras proporcionais pedidas e confira os resultados com as respostas gráficas.

E13. **10** Escreva as igualdades seguintes na forma $\frac{?}{?} = \frac{?}{x}$.

a) $x = \frac{m \cdot n}{p}$ c) $x = \frac{u \cdot v}{t}$ e) $x = \frac{a^2}{b}$

b) $x = \frac{k \cdot s}{\ell}$ d) $x = \frac{\ell^2}{m}$ f) $x = \frac{k^2}{t}$

Exemplo: A igualdade $x = \frac{t \cdot r}{a}$ pode ser escrita na forma $\frac{a}{r} = \frac{t}{x}$ ou, trocando os meios, $\frac{a}{t} = \frac{r}{x}$.

E13. **11** São dados os segmentos ℓ = 30 mm, m = 35 mm e n = 40 mm. Construa um triângulo ABC, sabendo que $\hat{A} = 60°$, $a = \frac{m \cdot n}{\ell}$ e $b = \frac{\ell_2}{n}$.

Quanto mede o lado $\overline{AB}$?

Sugestão: O lado **a** é uma quarta proporcional, o lado **b** uma terceira proporcional. Para o vértice A você conhece duas propriedades.

Resolva os exercícios de 71 a 76 do caderno de atividades.

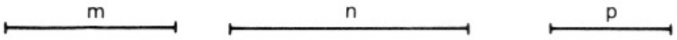
Terceira e quarta proporcionais

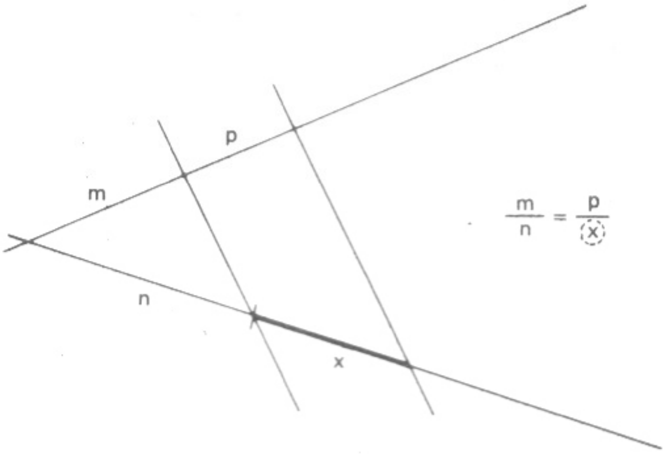
Figura auxiliar e anotações

Observação:
Insista com o aluno que **m**, **n** e **p** determinam "três" quartas proporcionais, e que subentender que é esta a quarta proporcional procurada é uma convenção interna desta obra.

Os segmentos **m**, **n** e **p** serão utilizados nos exercícios de 71 a 74.

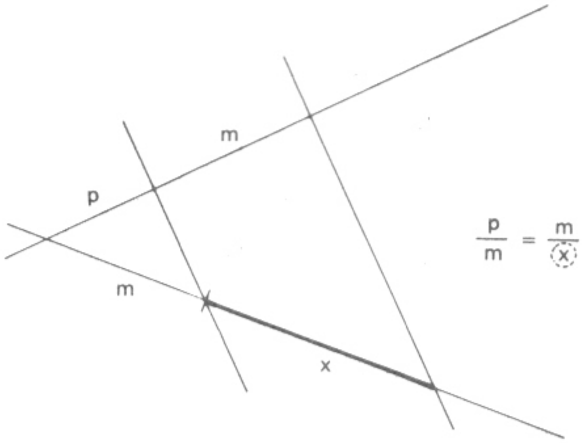
71 Determine a quarta proporcional entre os segmentos **m**, **n** e **p**.





$$\frac{m}{n} = \frac{p}{x}$$

72 Determine a terceira proporcional entre os segmentos **p** e **m**.



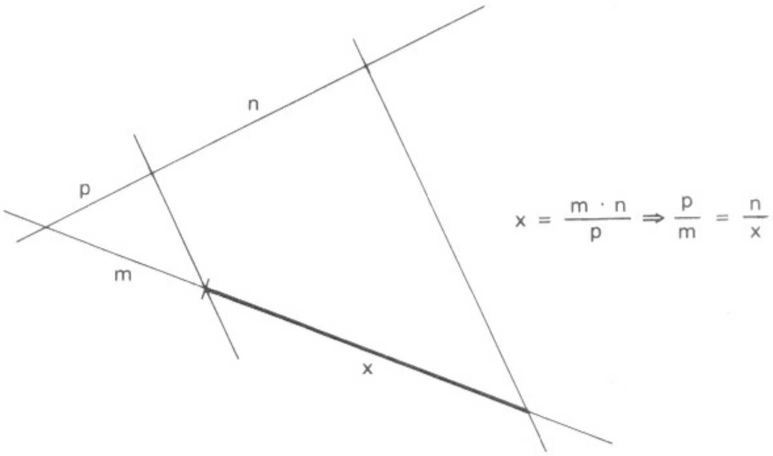
$$\frac{p}{m} = \frac{m}{x}$$

Terceira e quarta proporcionais

Figura auxiliar e anotações

73 Determine **x** de modo que se tenha $x = \dfrac{m \cdot n}{p}$.

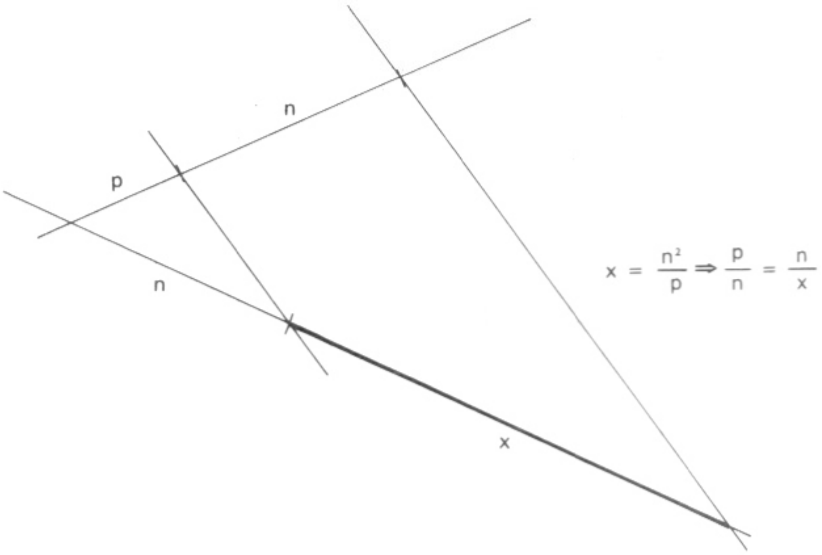
Observação:
Oriente o aluno para transformar expressões desse tipo sempre na forma de proporção, deixando **x** em último lugar. Esta forma é bem mais familiar.



$$x = \frac{m \cdot n}{p} \Rightarrow \frac{p}{m} = \frac{n}{x}$$

74 Determine **x** de modo que se tenha $x = \dfrac{n^2}{p}$.

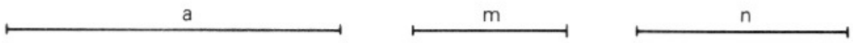
Observação:
Peça a todos os alunos que meçam as respostas obtidas, para verificar a precisão com que estão desenhando. Faça isso periodicamente daqui para frente e tente orientar aqueles que não estão conseguindo bons resultados.

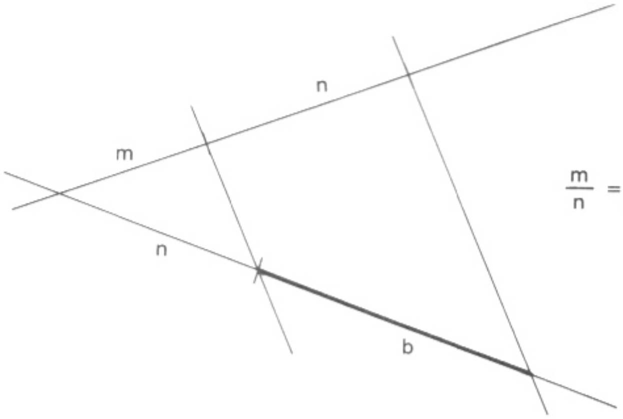


$$x = \frac{n^2}{p} \Rightarrow \frac{p}{n} = \frac{n}{x}$$

Terceira e quarta proporcionais

75 Construa um triângulo ABC, dados **a**, $\hat{C} = 75°$ e sabendo que **b** é a terceira proporcional entre os segmentos **m** e **n**.





$$\frac{m}{n} = \frac{n}{b}$$

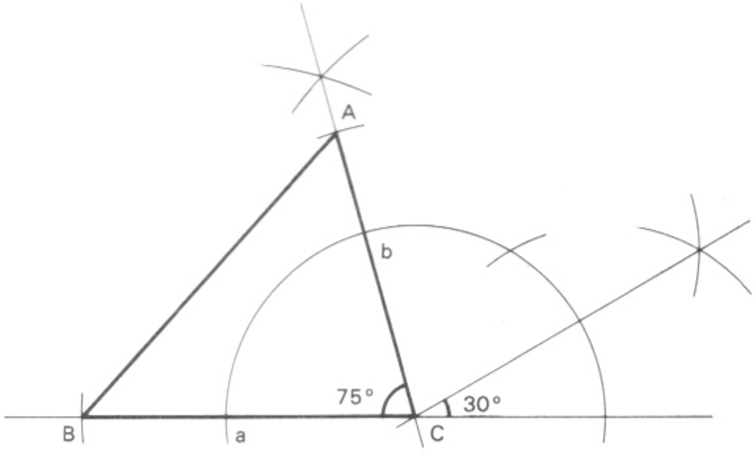


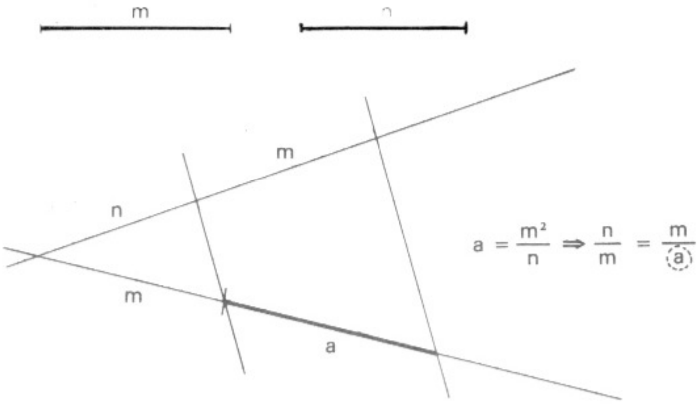
Figura auxiliar e anotações

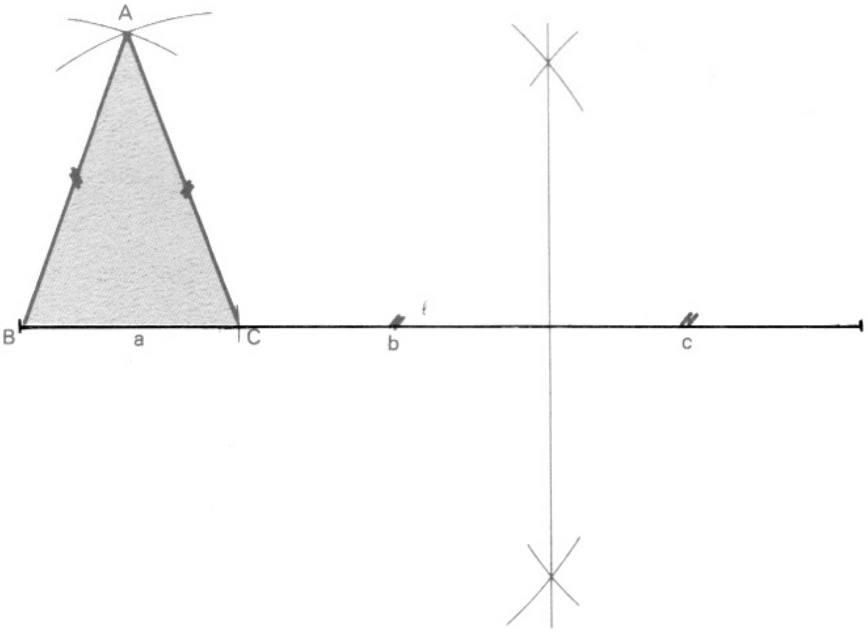
Observação:
Lembre ao aluno que a construção do ângulo de 75° se faz mais facilmente a partir da bissecção do ângulo de 150° (suplemento de 30°).

Terceira e quarta proporcionais

Figura auxiliar e anotações

76 São dados os segmentos ℓ, **m** e **n**. Construa um triângulo isósceles de perímetro ℓ, sabendo que a base **a** é tal que $a = \frac{m^2}{n}$.

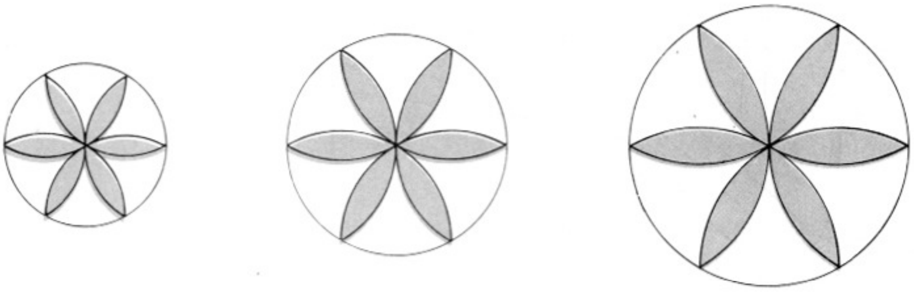

m
n
m
n
m
a
$a = \frac{m^2}{n} \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{m}{a}$



14

Semelhança

Observe a seqüência de figuras:



Embora elas não possuam tamanhos iguais, ainda assim elas têm algo em comum. O que é? Uma palavra pode transmitir a impressão que elas nos passam: *forma*. Isto. Parece que se dissermos para alguém que elas possuem a mesma forma, esse alguém vai concordar conosco. Mas o que é forma? Engraçado, não é? Sabemos o que é, mas não sabemos explicar o que é.

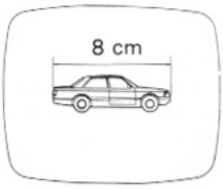
Na realidade, o conceito de forma nos é transmitido através de experiências concretas e está diretamente ligado à percepção visual, isto é, reconhecemos formas iguais através do ato de ver. Esse conceito é por nós adquirido e, quando nos apresentam objetos de formas iguais, imediatamente reconhecemos esse fato.

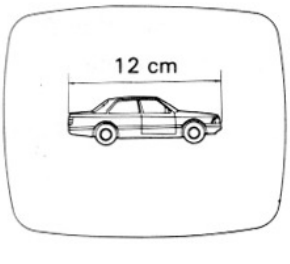
Vamos imaginar uma outra situação em que esse conceito se apresenta. Suponha que você esteja numa sala onde dois televisores, de tamanhos diferentes, estejam sintonizados num mesmo filme. O que você vê é um verdadeiro desfile de imagens com formas iguais. Porém, é interessante notar que as dimensões dos objetos mantêm sempre uma mesma proporção. Por exemplo, se num determinado momento aparece um automóvel que tem 8 cm de comprimento no televisor menor e 12 cm no maior, já temos a proporção entre os comprimentos de todos os objetos que aparecem nas duas telas. Ela é de 8 para 12 ou, simplificando, de 2 para 3. Essa relação será a constante de proporcionalidade entre os comprimentos de todos os objetos que aparecem simultaneamente nas duas telas. Doravante, vamos chamar tais objetos de **elementos homólogos**. Assim, por exemplo, se em outra cena a torre Eiffel aparecer com 10 cm no menor, nem é necessário medir no maior, pois podemos calcular sua altura **h**.

Não é necessário que as figuras de mesma forma tenham tamanhos diferentes, mas é principalmente esta situação que pretendemos estudar.

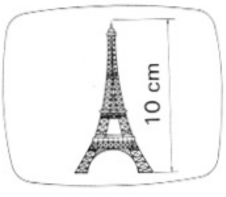
Homólogo é uma palavra que tem raízes gregas, e significa "mesmo lugar".

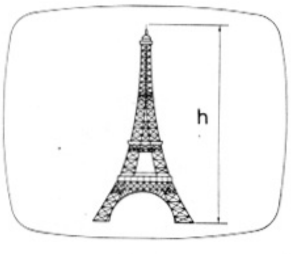
$$\frac{10}{h} = \frac{2}{3} \Rightarrow h = 15$$





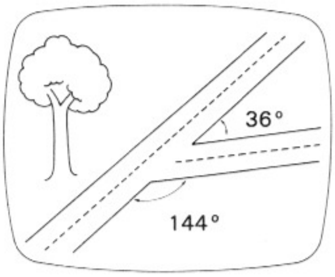
8 : 12 : : 2 : 3

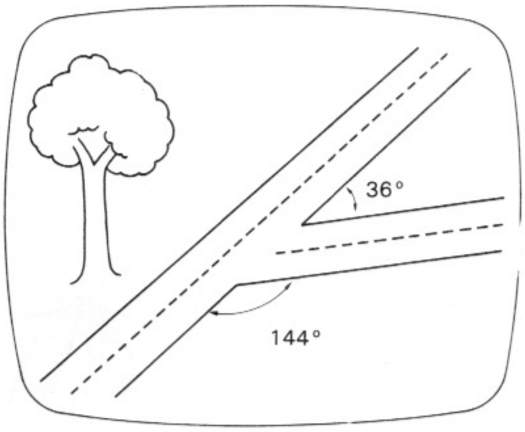




10 : h : : 2 : 3 → h = 15 cm

Mas muita atenção para um fato. Nesses elementos homólogos os comprimentos estão sempre numa mesma proporção, porém **os ângulos não variam**!





Pois bem. Aí estão as propriedades geométricas que caracterizam o que chamamos **forma**: figuras que possuem a mesma forma possuem todos os comprimentos de elementos homólogos numa mesma proporção, porém mantêm os ângulos homólogos invariáveis.

Embora ainda continuemos a utilizar a palavra **forma**, a expressão oficial que a Geometria usa para figuras com essas propriedades é **semelhança**.

É muito importante que se tenha sempre em mente as propriedades que fazem com que duas figuras sejam semelhantes:

- comprimentos proporcionais;
- ângulos invariáveis.

Podemos, agora, apresentar o conceito de polígonos semelhantes.

Polígonos semelhantes

Consideremos dois polígonos, ABCDE... e A'B'C'D'E'..., com o mesmo número de vértices. Pode-se, então, colocar em correspondência os vértices desses polígonos, por exemplo, da seguinte forma:

Ao vértice A corresponde A', e a A' corresponde A.

Ao vértice B corresponde B', e a B' corresponde B.

E assim sucessivamente.

Em símbolos, podemos traduzir essas correspondências assim:

$$A \leftrightarrow A' \,;\, B \leftrightarrow B' \,;\, C \leftrightarrow C';\, \ldots$$

Ou, simplesmente:

$$ABCDE\ldots \leftrightarrow A'B'C'D'E'\ldots$$

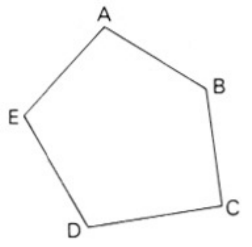
Note que nessa última representação a ordem em que as letras estão escritas informa quem corresponde a quem. (A a A', B a B', ...).

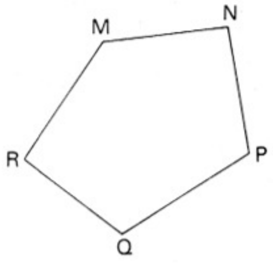
Diremos também que os ângulos que têm vértices correspondentes nesses polígonos são **ângulos correspondentes**, e os lados que têm extremidades em vértices correspondentes são **lados correspondentes**.

A definição de correspondências auxiliará a conceituar a semelhança de polígonos, além de estabelecer uma linguagem simbólica que carrega em si um grande número de informações.
Observe quanta coisa é dita ao se escrever:

$$ABCDE \longleftrightarrow MNPQR$$

Exemplo:





ABCDE ↔ MNPQR

Correspondências

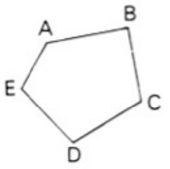
Vértices	Ângulos	Lados
A ↔ M	$\sphericalangle \hat{A} \leftrightarrow \sphericalangle \hat{M}$	$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{MN}$
B ↔ N	$\sphericalangle \hat{B} \leftrightarrow \sphericalangle \hat{N}$	$\overline{BC} \leftrightarrow \overline{NP}$
C ↔ P	$\sphericalangle \hat{C} \leftrightarrow \sphericalangle \hat{P}$	$\overline{CD} \leftrightarrow \overline{PQ}$
D ↔ Q	$\sphericalangle \hat{D} \leftrightarrow \sphericalangle \hat{Q}$	$\overline{DE} \leftrightarrow \overline{QR}$
E ↔ R	$\sphericalangle \hat{E} \leftrightarrow \sphericalangle \hat{R}$	$\overline{AE} \leftrightarrow \overline{MR}$

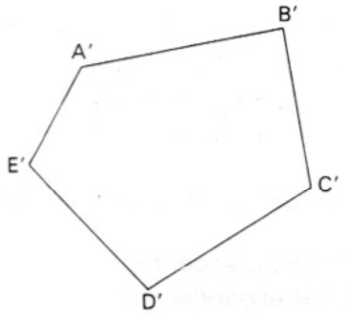
Definição

Dois polígonos são **semelhantes** quando existe uma correspondência entre seus vértices que determina:

1.º) ângulos correspondentes congruentes;

2.º) lados correspondentes proporcionais.





É muito importante observar que as seqüências em que escrevemos as letras dos vértices já indicam quais são os elementos correspondentes, independentemente da figura.

A semelhança será denotada pelo símbolo ∼.

$$\boxed{ABCDE \sim A'B'C'D'E'} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \sphericalangle \hat{A} \equiv \sphericalangle \hat{A}' \\ \sphericalangle \hat{B} \equiv \sphericalangle \hat{B}' \\ \sphericalangle \hat{C} \equiv \sphericalangle \hat{C}' \\ \sphericalangle \hat{D} \equiv \sphericalangle \hat{D}' \\ \sphericalangle \hat{E} \equiv \sphericalangle \hat{E}' \end{array}\right.$$

$$\text{e } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{AE}{A'E'} = k$$

Observações:

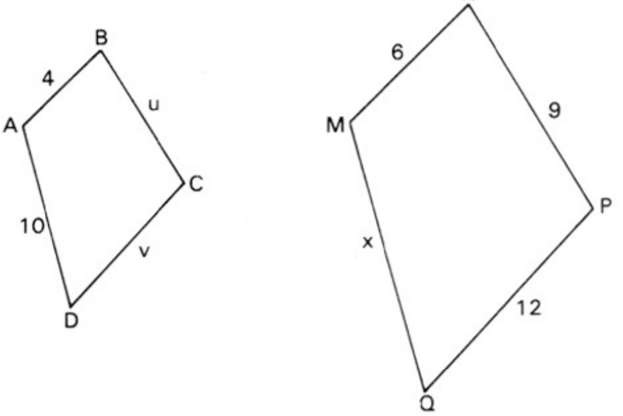
- Os lados correspondentes, nos polígonos semelhantes, serão também chamados **lados homólogos**.
- A constante **k** de proporcionalidade, entre os lados homólogos, será chamada **razão de semelhança**.

Exercícios

E14. **1** Na figura seguinte, os quadriláteros ABCD e MNPQ são semelhantes. Calcule:

a) **k**, a razão de semelhança entre ABCD e MNPQ;

b) **u**, **v** e **x**, as medidas dos lados.



Um cuidado que devemos ter ao montar as proporções entre os lados homólogos é o de colocar todos os lados de um mesmo polígono no numerador, ou todos no denominador.

Resolução:

a) A razão de semelhança é a constante de proporcionalidade entre os lados homólogos. Isto é:

$$k = \frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ} = \frac{AD}{MQ}$$

Para determinar **k**, temos que escolher, entre as razões de lados homólogos, uma em que conhecemos os dois. No caso, AB e MN:

$$k = \frac{AB}{MN} = \frac{4}{6} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

b) Agora que a razão de semelhança é conhecida, podemos calcular os lados procurados:

$$\frac{u}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow u = 6 \quad \frac{v}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow v = 8 \quad \frac{10}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 15$$

Resposta: a) $k = \frac{2}{3}$; b) $u = 6$; $v = 8$ e $x = 15$

E14. **2** A sentença ADCBE~LRNPM indica a semelhança de dois pentágonos. Responda as seguintes perguntas:

a) Quais são os pares de vértices correspondentes?

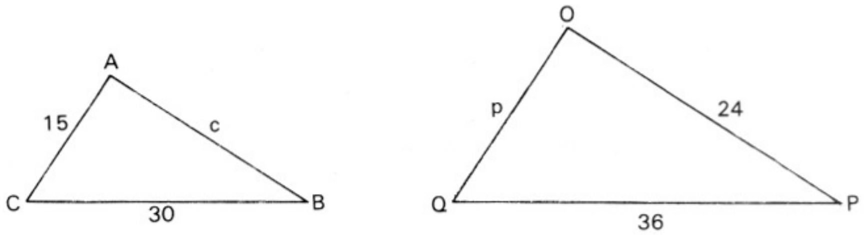
b) Quais são os pares de ângulos correspondentes?

c) Quais são os pares de lados correspondentes?

E14. **3** Na figura seguinte, os triângulos ABC e OPQ são semelhantes. Calcule:

a) a razão de semelhança entre ABC e OPQ;

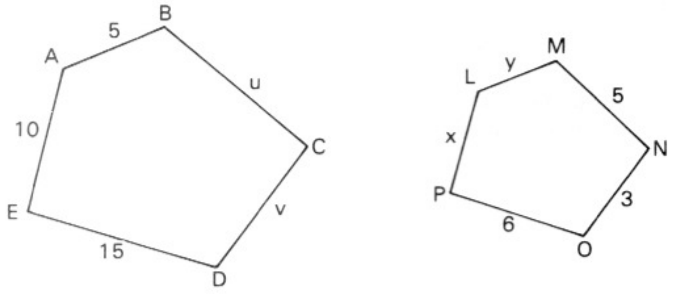
b) os lados **c** e **p**.



E14.**4** Na figura seguinte, os pentágonos ABCDE e LMNOP são semelhantes. Calcule:

a) a razão de semelhança entre ABCDE e LMNOP;

b) os lados **u**, **v**, **x** e **y**.



Triângulos semelhantes

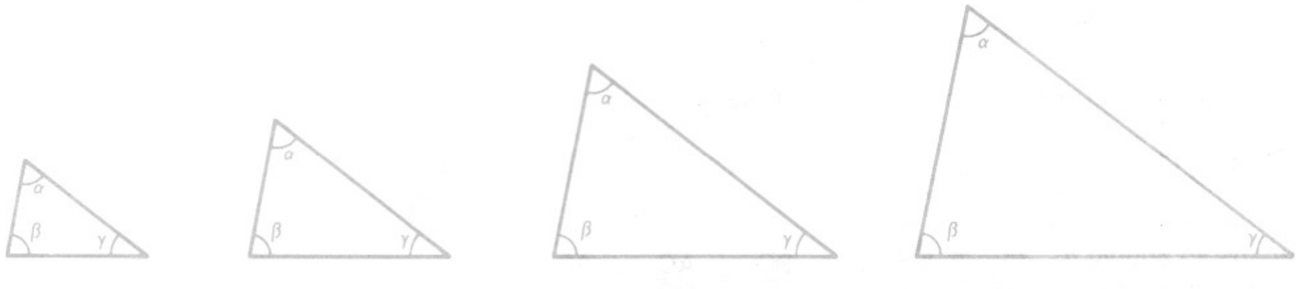
A definição de polígonos semelhantes exige duas condições:

- ângulos correspondentes congruentes;
- lados homólogos proporcionais.

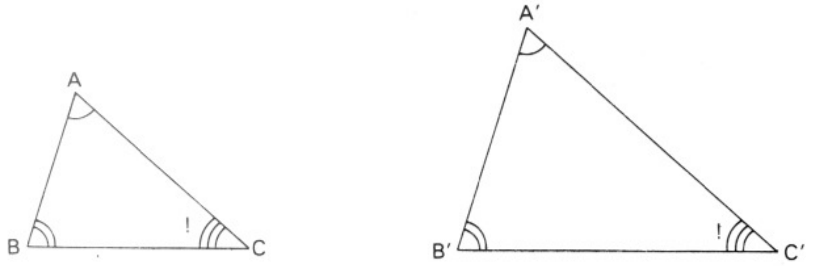
Porém, no caso do triângulo, e exclusivamente nesse caso, a semelhança fica garantida com um número menor de informações. Há três casos importantes em que isso ocorre e a esses casos chamamos **critérios de semelhança**. Para o momento, vamos estudar apenas um deles, o que mais se usa, e, futuramente, examinaremos os outros dois.

A semelhança de polígonos será bastante usada no volume 2, quando estudarmos **homotetia**. Por enquanto é importante apenas que tenhamos o conceito de semelhança de polígonos quaisquer, mas a figura com que de fato vamos trabalhar é o triângulo.

A forma de um triângulo fica determinada pelos seus ângulos. O que significa isso? Ora, significa que todos os triângulos que possuem ângulos correspondentes congruentes têm exatamente a mesma forma, isto é, são semelhantes.



Como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é constante, sempre que dois ângulos de um triângulo forem congruentes a dois ângulos correspondentes de um outro, queira ou não, o terceiro par de ângulos desses triângulos serão também congruentes.



$$\text{Se} \begin{cases} \measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{A}' \\ \text{e} \\ \measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{B}' \end{cases}$$

$$\text{Então} \{ \measuredangle \hat{C} \equiv \measuredangle \hat{C}'$$

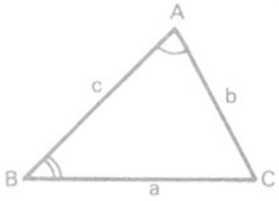
Com isso, podemos enunciar o seguinte critério de semelhança de triângulos:

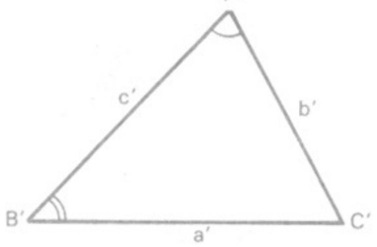
Critério AA

Se dois ângulos de um triângulo são respectivamente congruentes a dois ângulos correspondentes de outro triângulo, então esses triângulos são **semelhantes.**

Critério AA. Leia-se **critério ângulo, ângulo.**

É importante observar que quando se afirma que os triângulos são semelhantes está garantido que os lados homólogos são proporcionais.

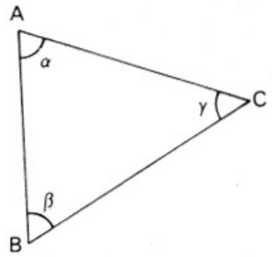


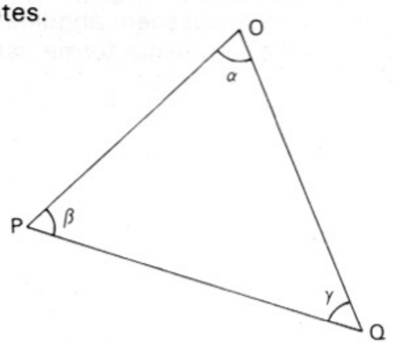


$$\text{Se}\begin{cases}\measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{A}' \\ \text{e} \\ \measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{B}'\end{cases} \quad \text{Então, } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'. \text{ Logo, } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Uma instrução importante

Convém que você se habitue a identificar graficamente os ângulos congruentes nos triângulos semelhantes. Pode-se fazer isso através de marquinhas ou com o auxílio de letras gregas (α, β, γ, ...), ou um outro procedimento qualquer. O importante é que ao olhar para a figura destaquem-se os pares de ângulos congruentes. Isso facilita o ato de enxergar os lados homólogos, pois estes estão sempre opostos a ângulos congruentes.



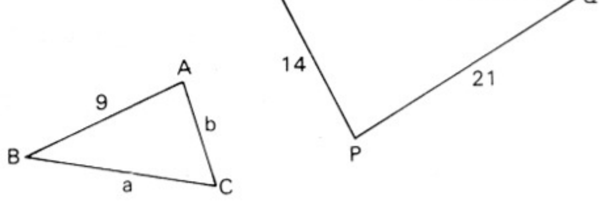


Opostos ao ângulo α: $\overline{BC}$ e $\overline{PQ}$
Opostos ao ângulo β: $\overline{AC}$ e $\overline{OQ}$
Opostos ao ângulo γ: $\overline{AB}$ e $\overline{OP}$

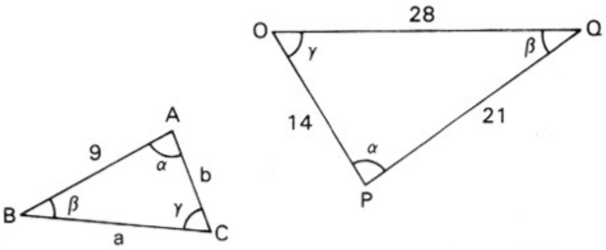
$$\frac{BC}{PQ} = \frac{AC}{OQ} = \frac{AB}{OP}$$

Exercícios

E14. **5** Na figura seguinte, os triângulos ABC e OPQ são tais que $\measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{P}$ e $\measuredangle \hat{C} \equiv \measuredangle \hat{Q}$. Calcule **a** e **b**.



Resolução:

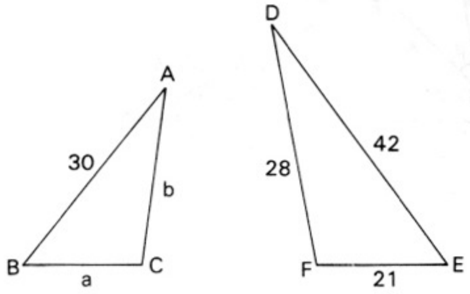


Como ∡ Â ≡ ∡ P̂ e ∡ Ĉ ≡ ∡ Q̂, pelo critério AA, os triângulos são semelhantes. Então, identificando graficamente os ângulos congruentes, podemos escrever:

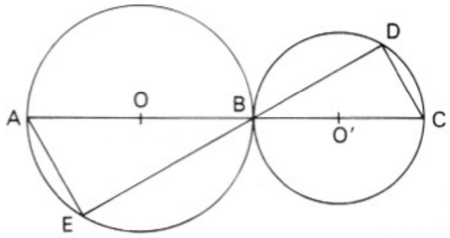
$$\frac{a}{28} = \frac{b}{14} = \frac{9}{21} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{28} = \dfrac{3}{7} \Rightarrow a = 12 \\ \dfrac{b}{14} = \dfrac{3}{7} \Rightarrow b = 6 \end{cases}$$

Resposta: a = 12 e b = 6

E14. **6** Na figura seguinte, sabe-se que ∡ Â ≡ ∡ D̂ e ∡ Ĉ ≡ ∡ F̂. Calcule **a** e **b**.

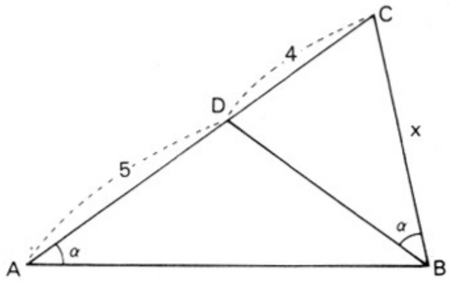


E14. **7** Na figura seguinte, as circunferências são tangentes no ponto B, seus raios medem 9 e 6, e CD = 4. Calcule AE.

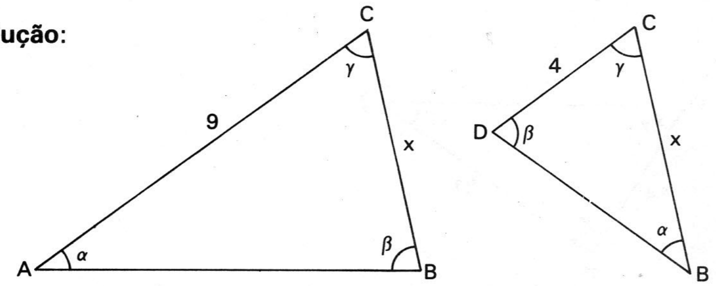


Sugestão: Observe ângulos inscritos numa semicircunferência, além de ângulos o.p.v.

E14. **8** Calcule **x** na figura seguinte, dado que ∡ Â ≡ ∡ CB̂D.



Resolução:



Analisando com atenção os triângulos ABC e BDC, verificamos que são semelhantes, pois:

$$\begin{cases} \measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle C\hat{B}D \text{ (dado).} \\ \measuredangle \hat{C} \text{ é comum aos dois triângulos.} \end{cases}$$

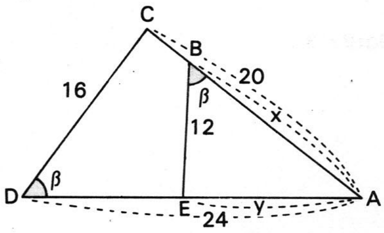
$$\text{Logo, } \frac{x}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \therefore x = 6$$

Resposta: x = 6

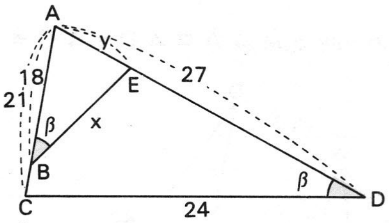
São muito comuns os problemas em que de dois triângulos semelhantes um está contido no outro, como no E14.8. Para notar a semelhança, convém olhar para os ângulos dados como congruentes e para os ângulos comuns aos dois triângulos. Além disso, na dúvida, faça novas figuras separando esses triângulos.

E14.9 Nas figuras seguintes, calcule **x** e **y**, onde $\measuredangle \hat{D} \equiv \measuredangle A\hat{B}E$.

a)

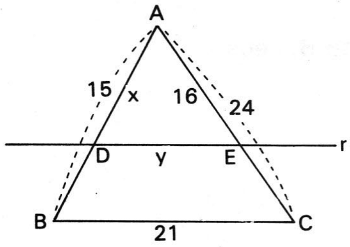


b)

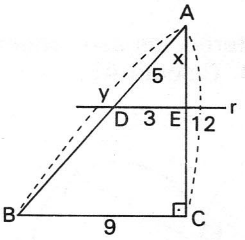


E14.10 Nas figuras seguintes, a reta **r** é paralela ao lado $\overline{BC}$. Calcule **x** e **y**.

a)

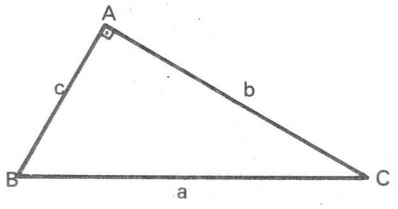


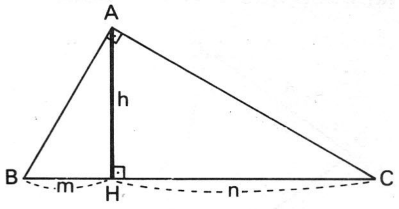
b)



Relações métricas no triângulo retângulo

Seja ABC um triângulo retângulo em A. Traçando o segmento AH perpendicular à hipotenusa, obtêm-se novos elementos nesse triângulo.

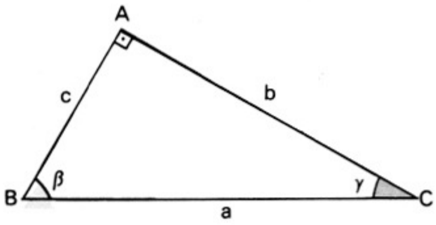


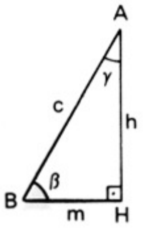


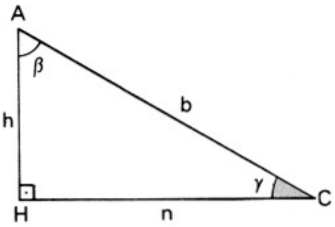
$$\begin{cases} \overline{AH} \rightarrow \text{altura relativa à hipotenusa (h).} \\ \overline{BH} \rightarrow \text{projeção do cateto } \overline{AB} \text{ sobre a hipotenusa (m)} \\ \overline{CH} \rightarrow \text{projeção do cateto } \overline{AC} \text{ sobre a hipotenusa (n)} \end{cases}$$

Como mais um abuso de linguagem, dizemos apenas ''projeções dos catetos'' e fica subentendido que é sobre a hipotenusa.

Por outro lado, a altura $\overline{AH}$ divide o triângulo ABC em dois novos triângulos, HBA e HAC, semelhantes ao próprio triângulo ABC.







De fato:

$\triangle ABC \sim \triangle HBC$, pois $\measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{H}$ (por hipótese) e $\measuredangle \hat{B}$ é comum.
$\triangle ABC \sim \triangle HAC$, pois $\measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{H}$ (por hipótese) e $\measuredangle \hat{C}$ é comum.

Assim, temos: $\boxed{\triangle ABC \sim \triangle HBC \sim \triangle HAC}$

Dessa tripla semelhança, vamos deduzir as seguintes relações:

$$\triangle ABC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow \boxed{c^2 = a \cdot m} \quad (1)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle HAC \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow \boxed{b^2 = a \cdot n} \quad (2)$$

$$\triangle HBA \sim \triangle HAC \Rightarrow \frac{h}{n} = \frac{m}{h} \Rightarrow \boxed{h^2 = m \cdot n} \quad (3)$$

Não esqueça que se dois ângulos de um triângulo são respectivamente congruentes a dois ângulos de um outro, então o terceiro par de ângulos desses triângulos são congruentes.

Da semelhança dos triângulos **ABC** e **HBA** pode-se também deduzir:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow \boxed{b \cdot c = a \cdot h}$$

Mas, essa relação não nos será importante agora.

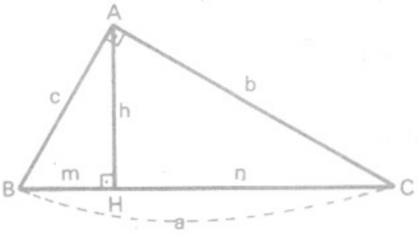
Somando as igualdades (1) e (2) membro a membro, deduzimos o famoso **teorema de Pitágoras**: *O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

$$\oplus \begin{cases} c^2 = am \\ b^2 = an \end{cases}$$

$$b^2 + c^2 = am + an$$

$$b^2 + c^2 = a(\underbrace{m + n}_{a}) \qquad \text{como } m + n = a, \quad \boxed{b^2 + c^2 = a^2} \quad (4)$$

Resumindo:



Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot n \\ c^2 = a \cdot m \end{cases}$$

$$h^2 = m \cdot n$$

Uma maneira de memorizar essas relações é falá-las da seguinte maneira:

$$b^2 = a \cdot n$$

Leia-se: cateto ao quadrado é igual à hipotenusa vezes sua projeção.

Observe, inclusive, que a relação:

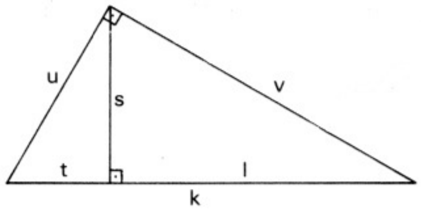
$$c^2 = a \cdot m$$

diz exatamente a mesma coisa.
Como você lê $h^2 = m \cdot n$?

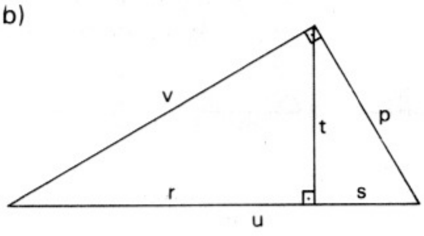
Exercícios

E14.**11** Escreva as quatro relações deduzidas para os triângulos retângulos seguintes.

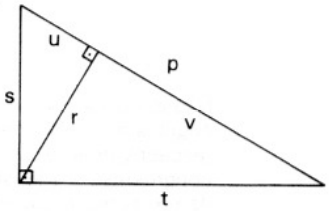
a)



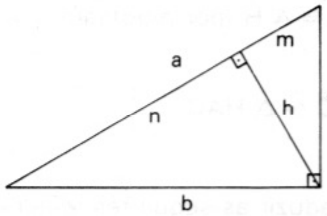
b)



c)



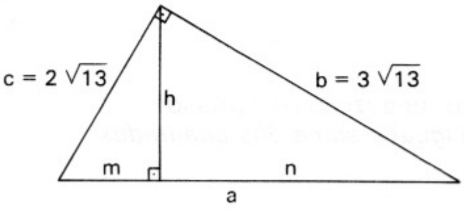
d)



E14.**12** Num triângulo retângulo, os catetos medem $2\sqrt{13}$ e $3\sqrt{13}$. Calcule:

a) a hipotenusa;
b) as projeções dos catetos;
c) a altura relativa à hipotenusa.

Resolução:



a) Calculamos a hipotenusa pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 = \left(2\sqrt{13}\right)^2 + \left(3\sqrt{13}\right)^2$$

$$a^2 = 169 \therefore \boxed{a = 13}$$

b) Pelas relações $b^2 = a \cdot n$ e $c^2 = a \cdot m$, calculamos as projeções, já que o valor da hipotenusa é conhecido:

$$\left(3\sqrt{13}\right)^2 = 13 \cdot n \therefore \boxed{n = 9}$$

$$\left(2\sqrt{13}\right)^2 = 13 \cdot m \therefore \boxed{m = 4}$$

Tendo achado n = 9, fica muito mais fácil tirar **m** da relação:

$$m + n = a$$
$$m + 9 = 13$$
$$m = 4$$

c) Tendo **m** e **n**, calculamos a altura pela relação $h^2 = m \cdot n$

$$h^2 = 9 \cdot 4 \therefore \boxed{h = 6}$$

Resposta: a) 13 b) 4 e 9 c) 6

E14.**13** Os catetos de um triângulo retângulo medem $\sqrt{5}$ e $2\sqrt{5}$. Calcule:

a) a hipotenusa;
b) as projeções dos catetos;
c) a altura relativa à hipotenusa.

E14.**14** As projeções dos catetos sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo são $m = 9$ e $n = 16$. Calcule:

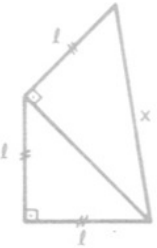
a) a hipotenusa;
b) a altura relativa à hipotenusa;
c) os catetos.

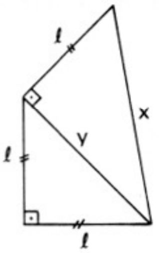
E14.**15** A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 9 cm. Sabendo que as projeções dos catetos sobre ela são proporcionais a 1 e 2, calcule:

a) as projeções dos catetos;
b) a altura relativa à hipotenusa;
c) os catetos.

Neste exercício, não esqueça do "k vezes".

E14.**16** Calcule **x** em função de ℓ na figura seguinte.



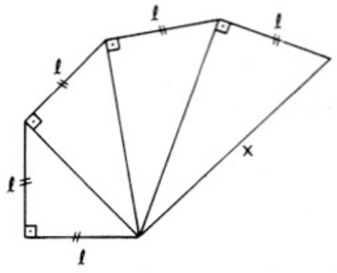


Resolução: Primeiro calculamos **y** e depois **x**, ambos pelo teorema de Pitágoras.

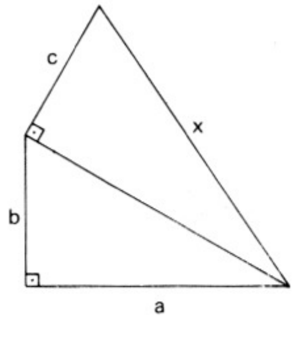
$$y^2 = \ell^2 + \ell^2 \qquad x^2 = \ell^2 + y^2$$
$$y^2 = 2\ell^2 \qquad x^2 = \ell^2 + 2\ell^2$$
$$y = \ell\sqrt{2} \qquad x^2 = 3\ell^2$$
$$x = \ell\sqrt{3}$$

Resposta: $x = \ell\sqrt{3}$

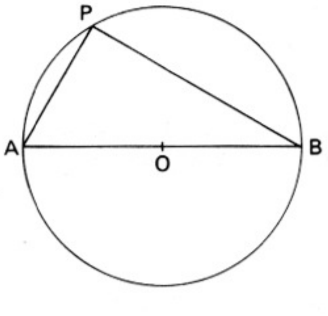
E14.**17** Na figura seguinte, calcule **x** em função de ℓ.



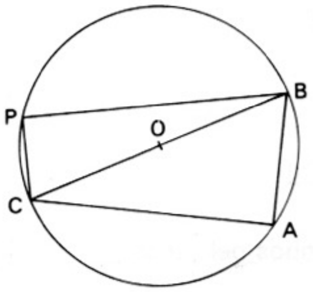
E14.**18** Na figura seguinte, calcule **x** em função de **a**, **b** e **c**.



E14.**19** Na figura seguinte, $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência, AP = 5 e BP = 12. Quanto vale o raio da circunferência?



E14.**20** Na figura seguinte, calcule PC, dados AB = 15, AC = 20 e PB = 24, sabendo ainda que $\overline{BC}$ é um diâmetro da circunferência.



15

Construções com segmentos

Média geométrica ou média proporcional

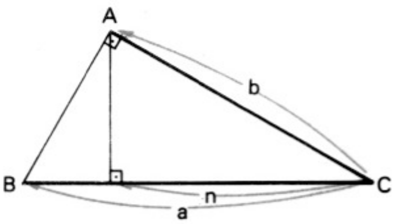
Definição

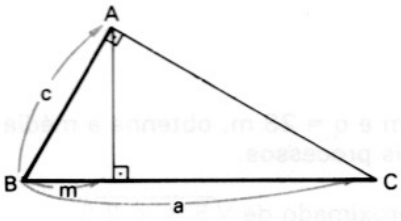
Chama-se média geométrica entre dois segmentos **p** e **q** dados, o segmento **x**, tal que $x^2 = p \cdot q$.

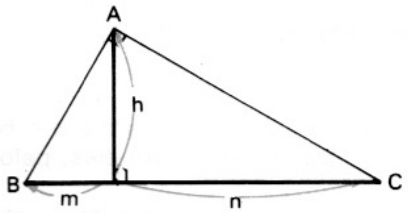
Pela definição acima, convém observar que entre as relações métricas no triângulo retângulo há "três" que traduzem médias geométricas.

Colocamos *três* entre aspas porque duas das médias geométricas indicam exatamente o mesmo fato.

$b^2 = a \cdot n$
$c^2 = a \cdot m$







$b^2 = a \cdot n$

$c^2 = a \cdot m$

$h^2 = m \cdot n$

- Cada cateto é média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela: $b^2 = a \cdot n$; $c^2 = a \cdot m$.
- A altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre as projeções dos catetos: $h^2 = m \cdot n$.

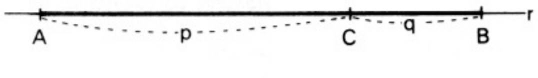
Essas propriedades permitem resolver o seguinte problema:

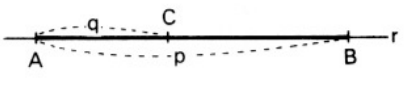
Problema

Obter graficamente a média geométrica entre dois segmentos **p** e **q** dados.

Resolução: Seja **x** o segmento procurado. Podemos obter **x** como altura ou como cateto de um triângulo retângulo:

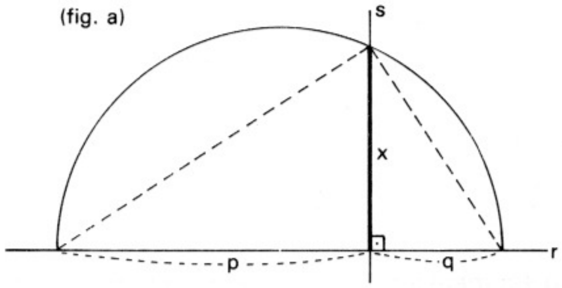
1.º) Dispõem-se **p** e **q** sobre uma reta **r**, segundo qualquer uma das duas maneiras seguintes:



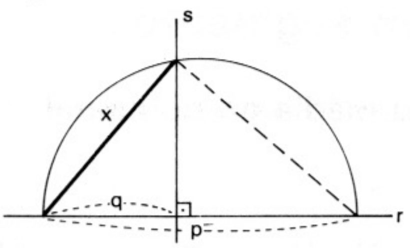


2.º) Traça-se a semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$ (arco capaz de 90°) e em seguida a reta **s** perpendicular a **r** por C. Então **x** fica determinado como altura (fig. a) ou como cateto (fig. b).

(fig. a)



(fig. b)



Observe como a construção da fig. b exige menos espaço. Ela pode ser utilizada quando **p** e **q** são grandes.

Observação: Como aqui só aceitamos **x** positivo, note que $x^2 = p \cdot q$ equivale a $x = \sqrt{p \cdot q}$. Nos dois casos, temos que entender que **x** é a média geométrica entre **p** e **q**.

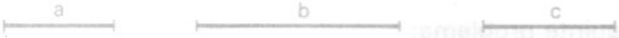
Exercícios

E15.**1** Dados os segmentos p = 60 mm e q = 23 m, obtenha a média geométrica entre eles, pelos dois processos.

E15.**2** Calcule graficamente o valor aproximado de $\sqrt{5,3 \times 3,8}$.

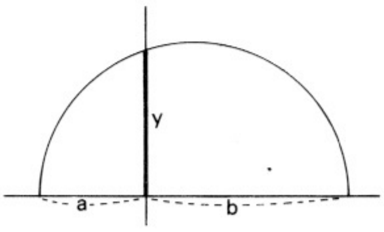
Sugestão: Com dois segmentos, p = 5,3 cm e q = 3,8 cm, você obtém a raiz procurada, por média geométrica. Então, é só medir a resposta.

E15.**3** Dados os segmentos **a**, **b** e **c**, obtenha um segmento **x**, tal que $x = \sqrt{\frac{a^3 \cdot b}{c}}$.

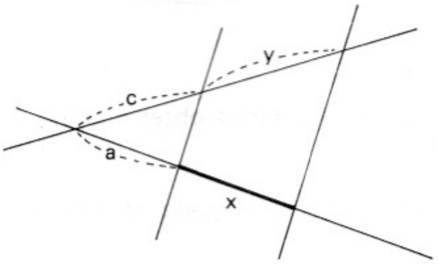


Resolução: Notemos inicialmente que $\sqrt{a^3 \cdot b} = a\sqrt{a \cdot b}$. Desse modo, temos, $x = \frac{a\sqrt{ab}}{c}$.
Fazendo $y = \sqrt{a \cdot b}$, podemos determiná-lo, pois y é uma média geométrica. Mas, nesse caso, ficamos com $x = \frac{a \cdot y}{c}$, isto é, **x** é a quarta proporcional entre **c**, **a** e **y**.

$x = \frac{a \cdot \sqrt{a \cdot b}}{c}$
Fazendo $y = \sqrt{a \cdot b}$,
temos $x = \frac{a \cdot y}{c}$.



$y = \sqrt{ab}$



$$\frac{c}{a} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow x = \frac{a \cdot y}{c} \quad \therefore \quad x = \frac{a\sqrt{ab}}{c}$$

Resolva os exercícios de 77 a 79 do caderno de atividades.

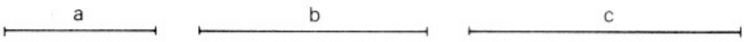
E15.**4** Calcule graficamente o valor aproximado de $\frac{4,2 \times \sqrt{3,7 \times 1,9}}{2,3}$

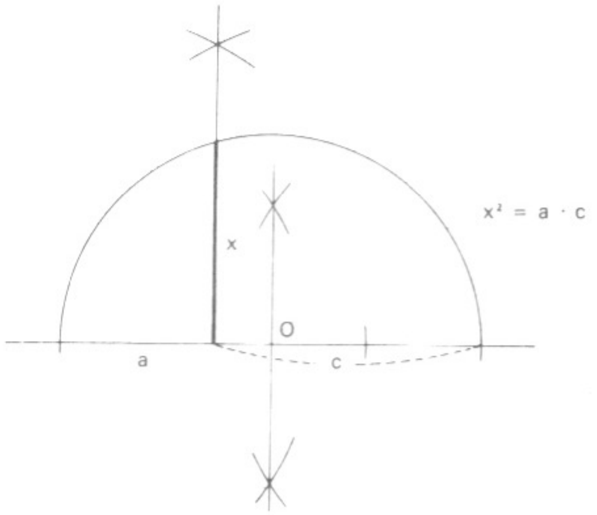
Média geométrica

Figura auxiliar e anotações

Os segmentos **a**, **b** e **c** devem ser utilizados para os exercícios de 77 a 79.

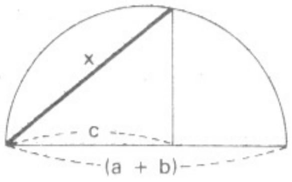
77 Construa a média geométrica entre **a** e **c**.

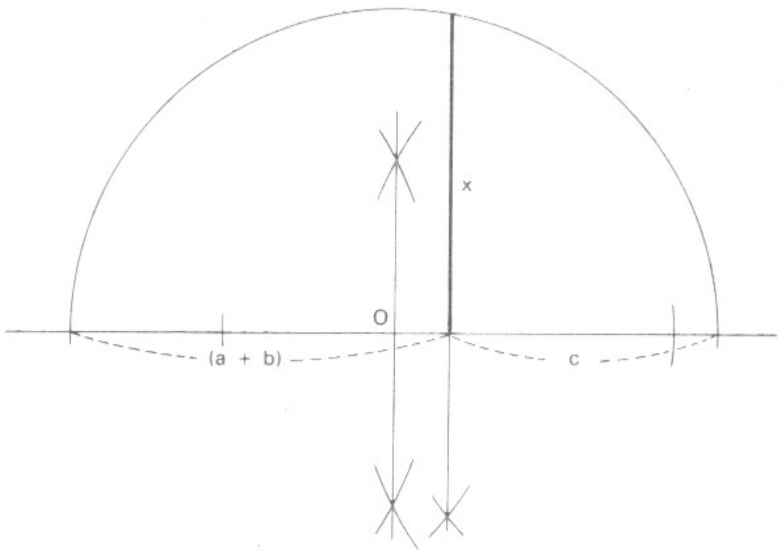




78 Obtenha um segmento **x** tal que $x^2 = (a + b) \cdot c$.
Sugestão: Média geométrica entre $(a + b)$ e **c**.

Observação:
Uma vez que os segmentos em questão são razoavelmente ''grandes'', lembre o aluno que a média geométrica poderia ter sido encontrada segundo a outra disposição.





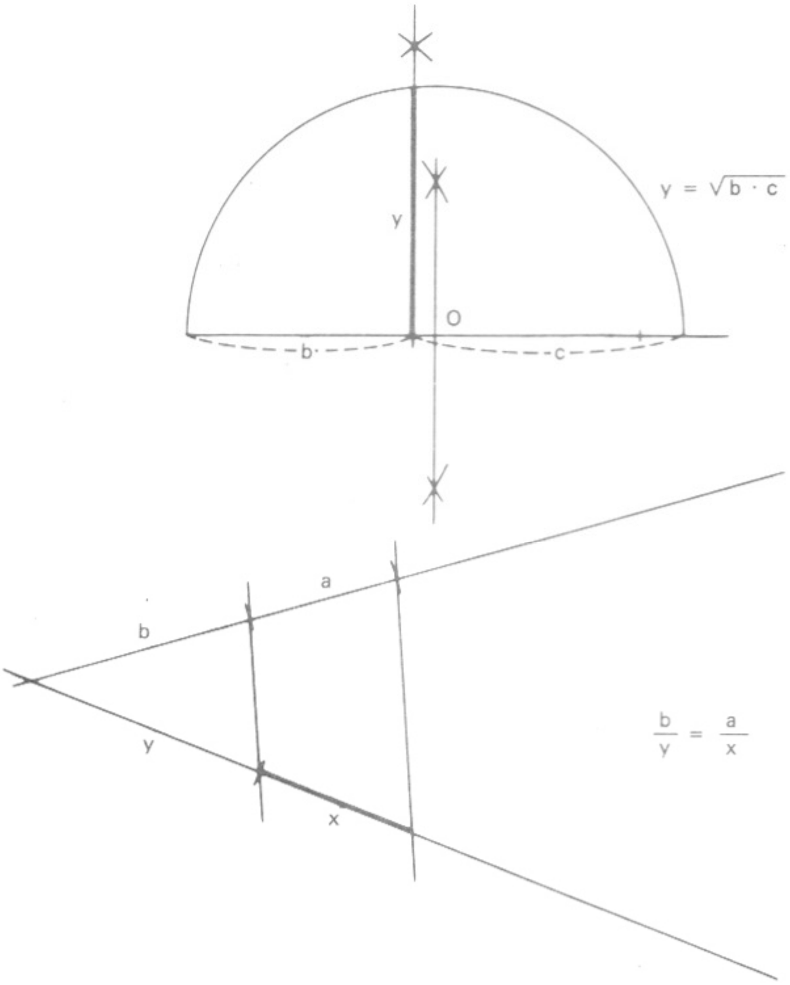
Média geométrica: expressões algébricas

Figura auxiliar e anotações

79 Obtenha **x**, de modo que se tenha $x = \dfrac{a\sqrt{b \cdot c}}{b}$.

Sugestão: Obtenha primeiro $y = \sqrt{b \cdot c}$.

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{a \cdot \sqrt{b \cdot c}}{b} \\ y = \sqrt{b \cdot c} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{a \cdot y}{b} \Rightarrow \boxed{\dfrac{b}{y} = \dfrac{a}{x}}$$

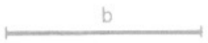


Aplicações do teorema de Pitágoras

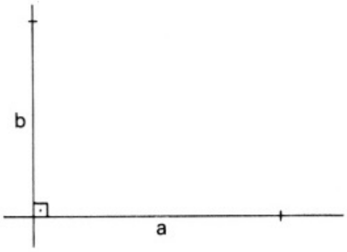
Vamos estudar, agora, uma série de problemas cujas resoluções estão apoiadas no teorema de Pitágoras.

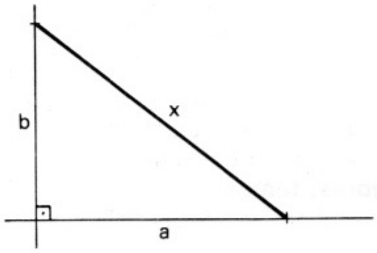
Problema

Dados os segmentos **a** e **b**, determinar um segmento **x** de modo que se tenha $x^2 = a^2 + b^2$ ou $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Resolução: Basta construir um triângulo retângulo de catetos **a** e **b**. A hipotenusa é o segmento **x** procurado.

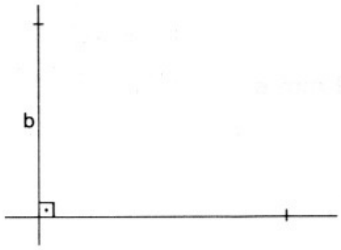


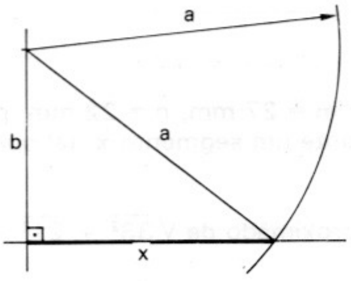


Problema

Dados os segmentos **a** e **b** (a > b), determinar um segmento **x**, de modo que se tenha $x^2 = a^2 - b^2$ ou $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Resolução: Constrói-se, agora, um triângulo retângulo com um cateto **b** e hipotenusa **a**. O outro cateto é o segmento **x** procurado.





Exercícios

E15. **5** Trace os segmentos m = 65 mm e n = 43 mm. Determine graficamente um segmento **x**, tal que:

a) $x^2 = m^2 + n^2$

b) $x^2 = m^2 - n^2$

E15. **6** Calcule graficamente o valor aproximado de:

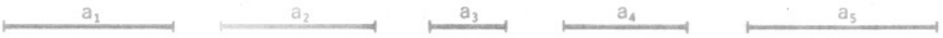
a) $\sqrt{72^2 + 30^2}$

b) $\sqrt{87^2 - 63^2}$

Problema

Dados os segmentos a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, obter um segmento **x** de modo que se tenha $x^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2$ ou $x = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2}$

Nesse tipo de problema, fica liberado o uso do esquadro para o traçado de perpendiculares, dado o número de vezes que se exige essa construção.



Resolução: Constroem-se sucessivamente os triângulos retângulos de:

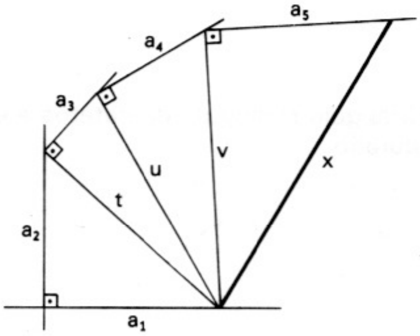
$\boxed{\text{catetos}} \xrightarrow{\text{(obtendo)}} \boxed{\text{hipotenusa}}$

a_1 e $a_2 \longrightarrow t$

a_3 e $t \longrightarrow u$

a_4 e $u \longrightarrow v$

a_5 e $v \longrightarrow \boxed{\mathbf{x}}$



Justificativa: Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$t^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$u^2 = t^2 + a_3^2 = \underline{a_1^2 + a_2^2} + a_3^2$$

$$v^2 = u^2 + a_4^2 = \underline{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + a_4^2$$

$$x^2 = v^2 + a_5^2 = \underline{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} + a_5^2$$

Observação: Evidentemente o processo se generaliza para **n** segmentos dados:

$$\boxed{x^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2}$$

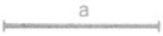
Exercícios

E15.**7** Trace os seguintes segmentos: m = 27 mm, n = 22 mm, p = 19 mm e q = 34 mm. Obtenha graficamente um segmento **x**, tal que $x = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2 + q^2}$.

E15.**8** Calcule graficamente o valor aproximado de $\sqrt{33^2 + 21^2 + 25^2}$.

Problema

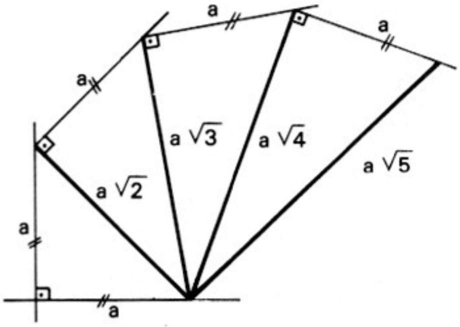
Dado um segmento **a**, obter os segmentos $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{4}$, $a\sqrt{5}$, ...



Resolução: Na realidade, esse problema é um caso particular do anterior, apenas as parcelas são iguais. Determinemos a $\sqrt{5}$ como exemplo:

$$x = a\sqrt{5} \Rightarrow x^2 = 5a^2 \therefore x^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2$$

Assim, a construção seguinte se justifica:



Observação: É evidente que esse processo é pouco prático para a obtenção do segmento $a\sqrt{n}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ quando **n** é grande. Nesses casos, podemos usar o seguinte artifício:

$$x = a\sqrt{n} \Rightarrow x^2 = n \cdot a^2$$

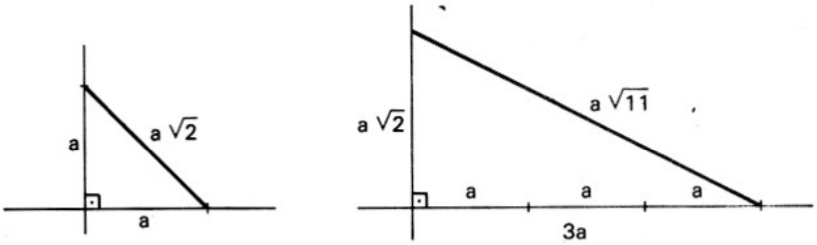
Procuramos agora escrever o segundo membro da última equação $(n \cdot a^2)$ na forma de soma ou diferença onde pelo menos um dos termos é um **quadrado perfeito**. Vejamos como isso simplifica a construção:

Exemplos:

- $x = a\sqrt{11} \Rightarrow x^2 = 11a^2 \Rightarrow x^2 = 9a^2 + 2a^2$

$$\therefore \boxed{x^2 = (3a)^2 + (a\sqrt{2})^2}$$

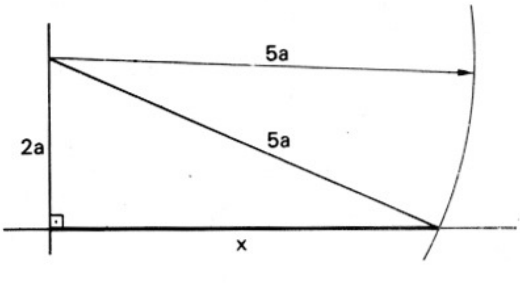
Então, **x** é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos $a\sqrt{2}$ e 3a. Primeiro construímos $a\sqrt{2}$ e depois **x**.



- $x = a\sqrt{21} \Rightarrow x^2 = 21a^2 \Rightarrow x^2 = 25a^2 - 4a^2$

$$\therefore \boxed{x^2 = (5a)^2 - (2a)^2}$$

Então, **x** é um cateto de um triângulo retângulo em que a hipotenusa é 5a e o outro cateto é 2a.



Exercícios

E15. **9** Desmembre os segundos membros das igualdades seguintes na forma de soma ou diferença, onde ao menos um dos termos seja um quadrado perfeito.

a) $x^2 = 17\mathbf{a}^2$
c) $x^2 = 12\mathbf{a}^2$
b) $x^2 = 10\mathbf{a}^2$
d) $x^2 = 22\mathbf{a}^2$

E15. **10** Dado o segmento a = 25 mm, obtenha graficamente os seguintes segmentos.

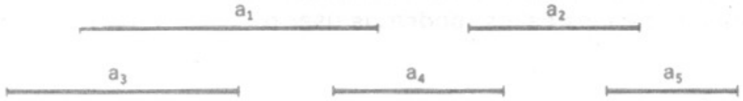
a) $x = a\sqrt{3}$
b) $x = a\sqrt{7}$
c) $x = a\sqrt{15}$

Meça cada um dos resultados obtidos para verificar a precisão do traçado.

E15. **11** Dados os segmentos a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, obtenha um segmento **x**, tal que:

◁IMPORTANTE

$$x^2 = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 - a_5^2$$



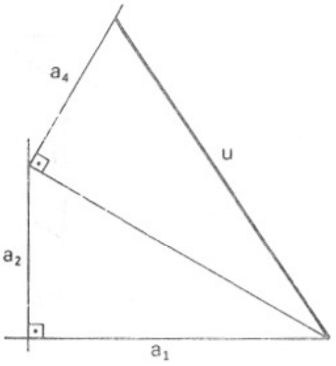
Resolução: Separando as parcelas positivas das negativas recaímos nos problemas anteriores.

$$x^2 = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 - a_5^2 \Leftrightarrow x^2 = \underbrace{(a_1^2 + a_2^2 + a_4^2)}_{u^2} - \underbrace{(a_3^2 + a_5^2)}_{v^2}$$

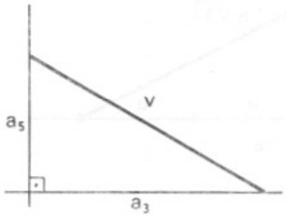
$$\therefore \boxed{x^2 = u^2 - v^2}$$

Evidentemente, o problema só admite solução se u > v.

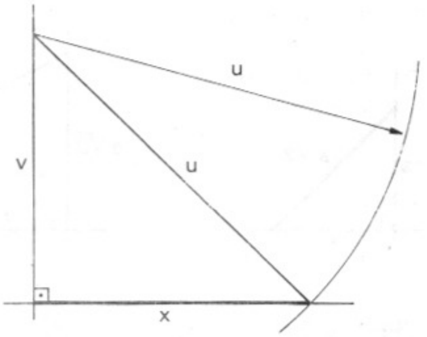
Assim, podemos determinar **u**, depois **v** e finalmente **x**.



$u^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$



$v^2 = a_3^2 + a_5^2$



$$\boxed{x^2 = u^2 - v^2}$$

Uma nota sobre análise dimensional

Já tivemos a oportunidade, no E15.3 e agora no E15.11, de obter um **segmento x** procurado e definido por operações entre segmentos dados, **procedendo** a construção por partes.

No E15.3 pedia-se: $\boxed{x = \dfrac{a\sqrt{a \cdot b}}{c}}$

1.º) construímos: $y = \sqrt{a \cdot b}$

2.º) construímos: $x = \dfrac{a \cdot y}{c}$

y é uma incógnita auxiliar.

No E15.11 pedia-se: $\boxed{x^2 = a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 - a_5^2}$

1.º) construímos **u**, tal que $u^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_4^2$
2.º) construímos **v**, tal que $v^2 = a_3^2 + a_5^2$
3.º) construímos **x**, tal que $x^2 = u^2 - v^2$

u e **v** são incógnitas auxiliares.

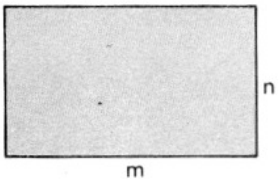
Pois bem, nesses tipos de problemas, estamos nos utilizando de incógnitas auxiliares que, uma vez determinadas, permitem obter a incógnita de fato procurada. Porém, é necessário algum cuidado ao trocar uma parte da expressão por uma incógnita auxiliar. Isso porque precisamos ficar atentos à dimensão dessa parte. Então veja:

PRODUTO DE DOIS SEGMENTOS = (SEGMENTO)^2

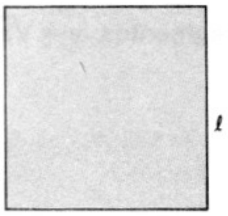
$$\boxed{m \cdot n = \ell^2}$$

Podemos interpretar esse fato geometricamente da seguinte forma:
O produto dos segmentos **m** e **n** representa a área de um retângulo de lados **m** e **n**, enquanto ℓ é apenas um comprimento. Se escrevêssemos $m \cdot n = \ell$, essa igualdade não teria significado geométrico, pois estaríamos dizendo ÁREA = COMPRIMENTO, o que é um absurdo. Já ℓ^2 representa a área de um quadrado de lado ℓ, de modo que escrevendo $m \cdot n = \ell^2$, estamos dizendo ÁREA = ÁREA, isto é, elementos de mesma natureza.

Você aprendeu que a **2.ª potência** é chamada **quadrado**. A origem desse termo vem do fato de que ℓ^2 representa a área de um quadrado.
O mesmo ocorre com a **3.ª potência**, chamada **cubo**. A origem está no fato de que ℓ^3 representa o volume de um cubo de aresta ℓ.

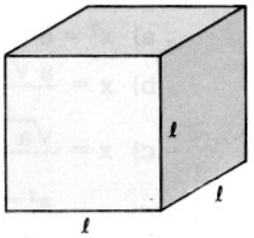


área do retângulo = $m \cdot n$



área do quadrado = ℓ^2

Para auxiliar uma análise dimensional de uma expressão qualquer, podemos proceder da seguinte forma: simbolizamos por L tudo o que tiver **uma só dimensão**, isto é, **elementos lineares**, ou seja, elementos que **só possuem comprimento**. Daí para frente, podemos simbolizar por L^2 elementos de duas dimensões, que geometricamente são interpretados como áreas; por L^3 os de três dimensões, interpretados como volumes; de L^4 em diante, já não interpretamos geometricamente, embora eles possam comparecer numa expressão e serem "simplificados".



volume do cubo = ℓ^3

Sabendo ainda que a soma ou diferença entre elementos de mesma dimensão, ou grandezas de mesma natureza, resulta num elemento da mesma dimensão, podemos processar análises dimensionais das expressões.

Veja os exemplos, onde **a**, **b**, **c** e **d** são segmentos de reta.

- $\dfrac{a \cdot b}{c} \to \dfrac{\cancel{L} \cdot L}{\cancel{L}} \to L$ (segmento de reta)
- $\dfrac{\overbrace{(a + b - c)}^{L} \cdot d}{a} \to \dfrac{\cancel{L} \cdot L}{\cancel{L}} \to L$ (segmento de reta)
- $\dfrac{a\sqrt{a \cdot b}}{c} \to \dfrac{\cancel{L} \cdot \sqrt{L \cdot L}}{\cancel{L}} \to \sqrt{L^2} \to L$ (segmento de reta)
- $\dfrac{\overbrace{(a + b - c)}^{L} \cdot a \cdot d}{b \cdot c} \to \dfrac{\cancel{L} \cdot \cancel{L} \cdot L}{\cancel{L} \cdot \cancel{L}} \to L$ (segmento de reta)
- $\dfrac{\overbrace{(a^2 - b^2)}^{L^2} \cdot c}{d} \to \dfrac{L^2 \cdot \cancel{L}}{\cancel{L}} \to L^2$ (área)

Observe que, no último exemplo, sendo **y** uma incógnita auxiliar, seria **incorreto** escrever:

$$y = \frac{(a^2 - b^2) \cdot c}{d}$$

Isso porque de um lado teríamos um comprimento (**y**) e de outro uma área, isto é, estaríamos igualando elementos de dimensões diferentes. O certo seria escrever:

$$y^2 = \frac{(a^2 - b^2) \cdot c}{d}$$

Porém, o leitor não deve se preocupar demais com isso, pois esses comentários só foram feitos para evitar erros no momento de introduzir uma incógnita auxiliar. Ela deve ser sempre um segmento, e representar uma expressão com a qual sabemos trabalhar graficamente. Resumindo, as incógnitas auxiliares só podem ser:

- **Quarta proporcional**: $y = \frac{a \cdot b}{c}$ (y = incógnita auxiliar)
- **Terceira proporcional**: $y = \frac{a^2}{b}$
- **Média geométrica**: $y = \sqrt{a \cdot b}$
- **Soma ou diferença de segmentos**: $y = a + b - c$ etc.
- **Soma ou diferença de quadrados de segmentos**: $y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$, isto é, $y^2 = a^2 + b^2 - c^2$ etc.

Exercício

E15. **12** São dados os segmentos a = 38 mm, b = 26 mm e c = 21 mm. Determine graficamente o segmento **x** nos seguintes casos.

a) $x^2 = a^2 - b^2 + c^2$

b) $x = \frac{a\sqrt{b^2 - c^2}}{b}$ **Sugestão**: Determine primeiro $y = \sqrt{b^2 - c^2}$.

c) $x = \frac{\sqrt{a \cdot b} \cdot c\sqrt{2}}{b}$

d) $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a - b + c}$

Sugestão: primeiro $y^2 = a^2 - b^2 + c^2$, então $x = \frac{y_2}{a - b + c}$

Resolva os exercícios de 80 a 86 do caderno de atividades.

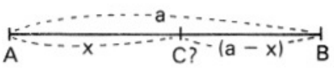
Segmento áureo

Problema

Dado um segmento AB, determinar um ponto C, interno a $\overline{AB}$, tal que $\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$ ou ainda $(AC)^2 = AB \cdot CB$.

Observe que AC é a média geométrica entre AB e CB.

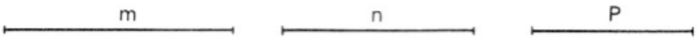
Suposto resolvido

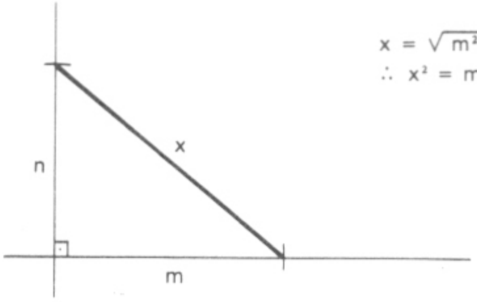


Aplicações do teorema de Pitágoras

Os segmentos **m**, **n** e **p** serão utilizados nos exercícios de 80 a 83, nos quais se pede **x** de modo que:

80 $x = \sqrt{m^2 + n^2}$





$x = \sqrt{m^2 + n^2}$
$\therefore\ x^2 = m^2 + n^2$

81 $x = \sqrt{m^2 - p^2}$

$x = \sqrt{m^2 - p^2}$
$x^2 = m^2 - p^2$
$\therefore\ m^2 = x^2 + p^2$

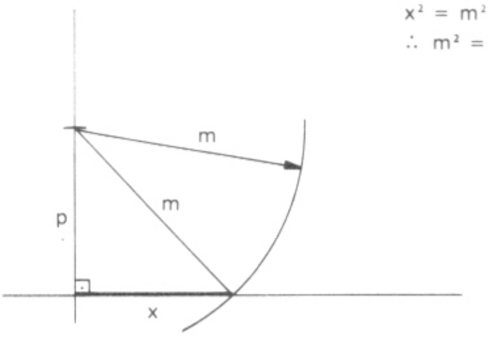
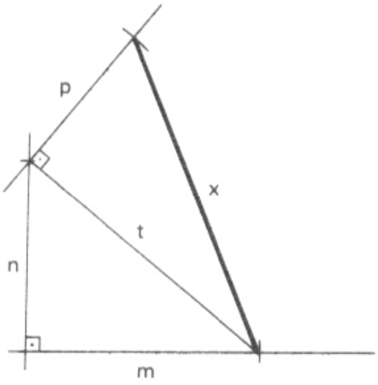


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Convém liberar o uso do esquadro para o traçado de perpendiculares durante a série de exercícios sobre as aplicações do teorema de Pitágoras.

Aplicações do teorema de Pitágoras

82 $x = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$

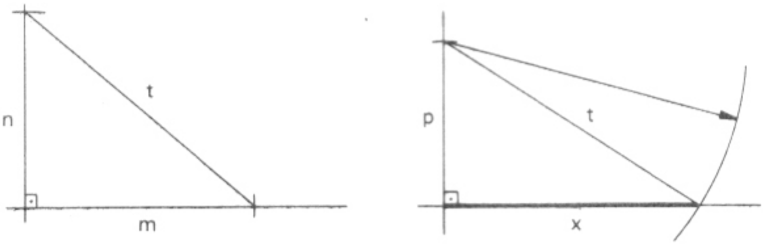


$x = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$

$x^2 = \underbrace{m^2 + n^2}_{\downarrow} + p^2$

$\therefore\ x^2 = t^2 + p^2$

83 $x = \sqrt{m^2 + n^2 - p^2}$



$x = \sqrt{m^2 + n^2 - p^2}$

$x^2 = \underbrace{m^2 + n^2}_{\downarrow} - p^2$

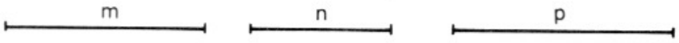
$\therefore\ x^2 = t^2 - p^2$

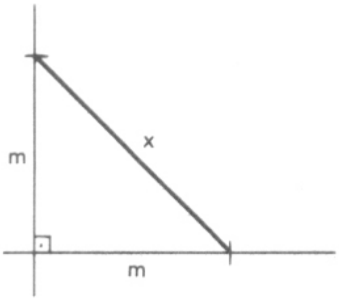
Aplicações do teorema de Pitágoras

Figura auxiliar e anotações

Os segmentos **m**, **n** e **p** serão utilizados nos exercícios de 84 a 86, nos quais se pede o segmento **x**, tal que:

84 $x = m\sqrt{2}$

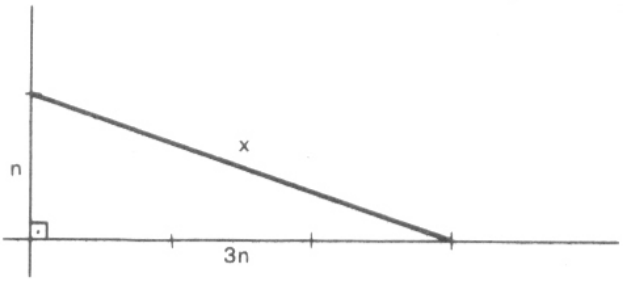




$$x^2 = m^2 + m^2$$
$$x^2 = 2\,m^2$$
$$x = m\sqrt{2}$$

85 $x = n\sqrt{10}$

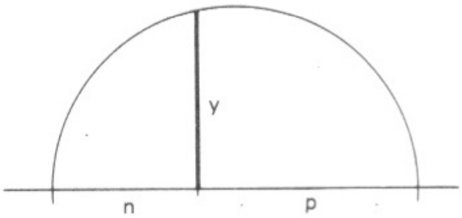
$$x = n\sqrt{10} \Rightarrow x^2 = 10n^2 \Rightarrow x^2 = 9n^2 + n^2$$
$$\therefore\ x^2 = (3n)^2 + n^2$$

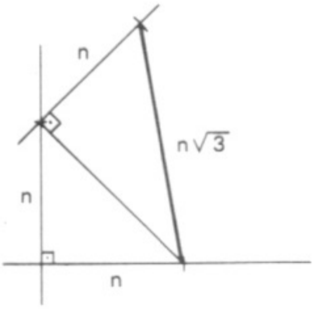


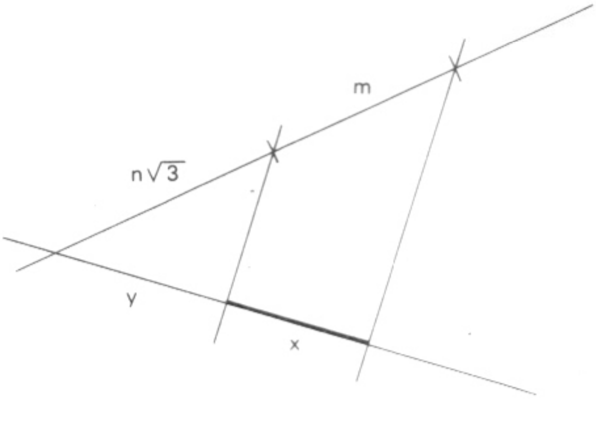
Aplicações do teorema de Pitágoras

86 $x = \dfrac{m \cdot \sqrt{n \cdot p}}{n \cdot \sqrt{3}}$

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{m \cdot \sqrt{n \cdot p}}{n\sqrt{3}} \\ y = \sqrt{n \cdot p} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{m \cdot y}{n\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\dfrac{n\sqrt{3}}{y} = \dfrac{m}{x}}$$







Observe que, no último exemplo, sendo **y** uma incógnita auxiliar, seria **incorreto** escrever:

$$y = \frac{(a^2 - b^2) \cdot c}{d}$$

Isso porque de um lado teríamos um comprimento (**y**) e de outro uma área, isto é, estaríamos igualando elementos de dimensões diferentes. O certo seria escrever:

$$y^2 = \frac{(a^2 - b^2) \cdot c}{d}$$

Porém, o leitor não deve se preocupar demais com isso, pois esses comentários só foram feitos para evitar erros no momento de introduzir uma incógnita auxiliar. Ela deve ser sempre um segmento, e representar uma expressão com a qual sabemos trabalhar graficamente. Resumindo, as incógnitas auxiliares só podem ser:

- **Quarta proporcional**: $y = \frac{a \cdot b}{c}$ (y = incógnita auxiliar)
- **Terceira proporcional**: $y = \frac{a^2}{b}$
- **Média geométrica**: $y = \sqrt{a \cdot b}$
- **Soma ou diferença de segmentos**: $y = a + b - c$ etc.
- **Soma ou diferença de quadrados de segmentos**: $y = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$, isto é, $y^2 = a^2 + b^2 - c^2$ etc.

Exercício

E15. **12** São dados os segmentos a = 38 mm, b = 26 mm e c = 21 mm. Determine graficamente o segmento **x** nos seguintes casos.

a) $x^2 = a^2 - b^2 + c^2$

b) $x = \frac{a\sqrt{b^2 - c^2}}{b}$ **Sugestão**: Determine primeiro $y = \sqrt{b^2 - c^2}$.

c) $x = \frac{\sqrt{a \cdot b} \cdot c\sqrt{2}}{b}$

d) $x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a - b + c}$

Sugestão: primeiro $y^2 = a^2 - b^2 + c^2$, então $x = \frac{y_2}{a - b + c}$

Resolva os exercícios de 80 a 86 do caderno de atividades.

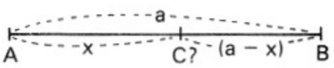
Segmento áureo

Problema

Dado um segmento AB, determinar um ponto C, interno a $\overline{AB}$, tal que $\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$ ou ainda $(AC)^2 = AB \cdot CB$.

Observe que AC é a média geométrica entre AB e CB.

Suposto resolvido



Resolução: Esta resolução é um tanto artificiosa, por isso acompanhe com bastante atenção.
Fazendo AB = a e AC = x, teremos CB = a − x. Assim:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$$

$$x^2 = a^2 - ax$$

$$\boxed{x^2 + ax = a^2} \quad (1)$$

Somando, agora, $\frac{a^2}{4}$ a ambos os membros da equação (1) teremos:

$$\underbrace{x^2 + ax + \frac{a^2}{4}} = a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$\boxed{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad (2)$$

Observe atentamente a equação (2). Nela se vê a relação de Pitágoras, onde:

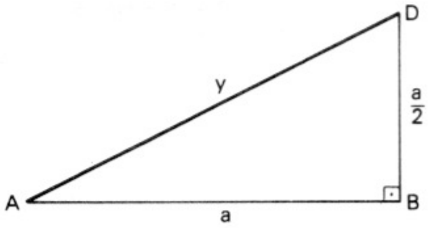
$$\begin{cases} \left(x + \frac{a}{2}\right) \text{ é a hipotenusa} \\ a \text{ e } \frac{a}{2} \text{ são os catetos} \end{cases}$$

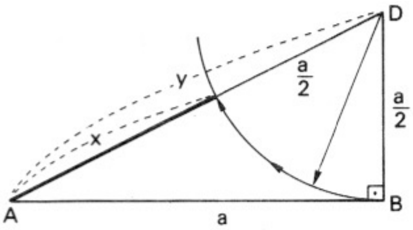
Mas esse triângulo é construtível, pois dele conhecemos os dois catetos. Sendo **y** a sua hipotenusa, teremos:

$$x + \frac{a}{2} = y$$

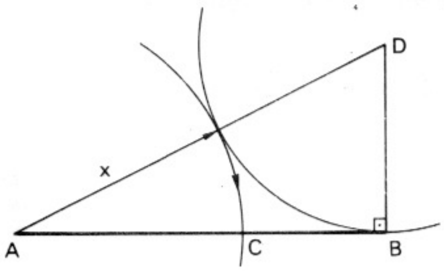
$$\text{ou } \boxed{x = y - \frac{a}{2}}$$

Isto é, construindo um triângulo retângulo de catetos **a** e $\frac{a}{2}$, obtemos **x** subtraindo $\frac{a}{2}$ da hipotenusa.





Com isso, determinamos o comprimento do segmento AC. Agora, com centro em A e raio igual a **x**, traçamos um arco de circunferência, o qual intercepta $\overline{AB}$ no ponto C procurado.



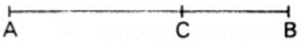
Podemos, agora, definir o segmento áureo.

Definição

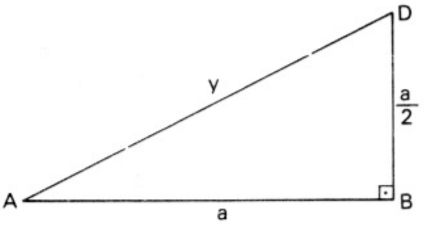
O segmento AC que satisfaz as condições do problema anterior, ou qualquer outro segmento congruente a ele, é denominado **segmento áureo de $\overline{AB}$**.

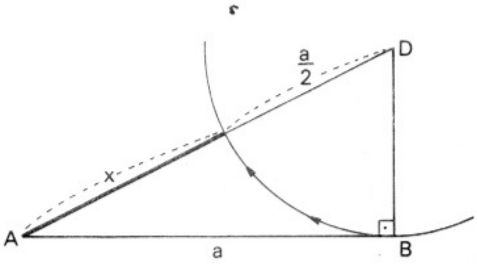
Dizer que $\overline{AC}$ é o segmento áureo de $\overline{AB}$, equivale a dizer que C é um ponto do segmento AB, tal que:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC}$$



Ainda com relação ao que ficou exposto no problema anterior, vamos determinar o comprimento do segmento áureo em função de **a**.





Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo ABD, temos:

$$y^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$y^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$y^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{y = \frac{a\sqrt{5}}{2}}$$

Como $y = x + \frac{a}{2}$, temos:

$$x + \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)}$$

Assim, se um segmento tem comprimento **a**, o seu áureo tem comprimento $\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Convém saber que

$\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \simeq 0{,}618a$

Exercícios

E15. **13** Construa o segmento áureo de um segmento AB de 53 mm de comprimento. Qual é, aproximadamente, a medida desse segmento áureo?

E15. **14** São dados os segmentos m = 60 mm, n = 40 mm e p = 50 mm. Construa um triângulo ABC sabendo que:

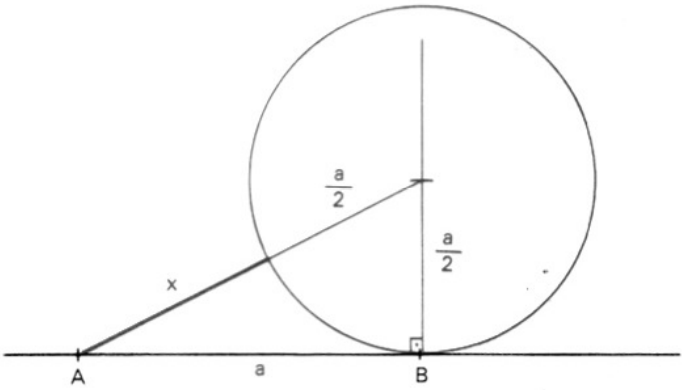
- **a** é o áureo de **m**.
- **b** é a média geométrica entre **n** e **p**.
- **c** é a terceira proporcional entre **p** e **n**.

Qual é o valor do perímetro desse triângulo?

Resolva os exercícios de 87 a 89 do caderno de atividades.

Segmento áureo

87 Construa o segmento áureo de $\overline{AB}$.



88 Construa um triângulo isósceles cujos lados congruentes têm comprimento ℓ e cuja base é o segmento áureo de ℓ. Verifique que o ângulo do vértice mede 36°.

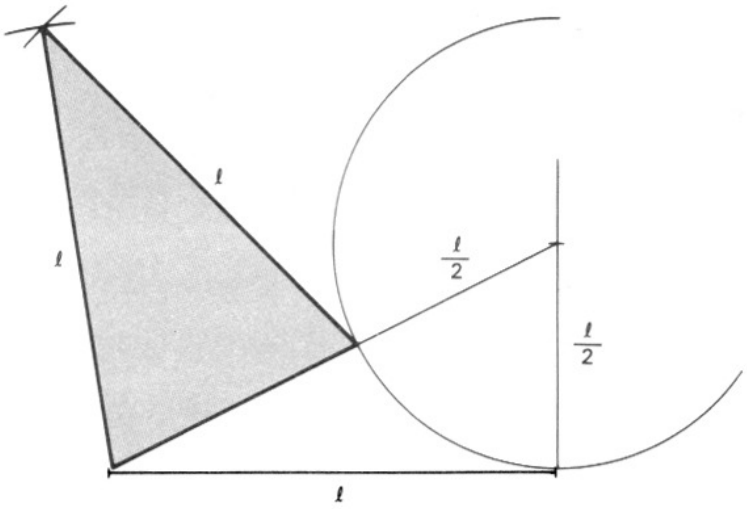


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Insista que, para se obter o áureo de um segmento **a**, faz-se o seguinte:

1.º) triângulo retângulo de catetos **a** e $\frac{a}{2}$

2.º) áureo =
= (hipotenusa) $-\frac{a}{2}$

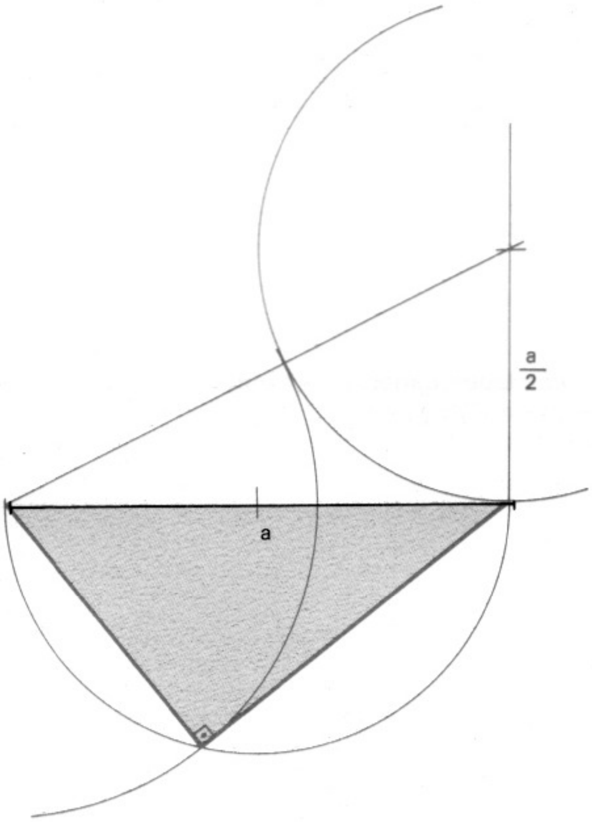
Observação:
Aproveite para comentar que, futuramente (2.º volume), demonstrar-se-á que de fato o ângulo em questão mede 36° e, sendo esse valor a décima parte de 360°, conclui-se que o lado do decágono regular é o áureo do raio da circunferência circunscrita.

Segmento áureo

89 É dada a hipotenusa **a** de um triângulo retângulo. Construa esse triângulo, sabendo que um dos catetos é o áureo da hipotenusa **a**.

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Comente que a construção abaixo é um bom exemplo de planejamento para a execução dos traçados. Aproveita-se o fato de que já estava determinado o ponto médio de **a** (foi necessário determiná-lo para construir o áureo), facilitando a construção do arco capaz de 90°.



16

Triângulos

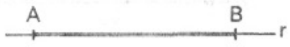
Este capítulo será dedicado fundamentalmente às construções de triângulos. Embora nos capítulos anteriores você já tenha sido solicitado a construir triângulos, estudaremos com mais detalhes essas construções, as quais constituem um tópico importantíssimo do Desenho Geométrico. Você pode se preparar, pois terá agora a oportunidade de aplicar tudo o que já foi estudado até aqui e mais o que se acrescentará. Porém, uma advertência inicial! É imprescindível que você domine bem as definições e propriedades que serão colocadas a seguir, pois elas reúnem os elementos geométricos dos quais dependerá todo o aprendizado. Se necessário, estude as definições mais de uma vez, até certificar-se que está bem familiarizado com as mesmas.

Cevianas notáveis

Definição

Ceviana é todo segmento que tem uma extremidade num vértice qualquer de um triângulo e a outra num ponto qualquer da reta suporte do lado oposto a esse vértice.

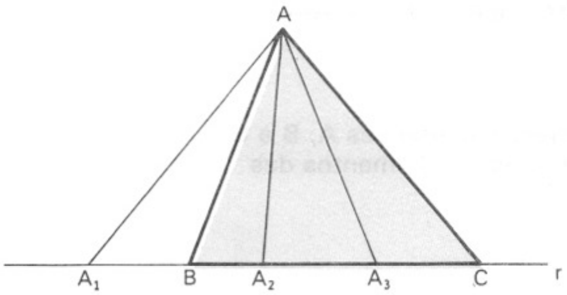
Reta suporte de um segmento, ou, simplesmente, suporte de um segmento, é a reta na qual esse segmento está contido.



r é o suporte de $\overline{AB}$

O nome **ceviana** foi dado a esses segmentos como uma homenagem ao matemático italiano Giovanni Ceva (1648-1734), que demonstrou teoremas importantes sobre eles.

Ceva → Ceviana



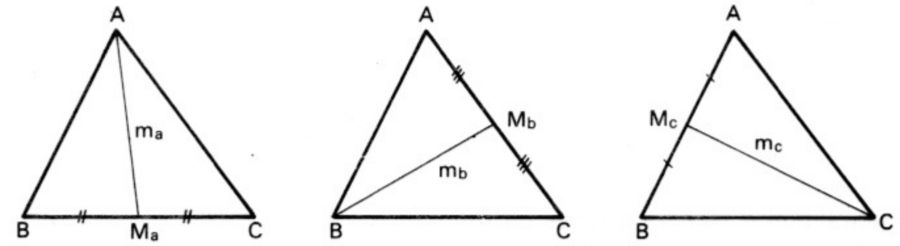
Conforme a definição, uma das extremidades da ceviana é um vértice. Diremos, então, que a ceviana é **relativa** a esse vértice, ou relativa ao lado oposto ao mesmo. A outra extremidade da ceviana é denominada **pé**. Assim, na figura anterior, as cevianas $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_2}$ e $\overline{AA_3}$ são relativas ao vértice A ou, também, relativas ao lado $\overline{BC}$, e os pontos A_1, A_2 e A_3 são os pés dessas cevianas.

Evidentemente, de cada vértice de um triângulo podem-se traçar infinitas cevianas, as quais podem ser internas ou externas ao mesmo. Porém, dentre as cevianas, há três que são muito importantes, por isso chamadas **notáveis**. Passemos a defini-las.

Mediana

Definição

Mediana é toda ceviana que tem uma extremidade no ponto médio de um lado.

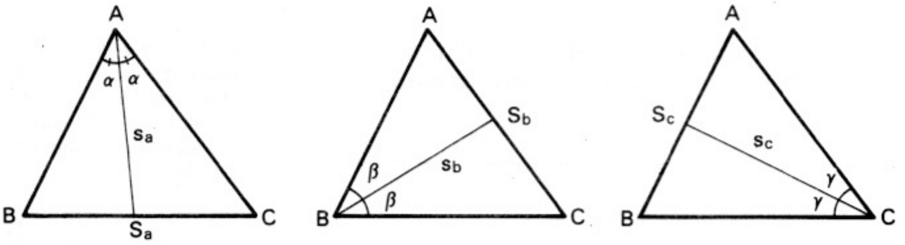

A
m_a
B
M_a
C
A
M_b
m_b
B
C
A
M_c
m_c
B
C

Convenções: Os pontos médios dos lados opostos aos vértices A, B e C serão denotados por M_a, M_b e M_c, respectivamente, e os comprimentos das medianas relativas aos mesmos serão denotados por m_a, m_b e m_c.

Bissetriz interna

Definição

Bissetriz interna é toda ceviana que divide um ângulo interno em dois ângulos adjacentes e congruentes.

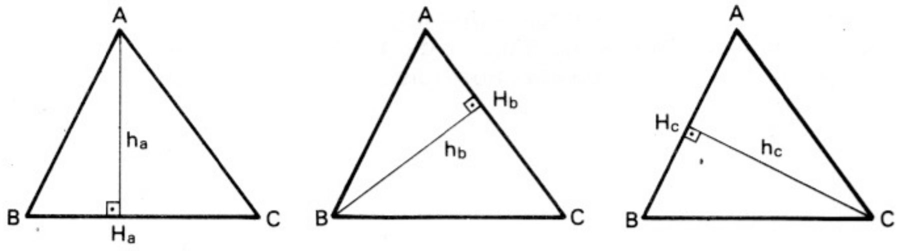

A
α
α
s_a
B
S_a
C
A
S_b
β
s_b
β
B
C
A
S_c
s_c
γ
γ
B
C

Convenções: Os pés das bissetrizes internas relativas aos vértices A, B e C serão denotados por S_a, S_b e S_c, respectivamente, e os comprimentos das mesmas por s_a, s_b e s_c.

Altura

Definição

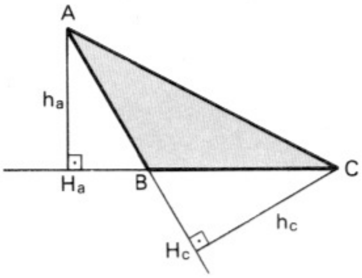
Altura é toda ceviana perpendicular a um lado ou ao seu suporte.

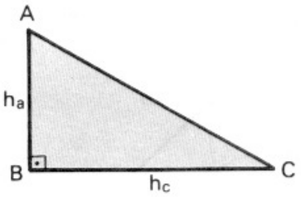

A
h_a
B
H_a
C
A
H_b
h_b
B
C
A
H_c
h_c
B
C

Convenções: Os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C, serão denotados por H_a, H_b e H_c, e os comprimentos dessas alturas por h_a, h_b e h_c, respectivamente.

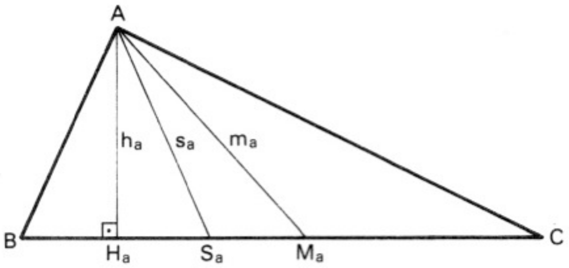
Observações:

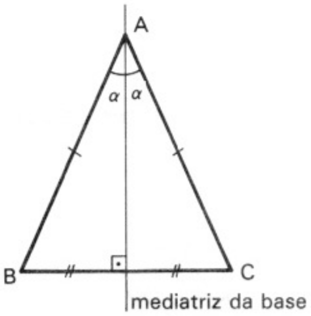
- Convém notar que, dentre as três cevianas notáveis, a altura é a única que pode ser externa (no triângulo obtusângulo), ou mesmo coincidir com um lado (no triângulo retângulo).





- Também é importante observar que a mediana, a bissetriz interna e a altura, relativas a um mesmo vértice, são cevianas distintas, mas as três coincidem quando relativas à base de um triângulo isósceles, e nesse caso estão ainda contidas na mediatriz da base.





Resolva os exercícios de 90 a 93 do caderno de atividades.

Pontos notáveis de um triângulo

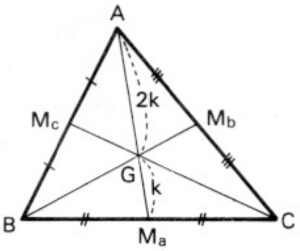
Para qualquer triângulo valem as seguintes propriedades:

- As três medianas concorrem num mesmo ponto.
- As três bissetrizes internas concorrem num mesmo ponto.
- As retas suportes das três alturas concorrem num mesmo ponto.
- As mediatrizes dos lados concorrem num mesmo ponto.

Esses pontos de encontro das cevianas notáveis e das mediatrizes são denominados **pontos notáveis**. Dois deles já foram apresentados anteriormente (circuncentro e incentro), mas ainda assim serão aqui revistos.

Baricentro: G

É o ponto onde concorrem as medianas de um triângulo qualquer.



$$AG = \frac{2}{3}m_a \ , \ GM_a = \frac{1}{3}m_a$$

$$BG = \frac{2}{3}m_b \ , \ GM_b = \frac{1}{3}m_b$$

$$CG = \frac{2}{3}m_c \ , \ GM_c = \frac{1}{3}m_c$$

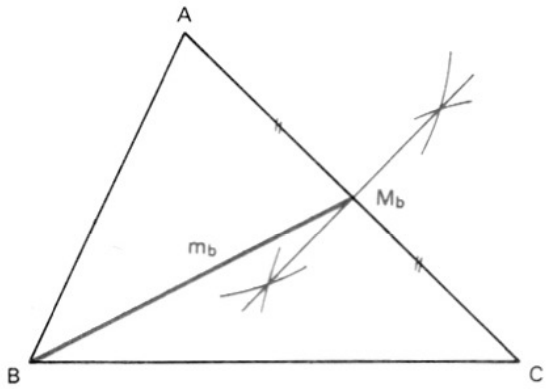
Propriedade

O **baricentro** de um triângulo divide cada mediana na **razão de 2 para 1**, a partir do vértice.

Dizer que o baricentro divide cada mediana em dois segmentos proporcionais a 2 e 1 equivale a dizer que um deles é $\frac{2}{3}$ da mediana e o outro $\frac{1}{3}$ dela.

Cevianas notáveis: mediana e bissetriz interna

90 Construa a mediana relativa ao vértice B do triângulo ABC.



91 Construa a bissetriz interna relativa ao vértice A do triângulo ABC.

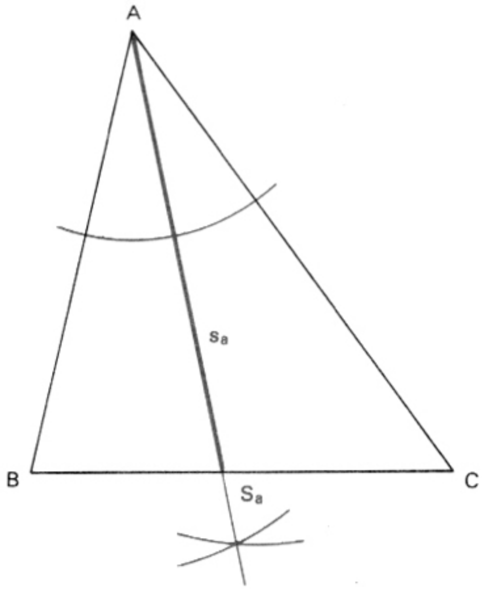


Figura auxiliar e anotações

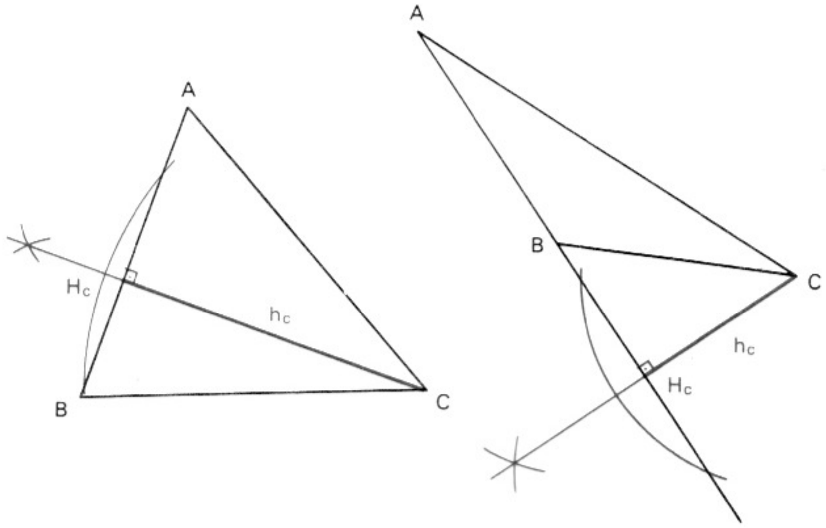
Observação:
Reforce, a cada um dos exercícios que pedem as construções das cevianas notáveis, as convenções das letras associadas aos pés das cevianas (M_a, M_b e M_c), bem como aos seus comprimentos (m_a, m_b e m_c).

Sugestão:
Já com a intenção de "preparar" os pontos notáveis, peça ao aluno que trace as duas outras medianas.

Sugestão:
Peça ao aluno que trace as outras duas bissetrizes internas para que ele "veja" o incentro.

Cevianas notáveis: altura, mediana e bissetriz

92 Construa a altura relativa ao vértice C do triângulo ABC, nos dois casos.



93 Construa a bissetriz, a mediana e a altura relativa ao vértice A do triângulo ABC.

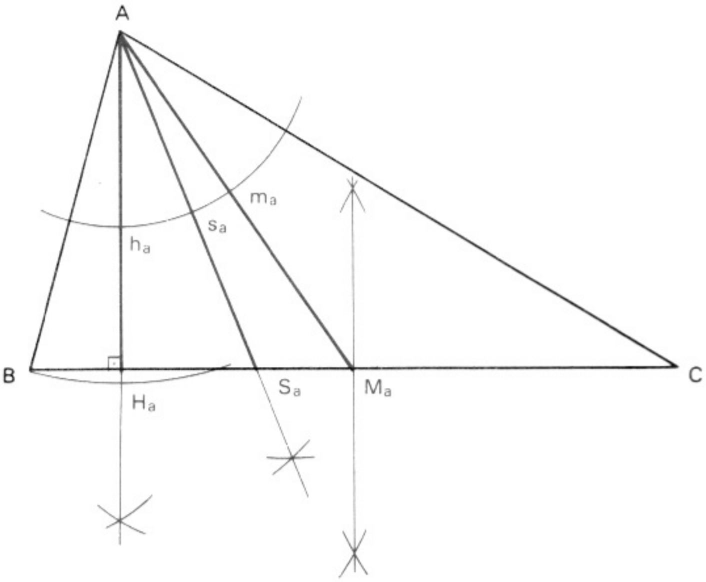


Figura auxiliar e anotações

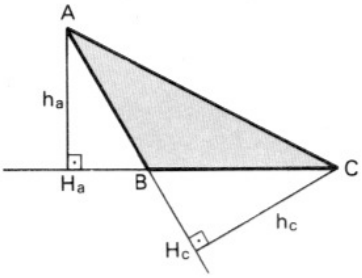
Observação:
Insista com o aluno que a altura pode ser uma ceviana externa, enquanto que isso não ocorre com a bissetriz interna e a mediana.

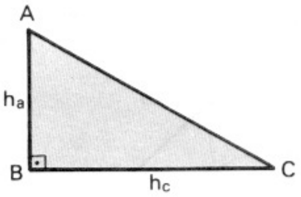
Sugestão:
Peça ao aluno que trace as outras duas alturas e, no caso do triângulo obtusângulo, destaque que o ortocentro é um ponto externo ao triângulo.

Observação:
Reforce com o aluno que altura, bissetriz e mediana são segmentos distintos, com funções diferentes e que, excepcionalmente, elas coincidem quando relativas ao vértice de um triângulo isósceles.

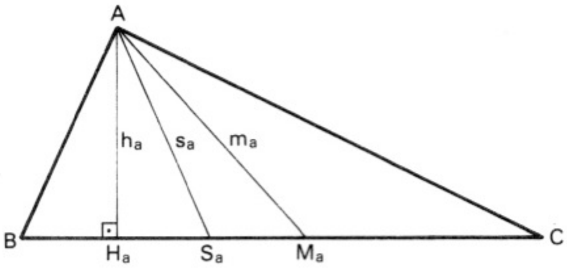
Observações:

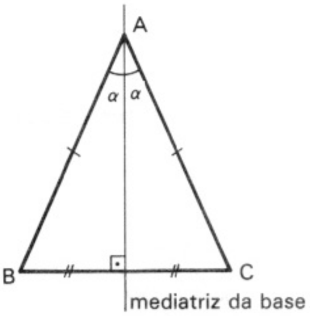
- Convém notar que, dentre as três cevianas notáveis, a altura é a única que pode ser externa (no triângulo obtusângulo), ou mesmo coincidir com um lado (no triângulo retângulo).





- Também é importante observar que a mediana, a bissetriz interna e a altura, relativas a um mesmo vértice, são cevianas distintas, mas as três coincidem quando relativas à base de um triângulo isósceles, e nesse caso estão ainda contidas na mediatriz da base.





Resolva os exercícios de 90 a 93 do caderno de atividades.

Pontos notáveis de um triângulo

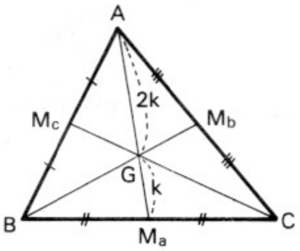
Para qualquer triângulo valem as seguintes propriedades:

- As três medianas concorrem num mesmo ponto.
- As três bissetrizes internas concorrem num mesmo ponto.
- As retas suportes das três alturas concorrem num mesmo ponto.
- As mediatrizes dos lados concorrem num mesmo ponto.

Esses pontos de encontro das cevianas notáveis e das mediatrizes são denominados **pontos notáveis**. Dois deles já foram apresentados anteriormente (circuncentro e incentro), mas ainda assim serão aqui revistos.

Baricentro: G

É o ponto onde concorrem as medianas de um triângulo qualquer.



$$AG = \frac{2}{3}m_a \ , \ GM_a = \frac{1}{3}m_a$$

$$BG = \frac{2}{3}m_b \ , \ GM_b = \frac{1}{3}m_b$$

$$CG = \frac{2}{3}m_c \ , \ GM_c = \frac{1}{3}m_c$$

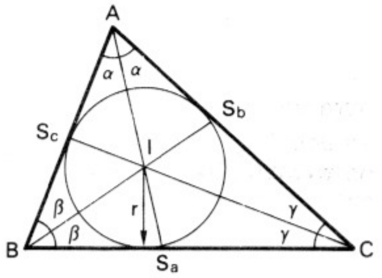
Propriedade

O **baricentro** de um triângulo divide cada mediana na **razão de 2 para 1**, a partir do vértice.

Dizer que o baricentro divide cada mediana em dois segmentos proporcionais a 2 e 1 equivale a dizer que um deles é $\frac{2}{3}$ da mediana e o outro $\frac{1}{3}$ dela.

Incentro: I

É o ponto onde concorrem as bissetrizes internas de um triângulo qualquer.



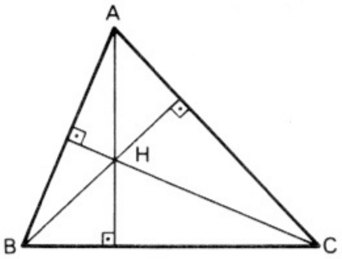
Propriedade

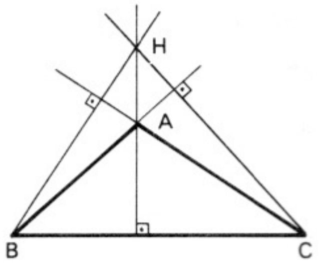
O **incentro** é o centro da circunferência inscrita num triângulo.

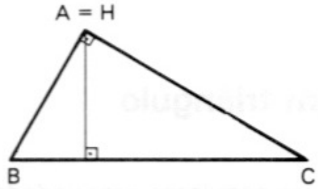
Observação: O raio da circunferência inscrita será denotado por **r**.

Ortocentro: H

É o ponto onde concorrem as retas suportes das alturas de um triângulo qualquer.



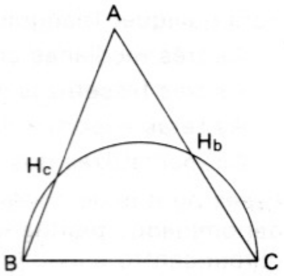


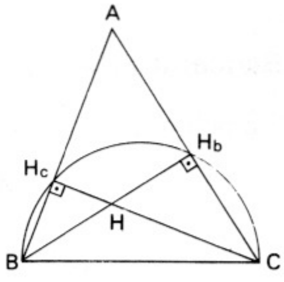


Observação: O ortocentro pode ser interno (no triângulo acutângulo), externo (no triângulo obtusângulo) ou coincidente com um vértice (no triângulo retângulo).

Orientação: Quando se trata de traçar as três medianas, as três bissetrizes ou as três alturas, evidentemente basta construir duas delas, pois a terceira passa pelo vértice restante e pelo ponto de intersecção das duas primeiras. Em particular, para obter as três alturas de um triângulo, podemos proceder os seguintes traçados.

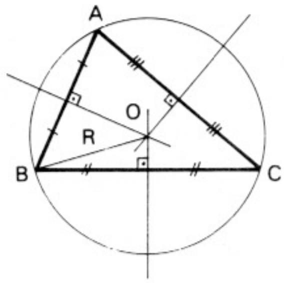
1.º) Arco capaz de 90° sobre $\overline{BC}$, por exemplo determinando H_b e H_c.
2.º) Alturas $\overline{BH_b}$ e $\overline{CH_c}$ determinando H.
3.º) A terceira altura por A e H.

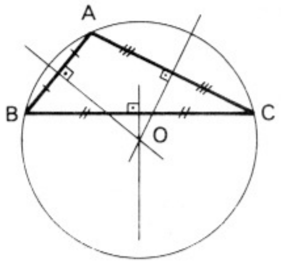


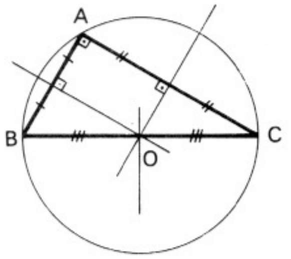


Circuncentro: O

É o ponto onde concorrem as mediatrizes dos lados de um triângulo qualquer.







Propriedade

O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita a um triângulo.

Observações:
- O raio da circunferência circunscrita a um triângulo será denotado por R.
- Também o circuncentro pode ser interno (no triângulo acutângulo), externo (no triângulo obtusângulo) ou pertencer a um lado (no triângulo retângulo).

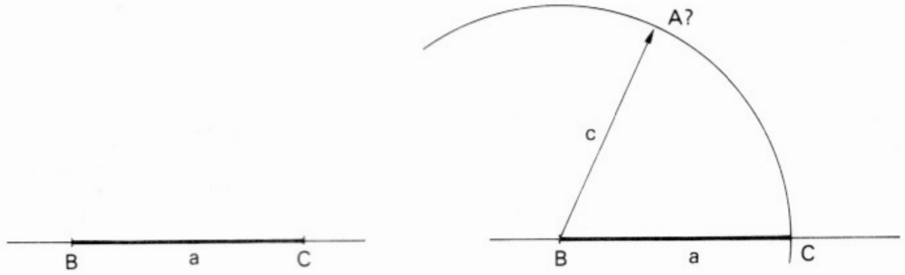
Resolva os exercícios de 94 a 97 do caderno de atividades.

Construção de triângulos

Em última análise, construir um triângulo equivale a determinar três pontos, isto é, os vértices. Observe, então, o problema seguinte:

''Construir um triângulo ABC, dados os lados **a** e **c**.''

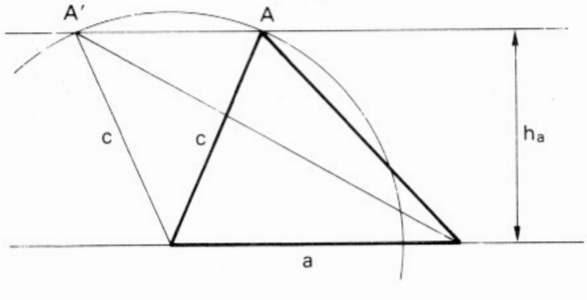
Para começar a construção, podemos colocar **a** sobre uma reta suporte qualquer. Então, teremos dois vértices já posicionados, B e C. Só falta determinar A. Mas você lembra que um ponto fica determinado mediante duas propriedades, ou seja, com dois lugares geométricos aos quais ele pertence. Ocorre que do vértice A só conhecemos uma propriedade. Ele dista **c** de B. Desse modo, A está indeterminado e, conseqüentemente, o triângulo ABC também o está.



Conclui-se, assim, que falta um dado nesse problema. Um dado que caracterize um segundo lugar geométrico ao qual A pertença. Acrescentemos então ao problema um novo elemento. Por exemplo:

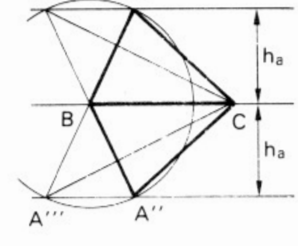
''Construir um triângulo ABC, dados os lados **a** e **c**, e a altura h_a.''

Pronto! Já temos um segundo lugar para A. Ele dista h_a da reta suporte do lado $\overline{BC}$ (LG 3).



Agora o triângulo ficou determinado e, como se vê na figura, o problema admitiu duas soluções.

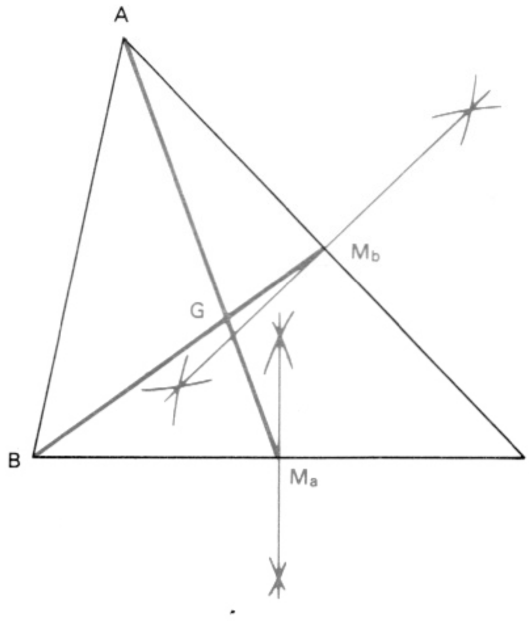
Nesse tipo de problema não levamos em conta a posição em que o triângulo foi desenhado, pois, se levássemos, haveriam infinitas soluções, já que poderíamos desenhá-lo em infinitas posições diferentes. Mas seriam sempre idênticas em forma e tamanho. É por essa razão que não se construiu o LG 3 completo, pois os outros dois triângulos que ficariam determinados representariam as mesmas soluções em outras posições.



Pontos notáveis de um triângulo: baricentro e incentro

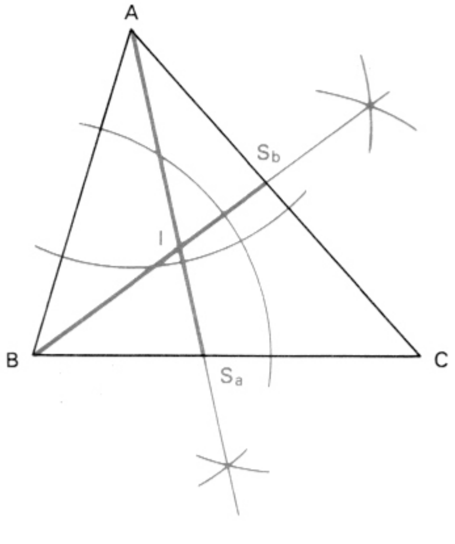
Figura auxiliar e anotações

94 Obtenha o baricentro do triângulo ABC.



Observação:
Reforce a propriedade do "2 para 1" que o baricentro possui. Peça ao aluno que faça uma experiência gráfica, verificando que $\overline{GM_a}$ "cabe" duas vezes em $\overline{AG}$.

95 Obtenha o incentro do triângulo ABC.



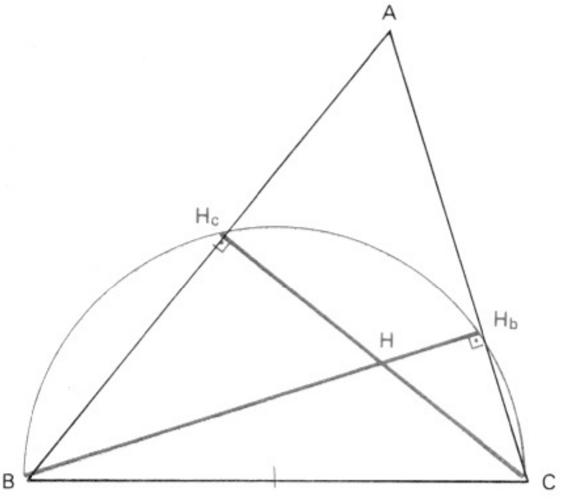
Observação:
Insista que o incentro é o centro da circunferência inscrita.

Pontos notáveis de um triângulo: ortocentro e circuncentro

Figura auxiliar e anotações

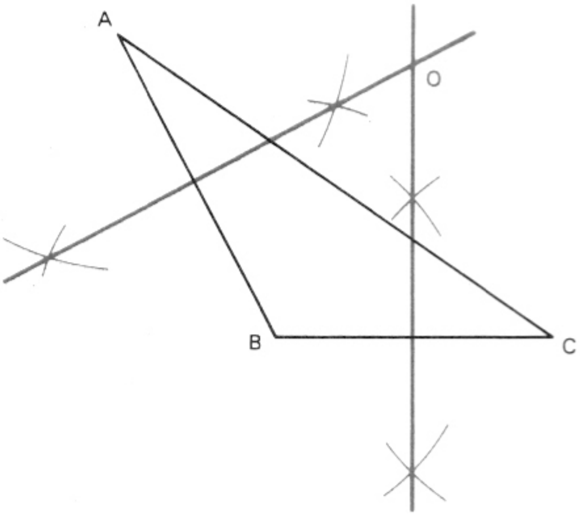
96 Obtenha o ortocentro do triângulo ABC.

Observação:
Comente com o aluno que, quando se faz necessário o traçado de mais de uma altura, convém utilizar o arco capaz de 90°. Desse modo, ele já irá se familiarizando com o fato de que "pés de alturas enxergam lados segundo ângulos retos".



97 Obtenha o circuncentro do triângulo ABC.

Observação:
Reforce que o circuncentro, a exemplo do ortocentro, é um ponto externo ao triângulo, quando este é obtusângulo.



Propriedade

O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita a um triângulo.

Observações:

- O raio da circunferência circunscrita a um triângulo será denotado por R.
- Também o circuncentro pode ser interno (no triângulo acutângulo), externo (no triângulo obtusângulo) ou pertencer a um lado (no triângulo retângulo).

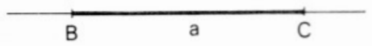
Resolva os exercícios de 94 a 97 do caderno de atividades.

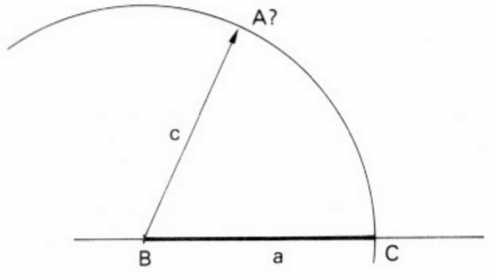
Construção de triângulos

Em última análise, construir um triângulo equivale a determinar três pontos, isto é, os vértices. Observe, então, o problema seguinte:

''Construir um triângulo ABC, dados os lados **a** e **c**.''

Para começar a construção, podemos colocar **a** sobre uma reta suporte qualquer. Então, teremos dois vértices já posicionados, B e C. Só falta determinar A. Mas você lembra que um ponto fica determinado mediante duas propriedades, ou seja, com dois lugares geométricos aos quais ele pertence. Ocorre que do vértice A só conhecemos uma propriedade. Ele dista **c** de B. Desse modo, A está indeterminado e, conseqüentemente, o triângulo ABC também o está.

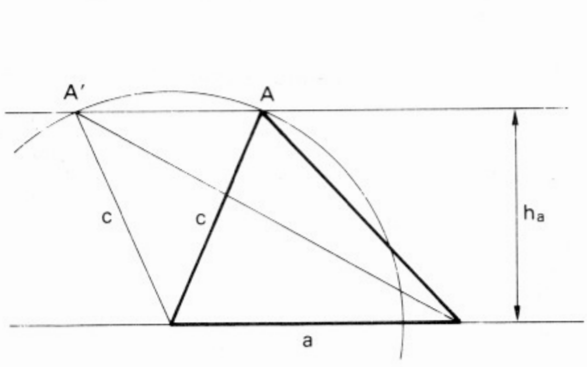




Conclui-se, assim, que falta um dado nesse problema. Um dado que caracterize um segundo lugar geométrico ao qual A pertença. Acrescentemos então ao problema um novo elemento. Por exemplo:

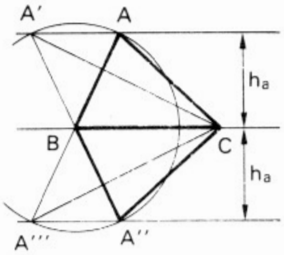
''Construir um triângulo ABC, dados os lados **a** e **c**, e a altura h_a.''

Pronto! Já temos um segundo lugar para A. Ele dista h_a da reta suporte do lado $\overline{BC}$ (LG 3).



Agora o triângulo ficou determinado e, como se vê na figura, o problema admitiu duas soluções.

Nesse tipo de problema não levamos em conta a posição em que o triângulo foi desenhado, pois, se levássemos, haveriam infinitas soluções, já que poderíamos desenhá-lo em infinitas posições diferentes. Mas seriam sempre idênticas em forma e tamanho. É por essa razão que não se construiu o LG 3 completo, pois os outros dois triângulos que ficariam determinados representariam as mesmas soluções em outras posições.



Esse problema ilustra a seguinte propriedade dos triângulos:

UM TRIÂNGULO FICA DETERMINADO EM FORMA E TAMANHO QUANDO DELE SÃO CONHECIDOS TRÊS ELEMENTOS, SENDO PELO MENOS UM DELES LINEAR, ISTO É, UM LADO OU UMA ALTURA OU UMA MEDIANA ETC.

A seguir serão colocadas algumas normas que devem ser seguidas para atacar com sucesso os problemas de construções de triângulos.

Normas gerais para a construção de um triângulo

1.ª) Imagina-se o problema já resolvido e faz-se uma figura-rascunho onde comparecem, além do contorno do triângulo propriamente dito, todos os elementos dados (alturas, mediana etc.).

2.ª) Destacam-se os elementos dados com uma tonalidade mais acentuada, ou traçando-os em outra cor, ou outro artifício qualquer. O importante é que os dados destaquem-se na figura-rascunho.

3.ª) Estuda-se a figura-rascunho em busca de propriedades que permitam obter os vértices.

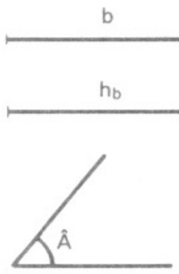
4.ª) Determinando tais propriedades, passa-se à construção.

Observação: Quando entre os dados figura um lado, de um modo geral, pode-se começar a construção a partir dele, pois com um lado já se têm dois vértices, restando apenas determinar o terceiro.

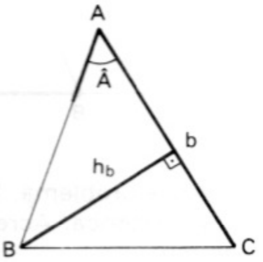
Exercícios

E16.1 Dados: b, h_b e Â.

Doravante, nos enunciados dos problemas, fica subentendido o seguinte:
"Construa um triângulo ABC..."



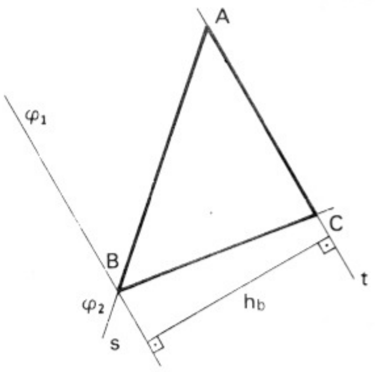
Suposto resolvido

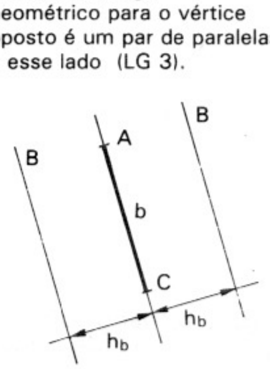


Resolução: Sobre uma reta **t** qualquer como suporte, colocamos o lado **b**. Ficam assim definidos os vértices A e C. Para o vértice B, temos duas propriedades.

φ_1 = B dista h_b de **t** (LG 3).
φ_2 = B pertence à reta **s** que passa por A e forma um ângulo Â com **t**.

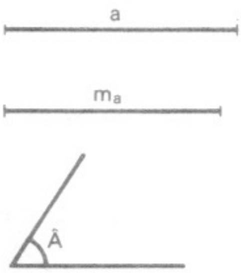
Sempre que conhecemos um lado e a altura relativa ao mesmo, um lugar geométrico para o vértice oposto é um par de paralelas a esse lado (LG 3).



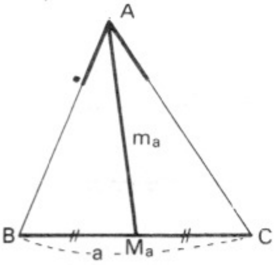


E16.2 Dados: a = 40 mm, h_a = 28 mm e $\hat{B} = 45°$. Qual é o valor de **b**?

E16.3 Dados: a, m_a e $\hat{A}$.



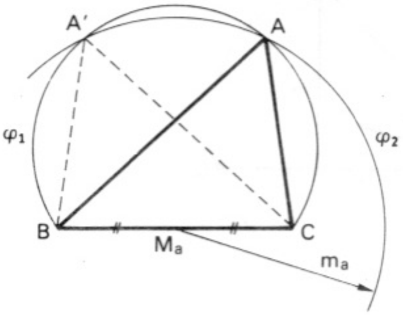
Suposto resolvido

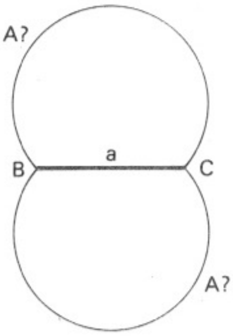


Resolução: Fixamos os vértices B e C, e temos duas propriedades para **A**:

φ_1: A enxerga $\overline{BC}$ segundo o ângulo $\hat{A}$ (LG 5).
φ_2: A dista m_a do ponto médio de $\overline{BC}$ (LG 1).

Sempre que conhecemos um lado e o ângulo oposto a ele, um lugar geométrico para o vértice oposto é o par de arcos capazes (LG 5).

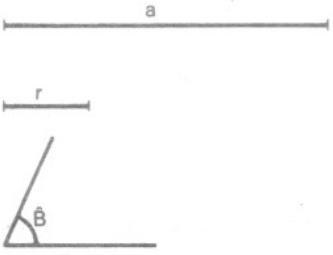




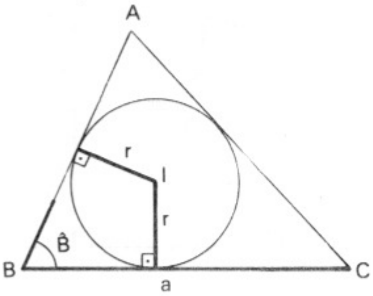
Observação: Note que com os dados do problema somente consideramos uma solução, pois os triângulos ABC e A'BC só diferem na posição.

E16.4 Dados: a = 40 mm, h_a = 30 mm e $\hat{A} = 60°$. Quanto vale o perímetro do triângulo?

E16.5 Dados: a, r e $\hat{B}$.



Suposto resolvido



Resolução: Começamos a construção pelo lado $\overline{BC}$. Em seguida traçamos a reta **s**, suporte de $\overline{AC}$, passando por B e formando o ângulo $\hat{B}$ com $\overline{BC}$.

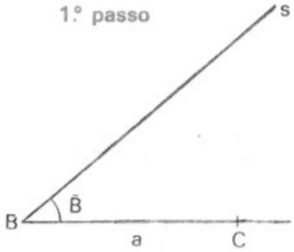
Então temos duas propriedades para o incentro I do triângulo:

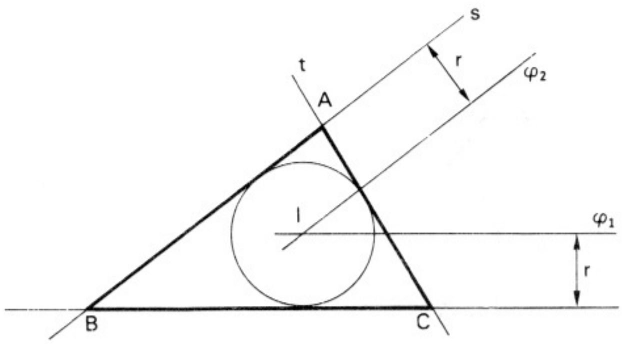
φ_1: I dista **r** de $\overline{BC}$ (LG 3).
φ_2: I dista **r** da reta **s** (LG 3).

Uma vez determinado o ponto I, traçamos a circunferência inscrita e, pelo ponto C, a reta **t** tangente à mesma. A reta **t** encontra a reta **s** no ponto A.

Evolução do traçado

1.º passo

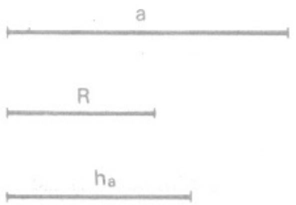




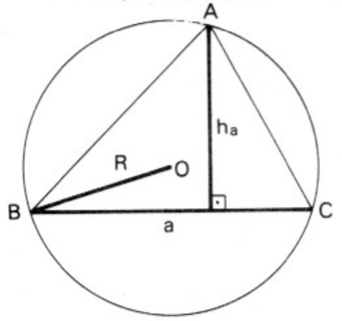
Observação: Para obter o incentro poderíamos traçar apenas uma das retas definidas por φ_1 e φ_2, e traçar a bissetriz do ângulo $\hat{B}$.

E16.**6** Dados: b = 60 mm, r = 15 mm e $\hat{A} = 90°$. Qual é o valor de **a**?

E16.**7** Dados: a, R e h_a.

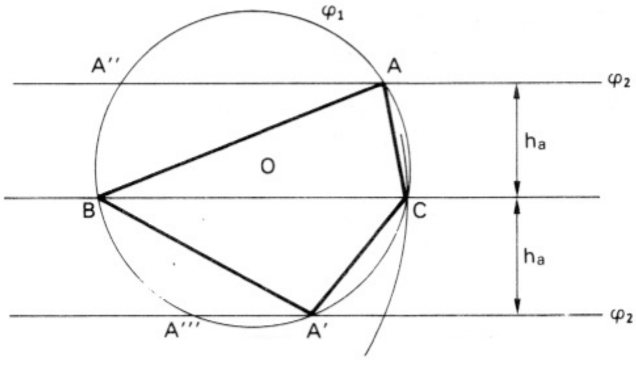


Suposto resolvido



Resolução: Podemos começar a construção pela circunferência circunscrita. Em seguida, tomamos um ponto B arbitrário sobre a mesma e traçamos um arco de centro B e raio **a** determinando C sobre a circunferência. Para o vértice A conhecemos duas propriedades:

φ_1: A pertence à circunferência circunscrita.
φ_2: A dista h_a de $\overline{BC}$ (LG 3).

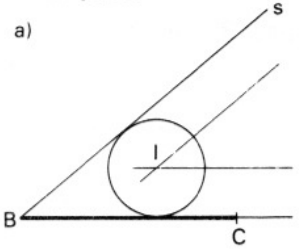


Observações:

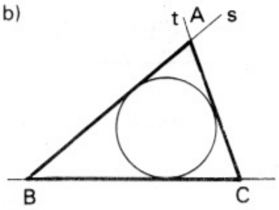
- Com os dados do problema obtivemos duas soluções, já que A'' e A''' nos dariam as mesmas soluções em posições diferentes.
- Lugares geométricos como o LG 3 e o LG 5 são compostos de duplas figuras (o primeiro duas retas, o segundo dois arcos capazes). Pois bem, mesmo que não tracemos esses lugares completamente, convém sempre imaginar o que ocorreria se traçássemos, para termos certeza de que não estamos perdendo soluções. Essa advertência já foi feita anteriormente, mas é bom reforçar.

2.º passo

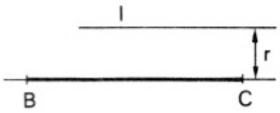
a)



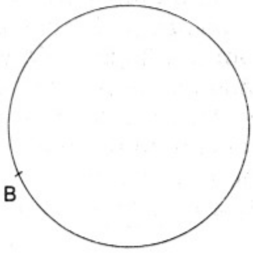
b)

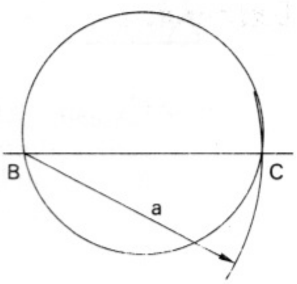


Sempre que conhecemos um lado e o raio da circunferência inscrita, o incentro pertencerá a uma reta paralela a esse lado e a uma distância conhecida do mesmo.

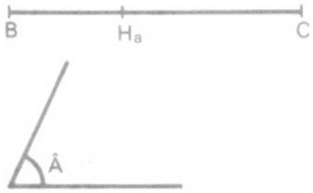


No E16.7 excepcionalmente não começamos a construção a partir do lado dado, embora pudéssemos fazê-lo se quiséssemos. Veja abaixo o que foi feito.

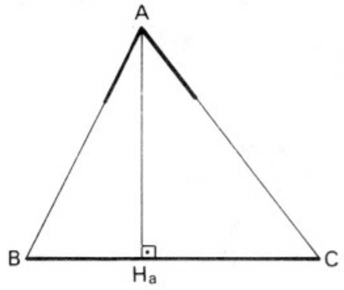




E16.8 Dados: $\overline{BC}$, H_a e $\hat{A}$.

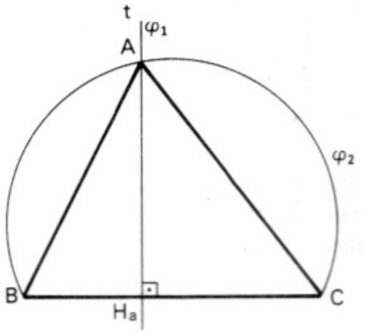


Suposto resolvido



Resolução: Sabemos que H_a é o pé da altura relativa ao vértice A. Como B e C já estão posicionados no problema, resta determinar o vértice A, para o qual temos duas propriedades:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: A pertence à reta } \mathbf{t} \text{ perpendicular a } \overline{BC} \text{ em } H_a. \\ \varphi_2\text{: A enxerga } \overline{BC} \text{ segundo o ângulo } \hat{A} \text{ (LG 5).} \end{cases}$$



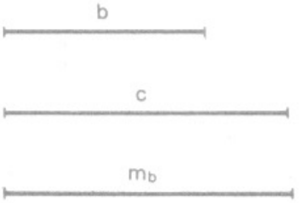
Resolva os exercícios de 98 a 105 do caderno de atividades.

O emprego de figuras auxiliares

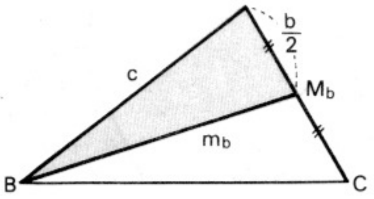
Até aqui temos construído triângulos chamados imediatos, isto é, os dados dos problemas permitiam obter diretamente os vértices do triângulo e, portanto, o próprio triângulo. Porém, às vezes, somos obrigados a construir uma parte do triângulo procurado ou determinar pontos que não os vértices, para a partir daí construir o triângulo. Alguns desses problemas escapam às regras gerais e apresentam um grau de dificuldade maior. Mas ainda assim podem-se destacar alguns artifícios e propriedades usados com freqüência. Vamos analisar tais artifícios a partir de exercícios resolvidos.

Exercícios

E16.9 Dados: b, c e m_b.



Suposto resolvido

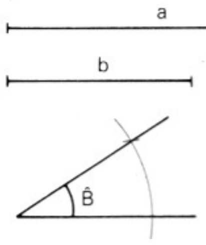


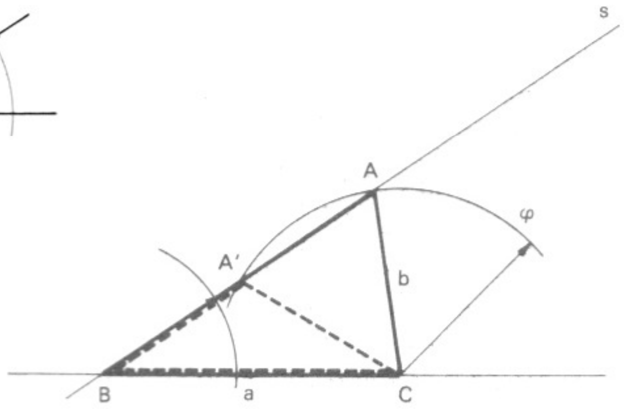
Construção de triângulos

Para os exercícios de 98 a 124.
Construa um triângulo ABC, conhecendo:

98 **a**, $\hat{B}$ e **b**.

Quantas soluções há?

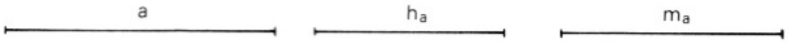


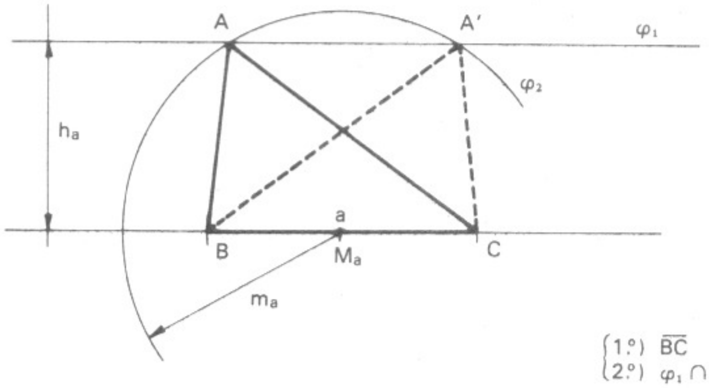


1.º) $\overline{BC}$
2.º) **s**
3.º) $\mathbf{s} \cap \varphi = \{A\}$

Soluções: triângulos ABC e A'BC.

99 **a**, h_a e m_a.





1.º) $\overline{BC}$
2.º) $\varphi_1 \cap \varphi_2 = \{A\}$

Figura auxiliar e anotações

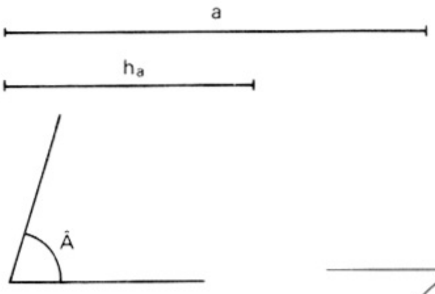
Nota:
Doravante não mais serão registrados os traçados dos arcos que permitem as construções de perpendiculares, mediatrizes, determinação dos pontos médios etc., com o objetivo de obter maior clareza nas resoluções aqui indicadas.

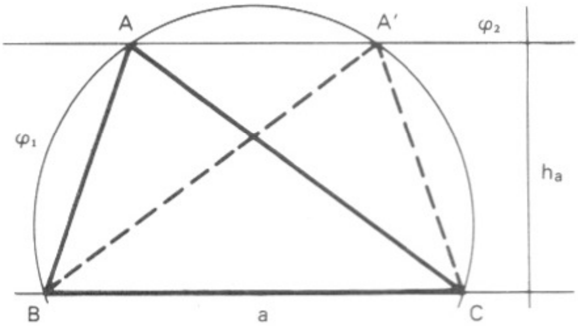
Observação:
Convém liberar ao aluno definitivamente o uso do esquadro para traçar paralelas e perpendiculares.

Sugestões:
1) Pergunte ao aluno que tipo de triângulo surge nesse problema quando ele admite solução única.
2) Reforce a propriedade de que, quando se tem um lado e a altura relativa a ele, deve-se pensar no LG 3 para o vértice oposto.
3) Quando se tem um lado e a mediana relativa a ele, pensar no LG 1 para o vértice oposto.

Construção de triângulos

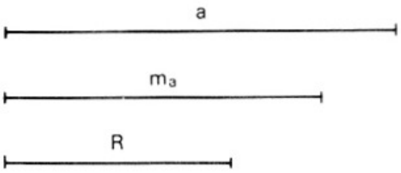
100 **a**, h_a e Â.

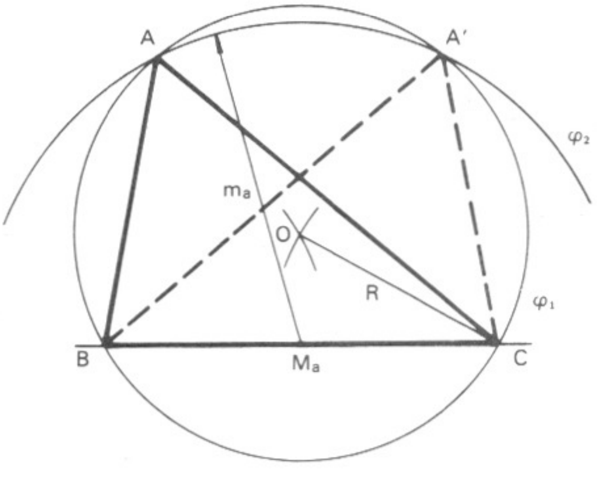



A
A′
φ_2
φ_1
h_a
B
a
C

1.º) $\overline{BC}$
2.º) φ_1
3.º) $\varphi_1 \cap \varphi_2 = \{A\}$

101 **a**, R e m_a.




A
A′
φ_2
m_a
O
R
φ_1
B
M_a
C

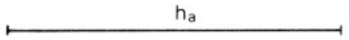
1.º) $\overline{BC}$
2.º) O
3.º) φ_1
4.º) $\varphi_1 \cap \varphi_2 = \{A\}$

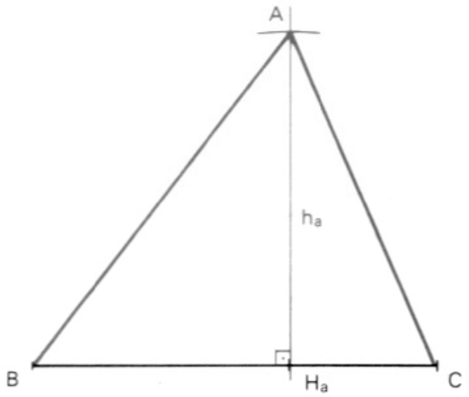
Figura auxiliar e anotações

Observações:

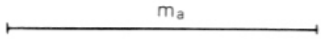
1) Reforce a propriedade de que, quando se tem um lado e o ângulo oposto a ele, pode-se pensar no LG 5 para o vértice oposto.
2) Chame a atenção para o fato de que, quando se traça o arco capaz de um ângulo sobre o lado e se completa a circunferência do arco, tem-se a circunferência circunscrita.

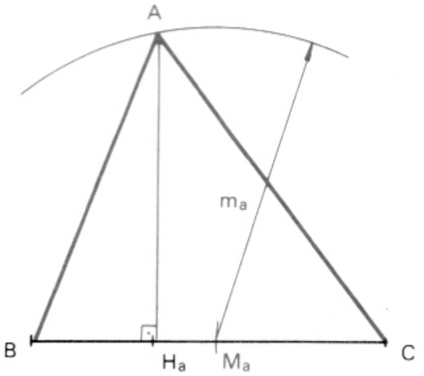
102 $\overline{BC}$, h_a e H_a.



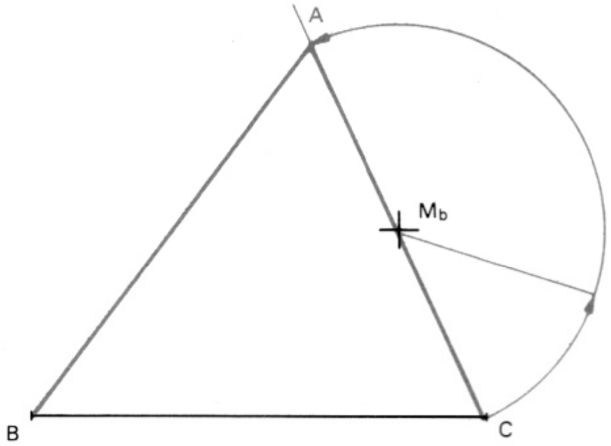


103 $\overline{BC}$, m_a e H_a.





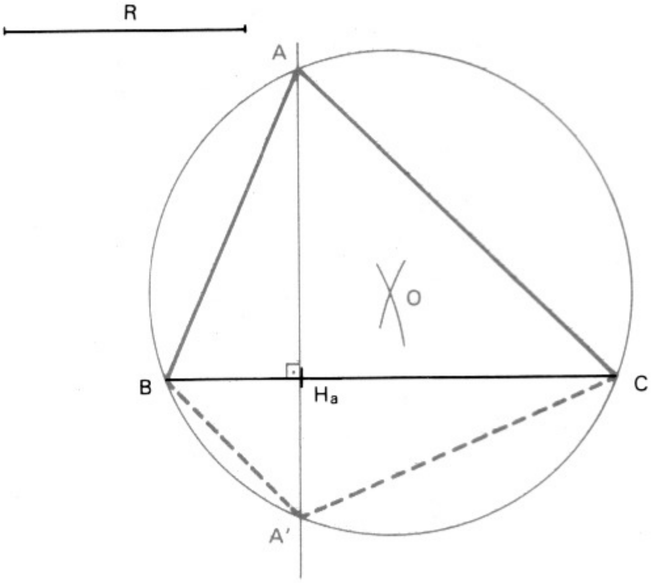
104 $\overline{BC}$ e M_b.
(Lembre-se que M_b é o ponto médio do lado $\overline{AC}$.)



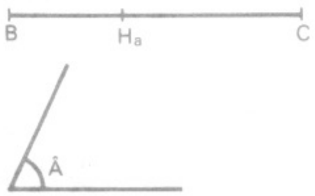
105 $\overline{BC}$, H_a e R.
Sugestão: Com $\overline{BC}$ e R você pode construir a circunferência circunscrita (vide E8.8).

Observação:
Oriente o aluno no sentido de que, ao resolver um problema gráfico, ele deve sempre fazer uma última análise para ver se o problema tem ou não outras soluções.

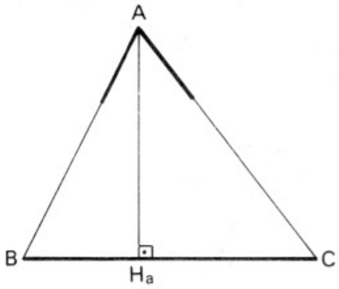
Sugestão:
Proponha o mesmo problema fornecendo Â ao invés de R.



E16.8 Dados: $\overline{BC}$, H_a e $\hat{A}$.

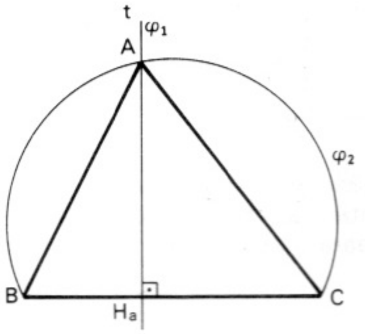


Suposto resolvido



Resolução: Sabemos que H_a é o pé da altura relativa ao vértice A. Como B e C já estão posicionados no problema, resta determinar o vértice A, para o qual temos duas propriedades:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: A pertence à reta } \mathbf{t} \text{ perpendicular a } \overline{BC} \text{ em } H_a. \\ \varphi_2\text{: A enxerga } \overline{BC} \text{ segundo o ângulo } \hat{A} \text{ (LG 5).} \end{cases}$$



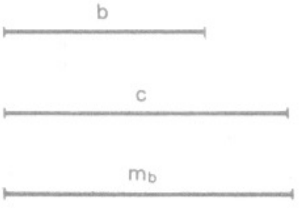
Resolva os exercícios de 98 a 105 do caderno de atividades.

O emprego de figuras auxiliares

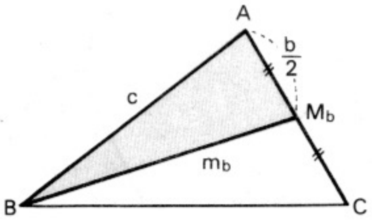
Até aqui temos construído triângulos chamados imediatos, isto é, os dados dos problemas permitiam obter diretamente os vértices do triângulo e, portanto, o próprio triângulo. Porém, às vezes, somos obrigados a construir uma parte do triângulo procurado ou determinar pontos que não os vértices, para a partir daí construir o triângulo. Alguns desses problemas escapam às regras gerais e apresentam um grau de dificuldade maior. Mas ainda assim podem-se destacar alguns artifícios e propriedades usados com freqüência. Vamos analisar tais artifícios a partir de exercícios resolvidos.

Exercícios

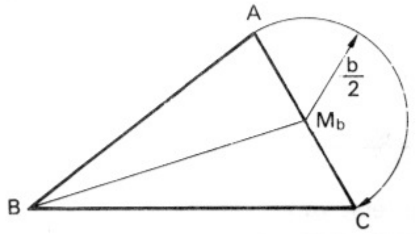
E16.9 Dados: b, c e m_b.



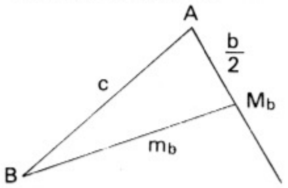
Suposto resolvido

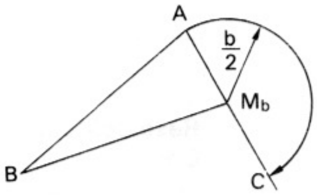


Resolução: Podemos construir o triângulo ABM_b, pois dele conhecemos os três lados, m_b, c e $\frac{b}{2}$. É fácil, então, determinar o vértice C, já que M_b é o ponto médio de $\overline{AC}$.

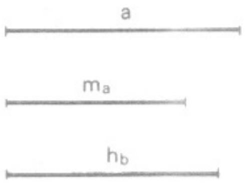

A
$\frac{b}{2}$
M_b
B
C

Evolução do traçado

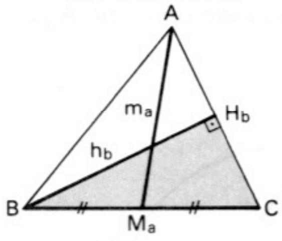

A
$\frac{b}{2}$
c
M_b
m_b
B


A
$\frac{b}{2}$
M_b
B
C

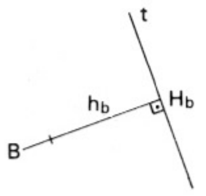
E16. 10 Dados: a, m_a e h_b.

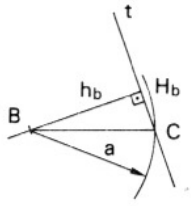


Suposto resolvido


A
m_a
H_b
h_b
B
M_a
C

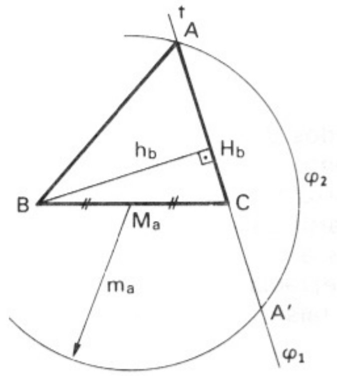
Evolução do traçado

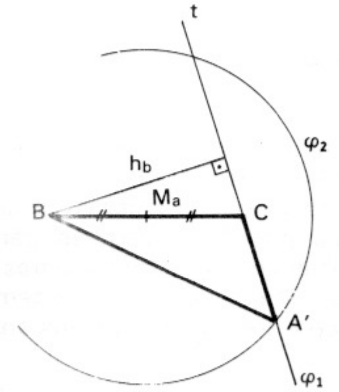


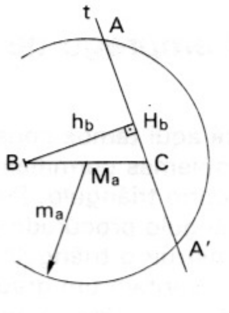


Resolução: Podemos construir o triângulo retângulo BCH_b, pois conhecemos a hipotenusa **a** e o cateto h_b. Então, a reta **t** que contém o outro cateto contém também o vértice A, para o qual temos duas propriedades:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: A pertence à reta } \mathbf{t}. \\ \varphi_2\text{: A dista } m_a \text{ de } M_a \text{ (LG 1)} \end{cases}$$


t
A
h_b
H_b
φ_2
B
C
M_a
m_a
A′
φ_1

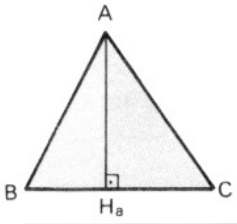

t
φ_2
h_b
M_a
B
C
A′
φ_1

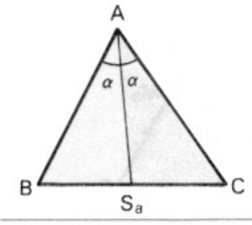

t
A
h_b
H_b
B
C
M_a
m_a
A′

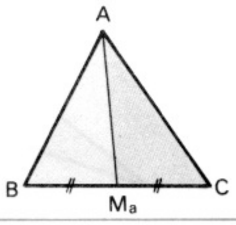
Nesta resolução, foram feitas duas figuras, apenas para destacar melhor as duas soluções, isto é, triângulos ABC e A′BC. Evidentemente as duas soluções devem se apresentar numa única figura, como sempre foi feito até aqui.

Artifício

Analisando os dois problemas anteriores, vemos que, em ambos, foi construída primeiramente uma parte do triângulo procurado, para depois se construir o triângulo propriamente dito. No primeiro problema, o triângulo ABM_b e no segundo, o triângulo BCH_b. Quando é dada uma ceviana, pode-se estudar a possibilidade de construir um dos dois triângulos em que essa ceviana divide o triângulo procurado. Esse artifício é usado com bastante freqüência.





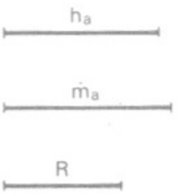


E16.11 Dados: a = 40 mm, h_c = 37 mm e h_a = 32 mm. Qual é o perímetro de cada um dos dois triângulos que se pode construir com esses dados?

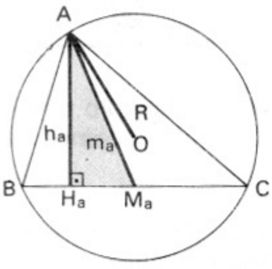
Sugestão: Comece pelo triângulo BCH_c.

E16.12 Dados: c = 35 mm, s_b = 38 mm e $\hat{B}$ = 60°. Quanto vale **a**?

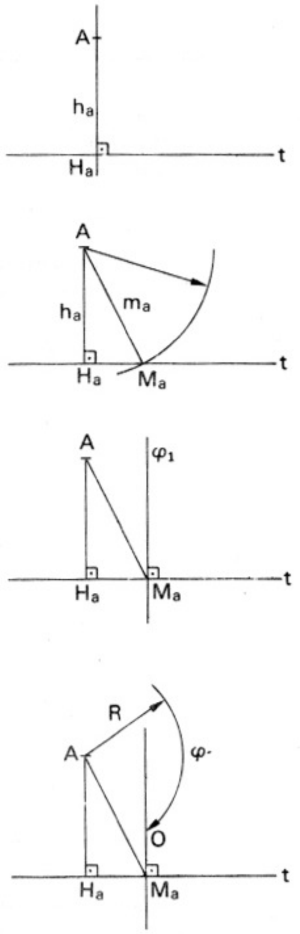
E16.13 Dados: h_a, m_a e R.



Suposto resolvido



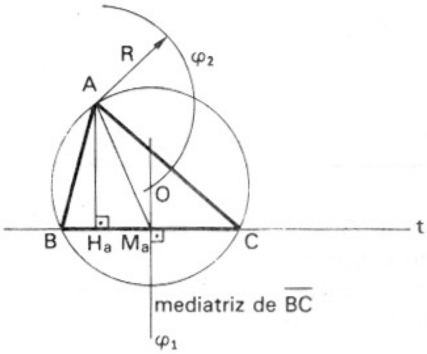
Evolução do traçado



Resolução: Construímos o **triângulo retângulo AH_aM_a** e teremos determinado o ponto M_a, o vértice A e a reta **t** suporte do lado $\overline{BC}$. Como a mediatriz de $\overline{BC}$ é a perpendicular a esse lado conduzida pelo ponto M_a, podemos traçar essa reta. Agora, para o circuncentro D conhecemos duas propriedades:

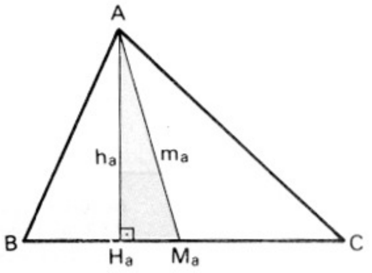
$$\begin{cases} \varphi_1\text{: O pertence à mediatriz de } \overline{BC} \\ \varphi_2\text{: O dista R de A (LG 1)} \end{cases}$$

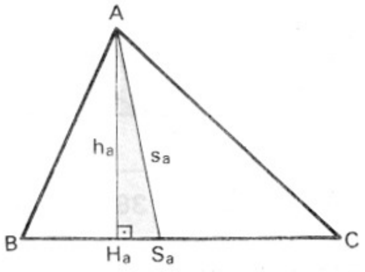
Com centro em O e raio R, descrevemos a circunferência circunscrita ao triângulo, a qual intercepta a reta **t** nos vértices B e C.



Artifício

Como se viu, a resolução do problema anterior foi feita a partir do triângulo retângulo AH_aM_a. Pois bem, quando são dadas uma altura e uma mediana ou uma altura e uma bissetriz, relativas a um mesmo vértice, é sempre possível construir um triângulo retângulo em que a altura é um cateto e a mediana, ou bissetriz, é a hipotenusa. Esse triângulo retângulo determina um vértice do triângulo procurado e a reta suporte do lado oposto.

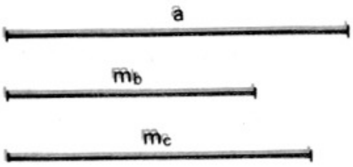




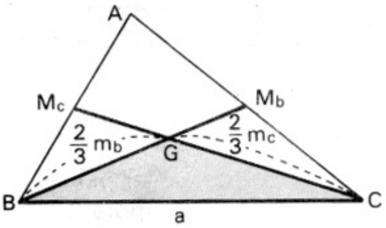
E16. **14** Dados: $h_a = 30$ mm, $s_a = 33$ mm e $\hat{A} = 90°$. Quanto mede a hipotenusa?

Resolva os exercícios de 106 a 112 do caderno de atividades.

E16. **15** Dados: a, m_b e m_c.

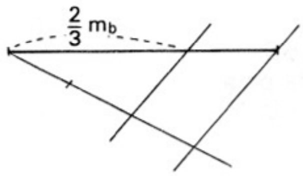


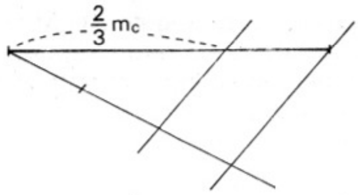
Suposto resolvido

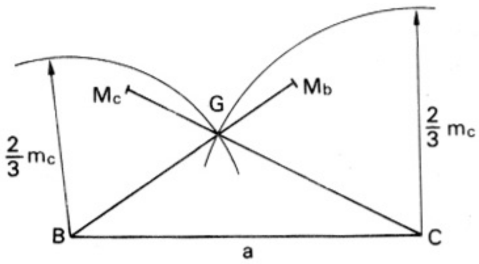

A
M_c
M_b
$\frac{2}{3}m_b$
$\frac{2}{3}m_c$
G
B
C
a

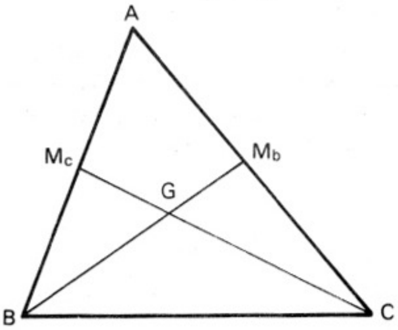
Resolução: Sendo G o baricentro do triângulo procurado, podemos construir o triângulo BCG, pois dele conhecemos os três lados, a, $\frac{2}{3}m_c$ e $\frac{2}{3}m_b$.

Então, temos que dividir as medianas m_b e m_c na razão de 2 para 1, para em seguida construir o triângulo BCG.





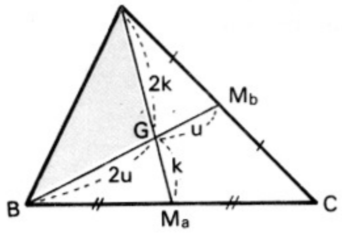

M_c
G
M_b
$\frac{2}{3}m_c$
$\frac{2}{3}m_c$
B
a
C

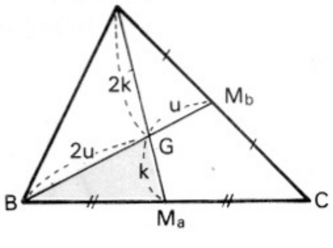


Observação: Ao construirmos o triângulo BCG, imediatamente prolongamos os lados $\overline{BG}$ e $\overline{CG}$, de modo a obter os pontos M_b e M_c, onde, evidentemente, $BM_b = m_b$ e $CM_c = m_c$. Então, traçamos as retas por B e M_c e por C e M_b, as quais se cortam em A.

Artifício

Quando nos dados de um problema comparecem medianas, pode-se estudar a possibilidade de utilizar o baricentro e pontos médios como vértices de um triângulo auxiliar construtível, lembrando sempre que o baricentro divide cada mediana na razão de 2 para 1.


A
2k
M_b
G
u
2u
k
B
M_a
C


A
2k
u
M_b
2u
G
k
B
M_a
C

E16. **16** Dados: $a = 43$ mm, $m_a = 40$ mm e $m_b = 38$ mm. Quanto vale o perímetro?

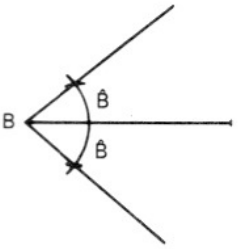
Sugestão: O triângulo BGM_c é construtível.

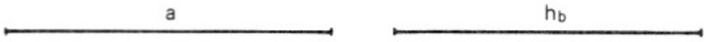
Resolva o exercício 113 do caderno de atividades.

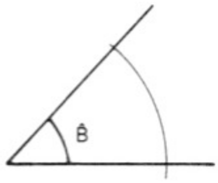
Construção de triângulos

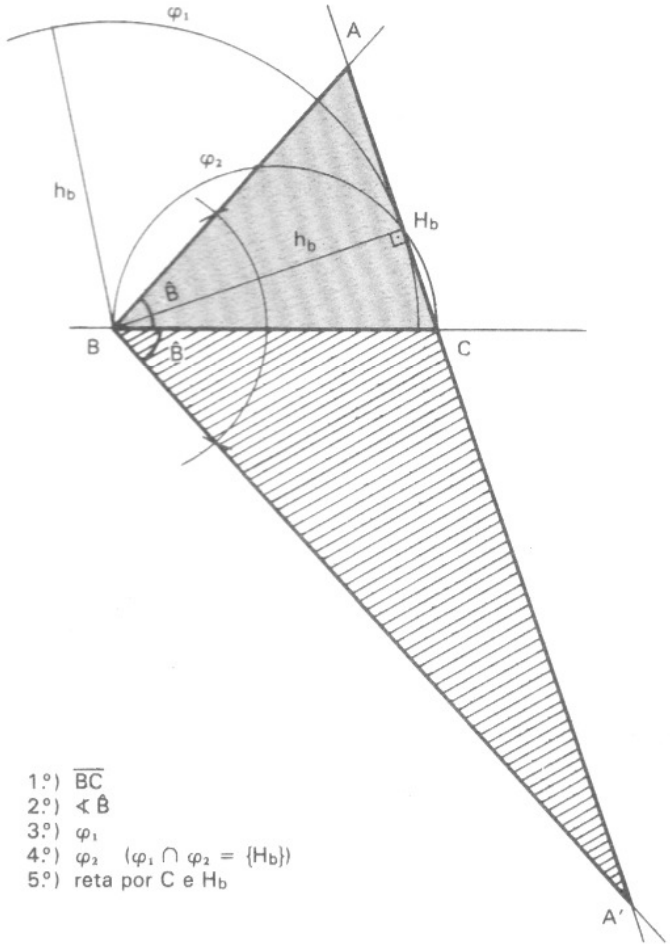
106 **a**, h_b e $\hat{B}$.

Sugestão: Comece pelo triângulo BCH_b e note que o ângulo $\hat{B}$ pode ser transportado para duas posições.







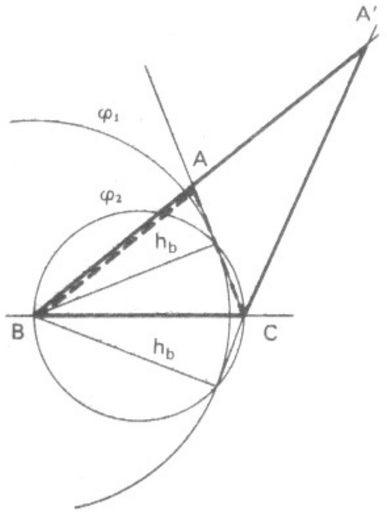


1.º) $\overline{BC}$
2.º) ∢ $\hat{B}$
3.º) φ_1
4.º) φ_2 ($\varphi_1 \cap \varphi_2 = \{H_b\}$)
5.º) reta por C e H_b

Figura auxiliar e anotações

Observações:

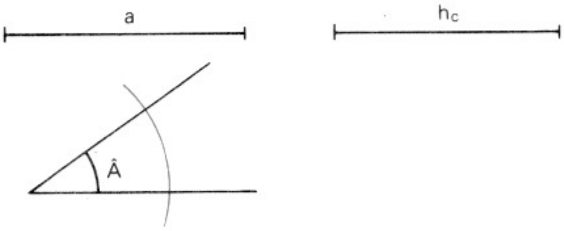
1) Chame a atenção do aluno para que ele tome cuidado redobrado em problemas que fornecem alturas. Normalmente ele tem dificuldade para enxergar as alturas externas em triângulos obtusângulos.
2) Pode-se comentar que, ao invés de se desenhar o ângulo $\hat{B}$ nas duas posições, poder-se-ia construir o par de arcos capazes de 90° (φ_2) e obter H_b e H'_b em φ_1.

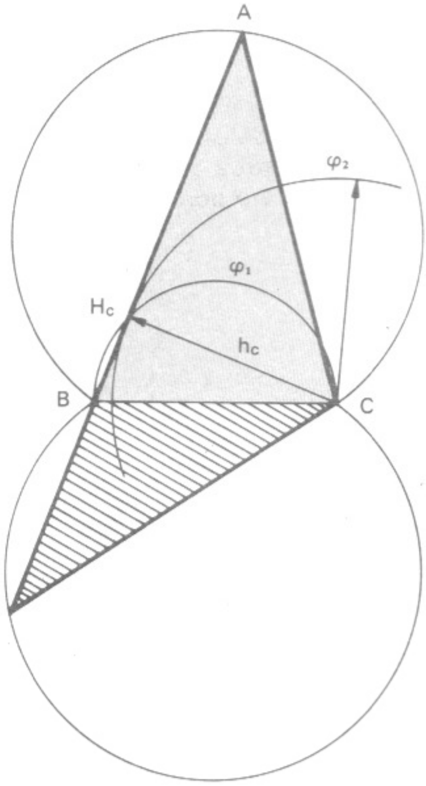


Construção de triângulos

107 **a**, h_c e Â.

Observação: Não deixe de construir os dois arcos capazes.

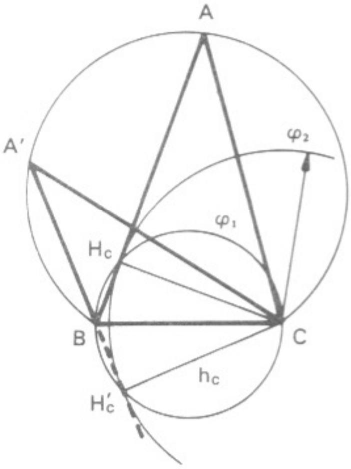



A
φ_2
φ_1
H_c
h_c
B
C
A'

1.º) $\overline{BC}$
2.º) arcos capazes
do ângulo Â
3.º) φ_1
4.º) φ_2 $(\varphi_1 \cap \varphi_2 = \{H_c\})$
5.º) reta por B e H_b,
determinando A e A'

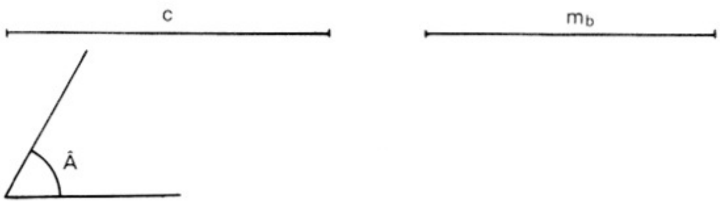
Figura auxiliar e anotações

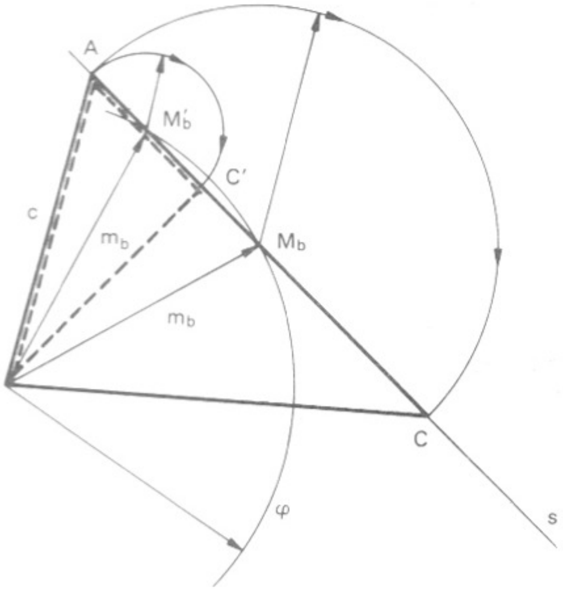
Observação:
Pode-se comentar, a exemplo do problema precedente, que poder-se-ia construir apenas um arco capaz do ângulo Â, desde que se construíssem os dois arcos capazes de 90° (φ_1), os quais determinariam H_c e H'_c em φ_2.


A
A'
φ_2
φ_1
H_c
B
C
h_c
H'_c

108 **c**, m_b e Â.

Sugestão: O triângulo ABM_b pode ser construído.




A
M'_b
C'
c
m_b
M_b
m_b
B
C
φ
s

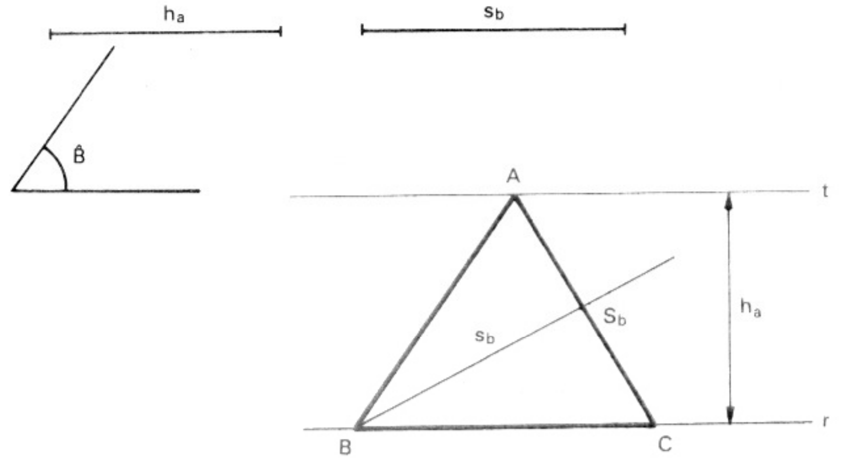
1.º) $\overline{AB}$ 3.º) φ $(\varphi \cap s = \{M_b; M'_b\})$

2.º) $\sphericalangle$ Â 4.º) C e C'

Construção de triângulos

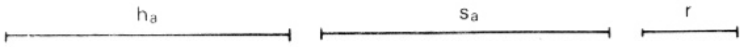
Figura auxiliar e anotações

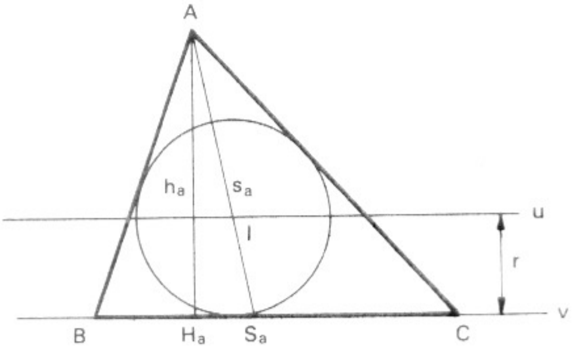
109 h_a, s_b e $\hat{B}$.



1.º) $\sphericalangle \hat{B}$
2.º) reta t, determinando A
3.º) Bissetriz de $\sphericalangle \hat{B}$
4.º) S_b ($BS_b = s_b$)
5.º) reta por A e S_b, determinando C.

110 h_a, s_a e **r**.
Sugestão: Comece pelo triângulo AH_aS_a. Em seguida você pode determinar o incentro, já que ele está sobre a bissetriz.

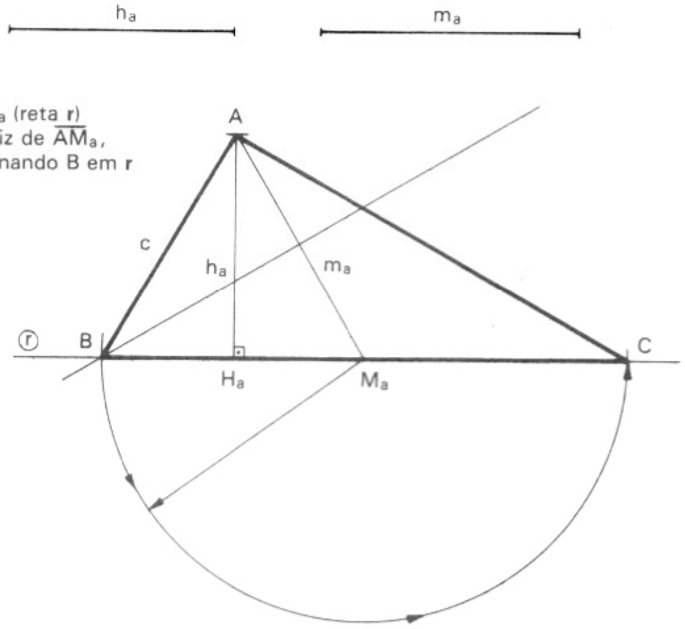




1.º) ΔAH_aS_a (reta v)
2.º) reta u determinando I em $\overline{AS_a}$
3.º) circunferência inscrita
4.º) tangentes a partir de A, determinando B e C.

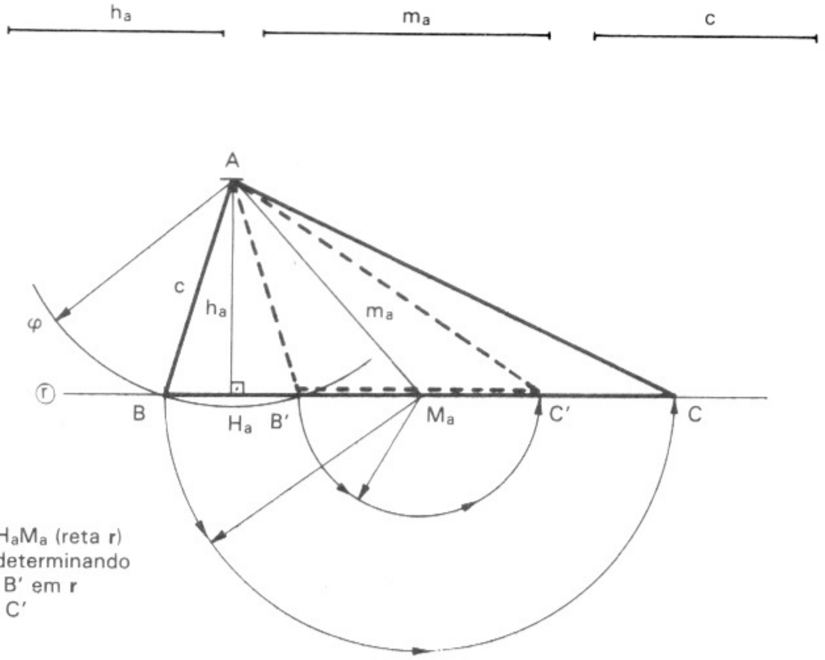
111 h_a, m_a e $c = \dfrac{a}{2}$.

Sugestão: Note que B é eqüidistante de A e M_a (LG 2).


h_a
m_a
A
c
h_a
m_a
ⓡ
B
H_a
M_a
C

1.º) ΔAH_aM_a (reta **r**)
2.º) Mediatriz de $\overline{AM_a}$,
determinando B em **r**
3.º) C

112 h_a, m_a e **c**.

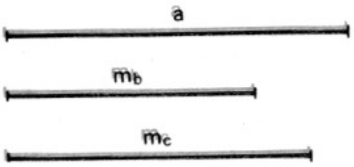

h_a
m_a
c
A
c
h_a
m_a
φ
ⓡ
B
H_a
B'
M_a
C'
C

1.º) ΔAH_aM_a (reta **r**)
2.º) φ, determinando
B e B' em **r**
3.º) C e C'

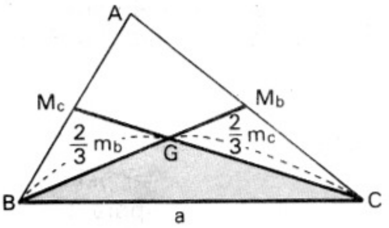
E16. **14** Dados: $h_a = 30$ mm, $s_a = 33$ mm e $\hat{A} = 90°$. Quanto mede a hipotenusa?

Resolva os exercícios de 106 a 112 do caderno de atividades.

E16. **15** Dados: a, m_b e m_c.

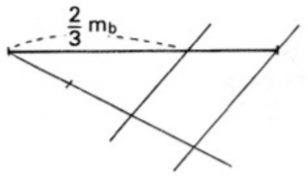


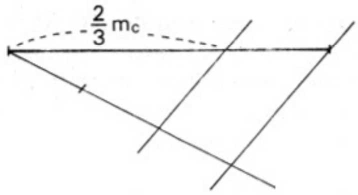
Suposto resolvido

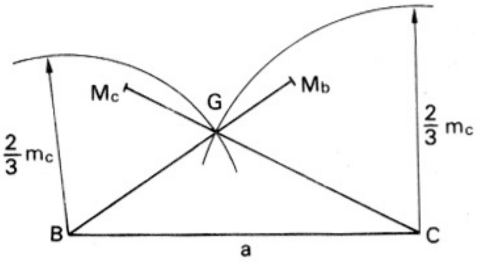

A
M_c
M_b
$\frac{2}{3}m_b$
$\frac{2}{3}m_c$
G
B
C
a

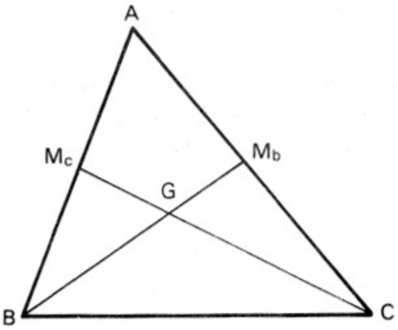
Resolução: Sendo G o baricentro do triângulo procurado, podemos construir o triângulo BCG, pois dele conhecemos os três lados, a, $\frac{2}{3}m_c$ e $\frac{2}{3}m_b$.

Então, temos que dividir as medianas m_b e m_c na razão de 2 para 1, para em seguida construir o triângulo BCG.





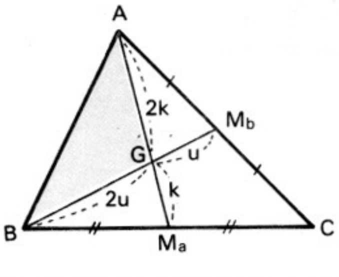

M_c
G
M_b
$\frac{2}{3}m_c$
$\frac{2}{3}m_c$
B
C
a

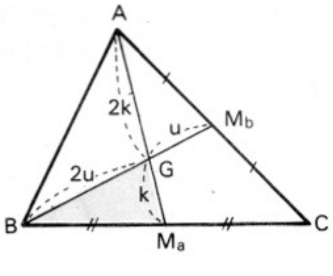


Observação: Ao construirmos o triângulo BCG, imediatamente prolongamos os lados $\overline{BG}$ e $\overline{CG}$, de modo a obter os pontos M_b e M_c, onde, evidentemente, $BM_b = m_b$ e $CM_c = m_c$. Então, traçamos as retas por B e M_c e por C e M_b, as quais se cortam em A.

Artifício

Quando nos dados de um problema comparecem medianas, pode-se estudar a possibilidade de utilizar o baricentro e pontos médios como vértices de um triângulo auxiliar construtível, lembrando sempre que o baricentro divide cada mediana na razão de 2 para 1.


A
2k
M_b
G
u
2u
k
B
M_a
C


A
2k
u
M_b
2u
G
k
B
M_a
C

E16. **16** Dados: $a = 43$ mm, $m_a = 40$ mm e $m_b = 38$ mm. Quanto vale o perímetro?

Sugestão: O triângulo BGM_c é construtível.

Resolva o exercício 113 do caderno de atividades.

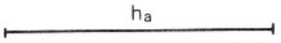
Construção de triângulos

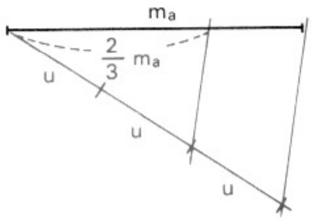
113 h_a, m_a e m_b.

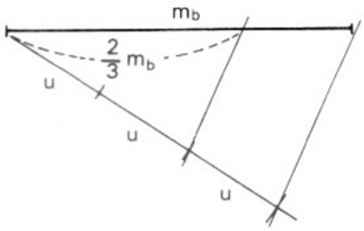
Sugestão: Construindo o triângulo AH_aM_a, você pode determinar G sobre $\overline{AM_a}$. Então, você conhecerá a reta que contém B e a distância de B a G. O problema tem duas soluções, já que há duas possibilidades para B.

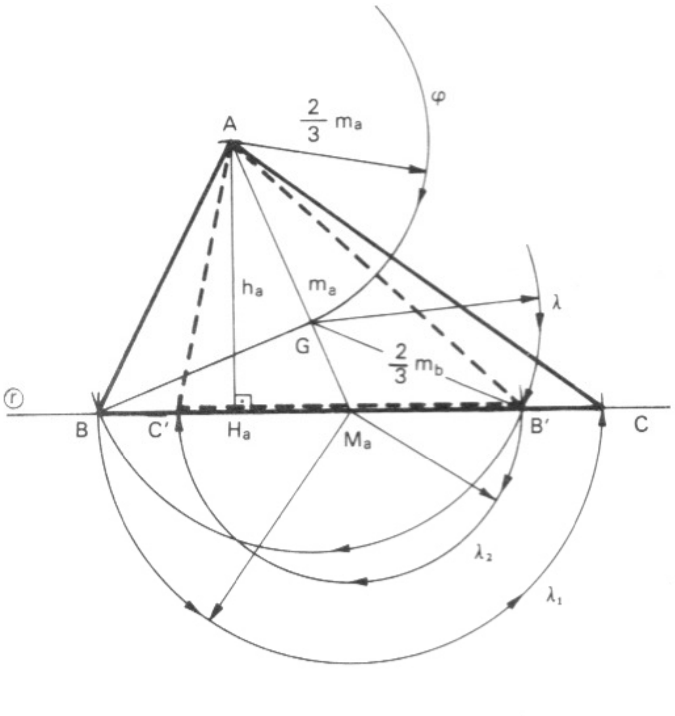
Figura auxiliar e anotações

Observação:
Oriente o aluno no sentido de aproveitar os próprios segmentos m_a e m_b impressos (sem transportá-los) para determinar os seus $\frac{2}{3}$.




m_a
$\frac{2}{3}$ m_a
u
u
u


m_b
$\frac{2}{3}$ m_b
u
u
u


φ
A
$\frac{2}{3}$ m_a
h_a
m_a
λ
G
$\frac{2}{3}$ m_b
r
B
C'
H_a
M_a
B'
C
λ_2
λ_1

1.º) ΔAH_aM_a (reta **r**)
2.º) φ, determinando G
3.º) λ, determinando B e B'
4.º) λ_1 e λ_2, determinando C e C'

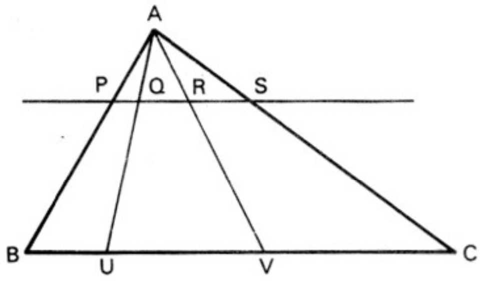
Algumas propriedades importantes

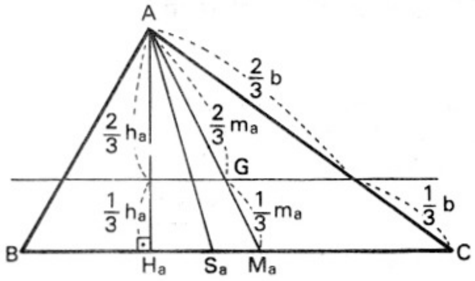
Propriedade

Uma reta que intercepta dois lados de um triângulo e é paralela ao terceiro lado divide esses dois lados e todas as cevianas relativas ao terceiro lado em segmentos proporcionais.

O teorema de Tales justifica essa propriedade.

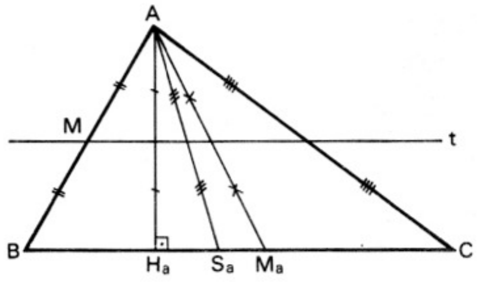
Assim, por exemplo, se uma paralela ao lado $\overline{BC}$ passar pelo baricentro do triângulo, como esse ponto divide $\overline{AM}_a$ na razão de 2 para 1, dividirá na mesma razão os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, a altura $\overline{AH}_a$, a bissetriz e assim por diante.





$$\boxed{\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QU} = \frac{AR}{RV} = \frac{AS}{SC} = \ldots..}$$

Particularmente, é muito freqüente o uso dessa propriedade para o caso em que essa paralela passa pelo ponto médio de um lado. Nesse caso, a propriedade em questão garante que essa reta passa pelo ponto médio de um segundo lado e pelos pontos médios de todas as cevianas relativas ao terceiro lado.



Se { t // $\overline{BC}$ e M é ponto médio de $\overline{AB}$

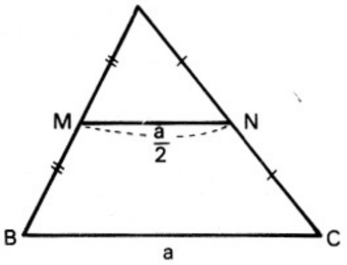
Então { **t** passa pelos pontos médios de $\overline{AC}$, $\overline{AH}_a$, $\overline{AS}_a$, $\overline{AM}_a$ etc...

Como conseqüência desse caso particular decorre uma propriedade muito importante.

Propriedade

O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem por medida a metade da medida do terceiro lado.

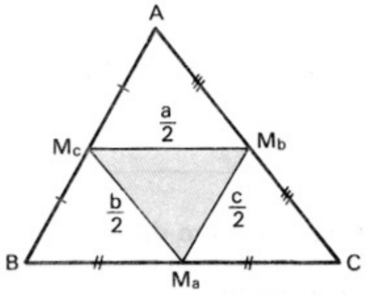
Um tal segmento é denominado **base média** do triângulo.



Se { M e N são os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$

Então { $\overline{MN}$ // $\overline{BC}$
e
$MN = \frac{a}{2}$

Observação: Os pontos médios dos lados de um triângulo ABC são vértices de um triângulo denominado **mediano do triângulo ABC**.

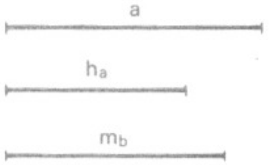


Observe que cada lado do triângulo ABC é paralelo a um lado do **triângulo mediano**.

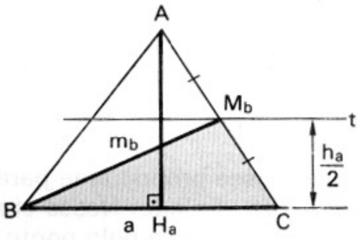
Vejamos algumas aplicações dessas propriedades.

Exercícios

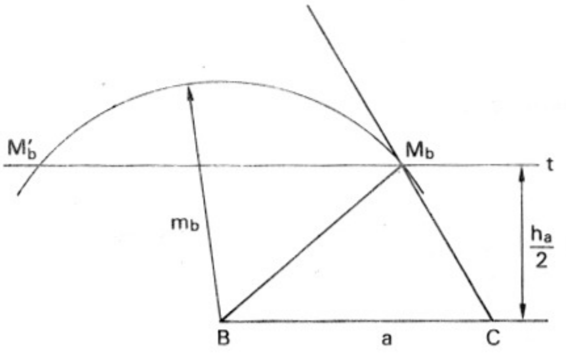
E16.**17** Dados: a, h_a e m_b.

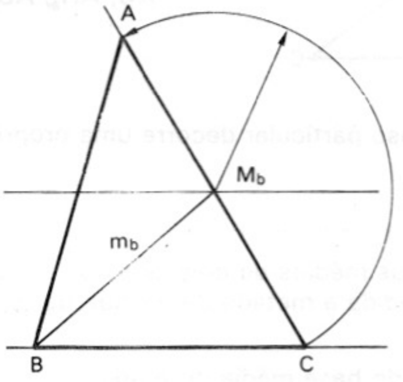


Suposto resolvido



Resolução: Na figura que supõe o problema resolvido, traçamos por M_b a reta **t** paralela a $\overline{BC}$, a qual dista $\frac{h_a}{2}$ desse lado. Então, o triângulo BCM_b é construtível, pois dele conhecemos os lados **a**, m_b e a altura $\frac{h_a}{2}$. Tendo determinado M_b, podemos obter o vértice A, pois basta prolongar o lado $\overline{CM_b}$ de um segmento congruente a ele próprio.





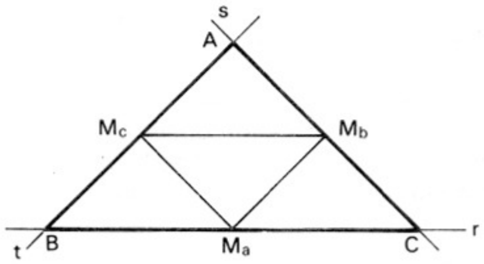
Ao construirmos o triângulo BCM_b, obtivemos uma segunda possibilidade M'_b para o ponto médio, e que leva a uma segunda solução, isto é, a um triângulo A'BC. Porém nessa solução o vértice A' cai fora do papel, por isso não a desenhamos. Quando isso ocorrer você pode desprezar essa solução, mas convém que você tenha consciência de que ela existe.

E16.**18** Dados: M_a, M_b e M_c.

Resolução: M_a, M_b e M_c são os vértices do triângulo mediano. Sabemos que cada lado do triângulo ABC é paralelo a um lado do mediano. Assim, podemos efetuar a construção como segue:

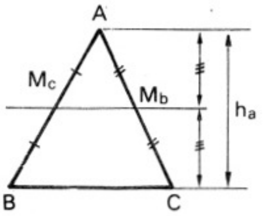
1.º) Por M_a traçamos a reta **r** paralela a $\overline{M_bM_c}$.
2.º) Por M_b traçamos a reta **s** paralela a $\overline{M_aM_c}$.
3.º) Por M_c traçamos a reta **t** paralela a $\overline{M_aM_b}$.

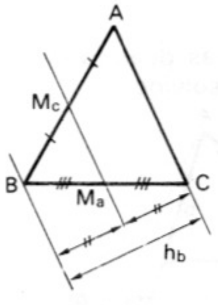
As retas **r**, **s** e **t** interceptam-se nos vértices A, B e C.

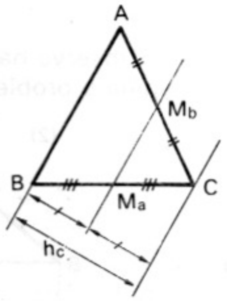


Artifício

Nos dois problemas anteriores, utilizamos retas paralelas a um lado do triângulo, passando pelo ponto médio de outro lado. Quando um problema envolve pontos médios de lados, diretamente ou indiretamente como pés de medianas, podem-se traçar retas passando por esses pontos quando estudamos a figura-rascunho. Nesse caso, devemos lembrar que essas retas são sempre paralelas a um dos lados e que suas distâncias a esse lado ou ao vértice oposto são metades de alturas.

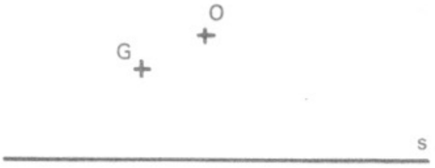




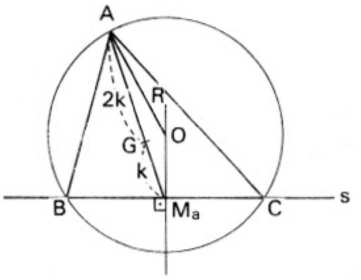


E16.19 Dados: $h_a = 40$, $m_b = 45$ mm e $\hat{B} = 60°$. Quanto vale **b**?

E16.20 Dados: G, O (circuncentro) e a reta **s** que contém o lado $\overline{BC}$.

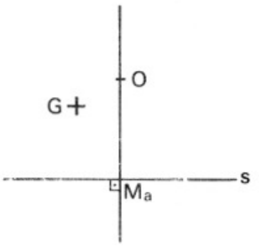


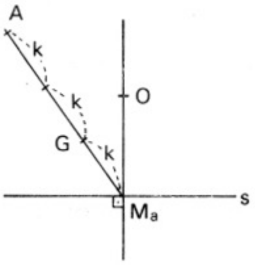
Suposto resolvido

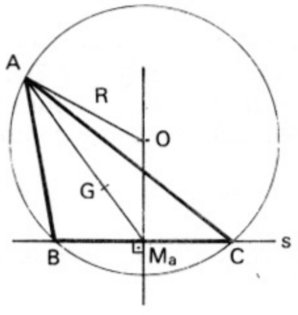


Resolução: A reta conduzida por O perpendicularmente a **s** é a mediatriz de $\overline{BC}$, portanto determina M_a em **s**. Como a mediana $\overline{AM_a}$ fica dividida na razão de 2 para 1 por G, determinamos A a partir de M_a e G. Com centro em O e raio OA descrevemos a circunferência circunscrita, a qual determina B e C em **s**.

Resolva os exercícios de 114 a 120 do caderno de atividades.







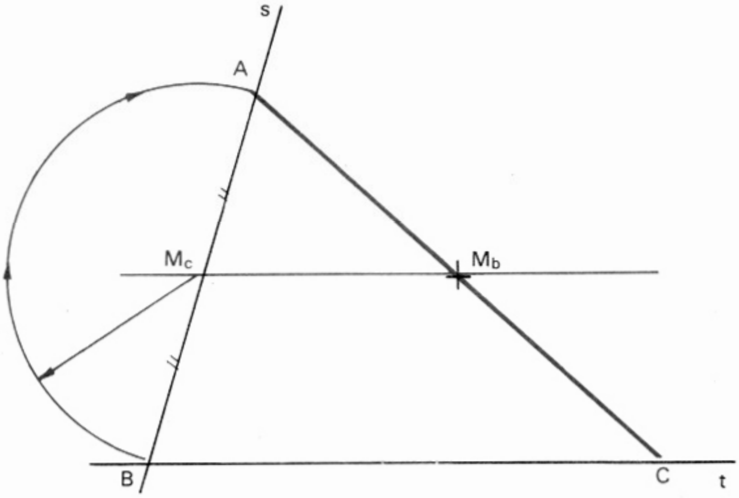
Construção de triângulos

Figura auxiliar e anotações

114 M_b e as retas **s** e **t**, suportes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.
Sugestão: Se por M_b você traçar uma paralela à reta **t**, determinará M_c em **s**.

Sugestões:

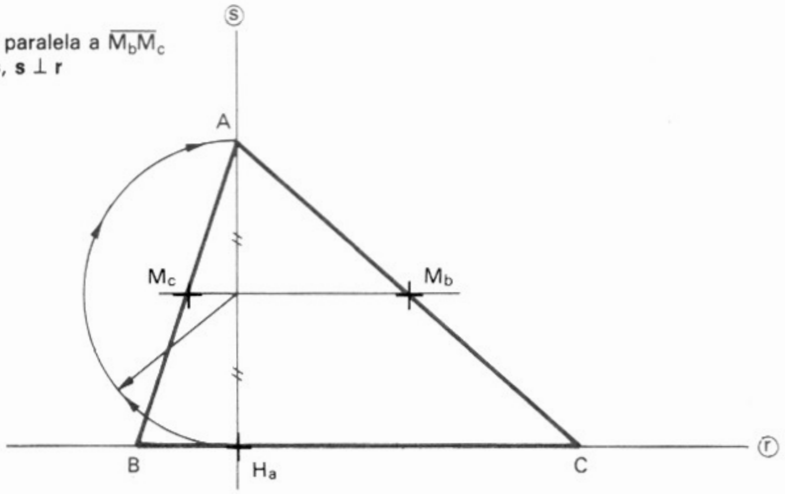
1) Proponha um problema, dados $\overline{BC}$ e M_b em posição.
2) Proponha um problema em que são dados duas retas concorrentes **r** e **s** e um ponto M, e peça ao aluno que trace um segmento que tenha extremos em **r** e **s**, e em M o seu ponto médio.



115 M_b, M_c e H_a.
Observação: Não esqueça que a reta que passa por M_b e M_c divide $\overline{AH_a}$ ao meio.

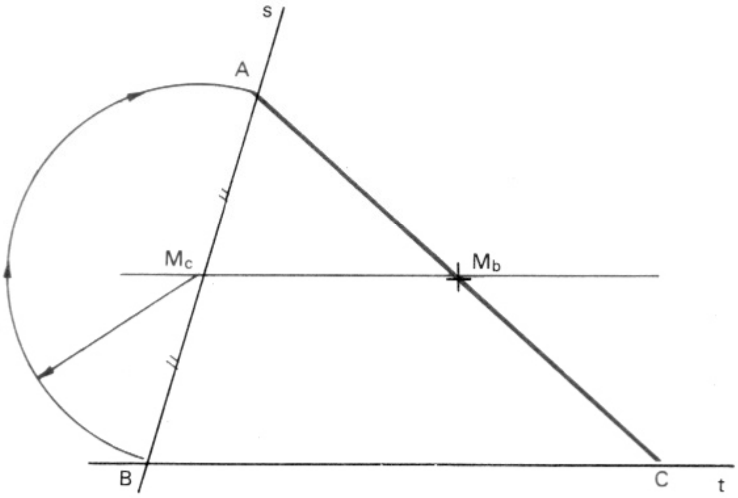
Sugestão:
Proponha um problema em que são dados B, H_a e M_b.

1.º) reta r paralela a $\overline{M_bM_c}$
2.º) reta s, s ⊥ r
3.º) A



114 M_b e as retas **s** e **t**, suportes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.
Sugestão: Se por M_b você traçar uma paralela à reta **t**, determinará M_c em **s**.

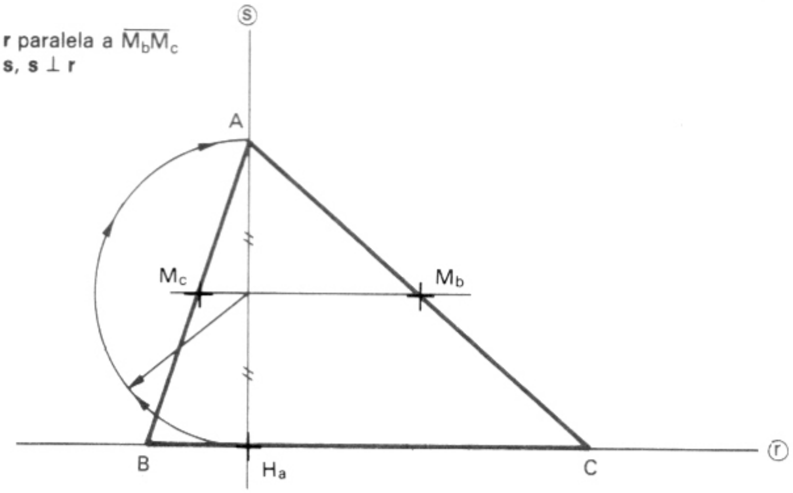
Sugestões:
1) Proponha um problema, dados $\overline{BC}$ e M_b em posição.
2) Proponha um problema em que são dados duas retas concorrentes **r** e **s** e um ponto M, e peça ao aluno que trace um segmento que tenha extremos em **r** e **s**, e em M o seu ponto médio.



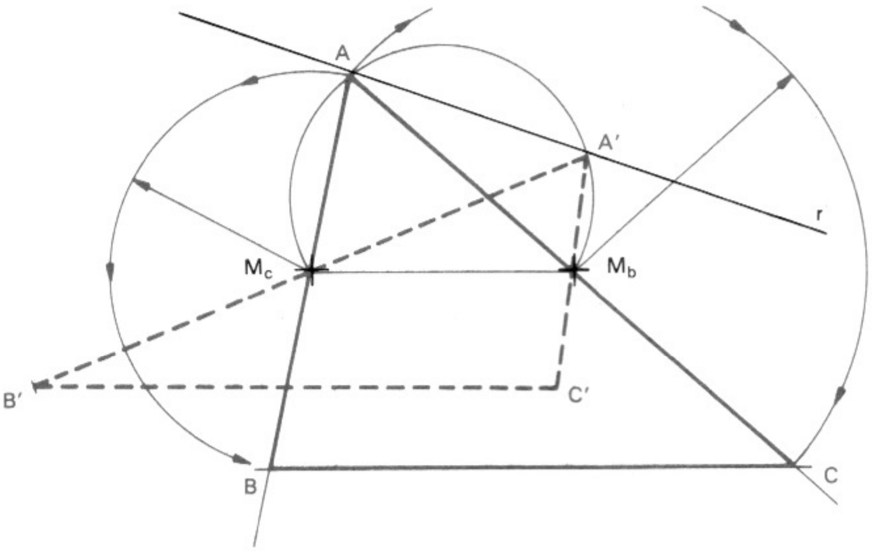
115 M_b, M_c e H_a.
Observação: Não esqueça que a reta que passa por M_b e M_c divide $\overline{AH_a}$ ao meio.

Sugestão:
Proponha um problema em que são dados B, H_a e M_b.

1.º) reta r paralela a $\overline{M_bM_c}$
2.º) reta s, s ⊥ r
3.º) A



116 M_b, M_c, $\hat{A} = 60°$ e a reta **r** que contém o vértice A.



1.º) Arco capaz de 60° sobre $\overline{M_bM_c}$, determinando A e A'
2.º) retas AM_b e AM_c ($A'M_b$ e $A'M_c$)
3.º) B e C (analogamente B' e C')

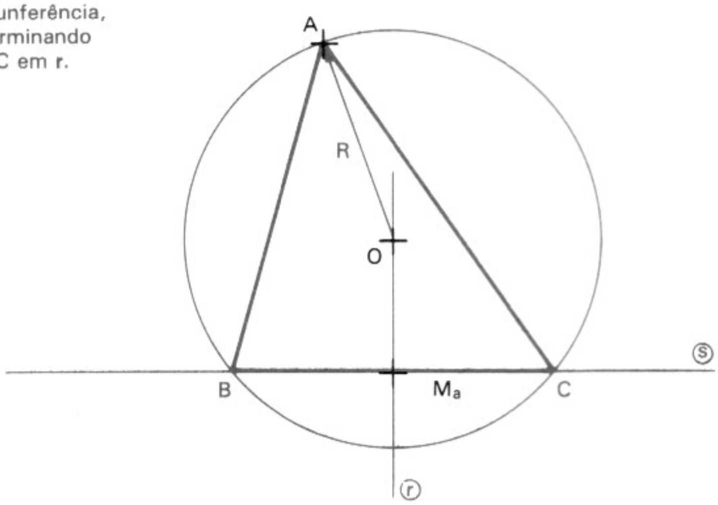
117 A, M_a e o circuncentro O.

Observação: Note que a reta que passa por O e M_a é a mediatriz de $\overline{BC}$. Como a mediatriz é perpendicular ao lado, fica fácil traçar o suporte de $\overline{BC}$.

Sugestões:
1) Proponha um problema em que são dados O, M_a e R.
2) Proponha um problema em que são dados O, M_a e M_b.

Será possível traçar os suportes de $\overline{BC}$ e de $\overline{AC}$ determinando C. Então, traça-se a circunferência circunscrita com raio $\overline{OC}$.

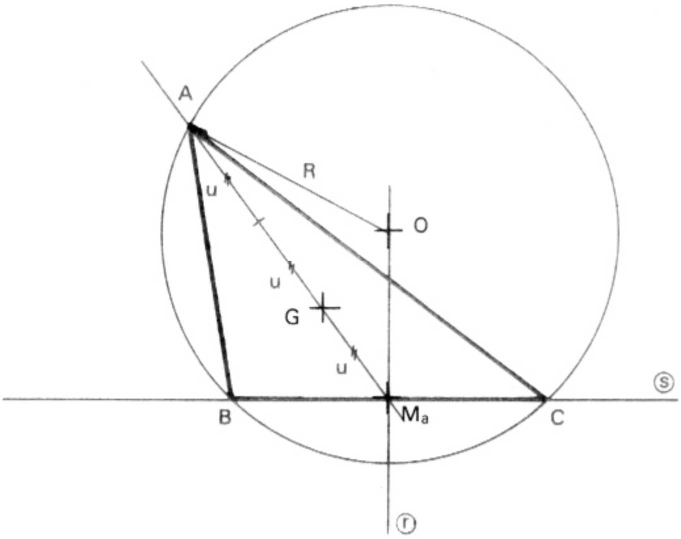
1.º) reta **r**
2.º) reta **s**, **s** ⊥ **r**
3.º) Circunferência, determinando B e C em **r**.



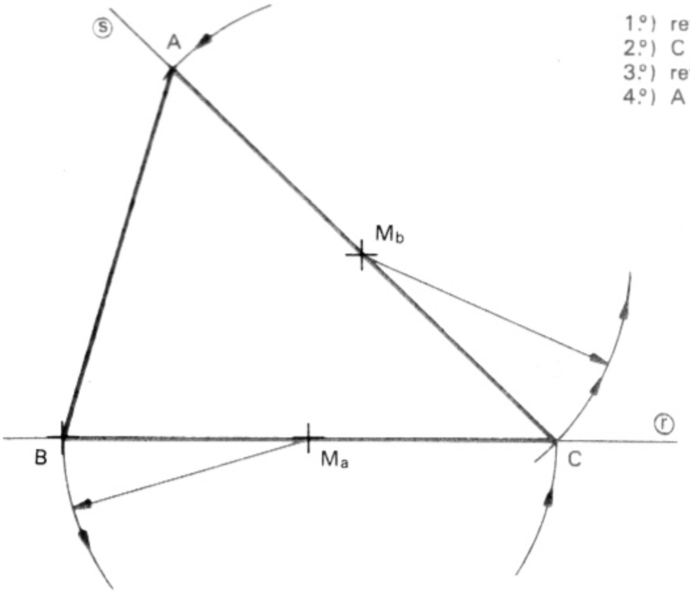
Sugestão:
Proponha um problema em que são dados M_a, M_b e G.

118 M_a, G e O.

Sugestão: Determinando A, você recai no problema anterior.



119 B, M_a e M_b.

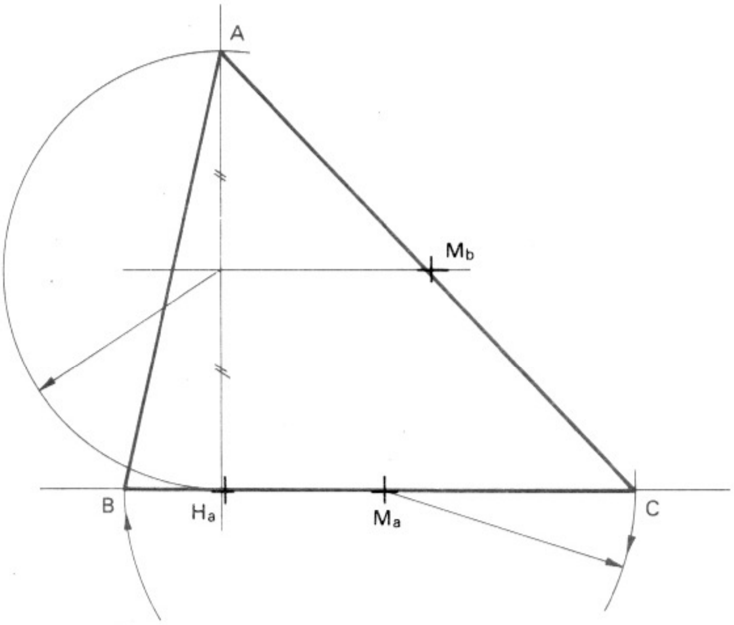


1.º) reta r
2.º) C
3.º) reta s
4.º) A

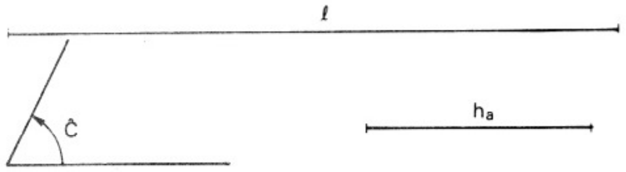
Construção de triângulos

Figura auxiliar e anotações

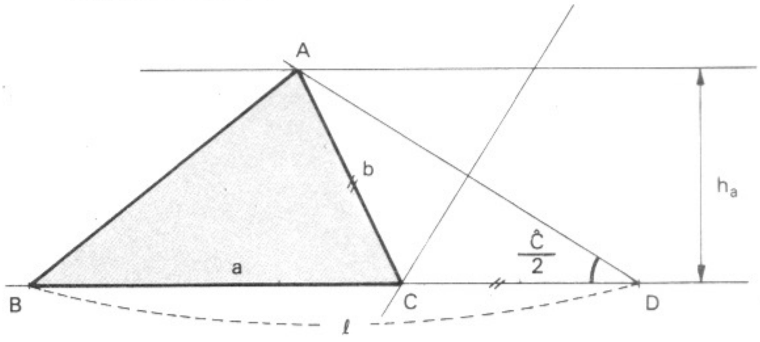
120 H_a, M_a e M_b.



121 $a + b = \ell$, h_a e $\hat{C}$.



1.º) ΔABD
2.º) Mediatriz de $\overline{AD}$, determinando C


A
b
h_a
$\frac{\hat{C}}{2}$
a
B
C
D
ℓ

Observação:
Insista que, quando é dada a soma de dois lados, na figura onde se supõe o problema resolvido aparece um triângulo isósceles, do qual se constrói a mediatriz da base (ΔACD).

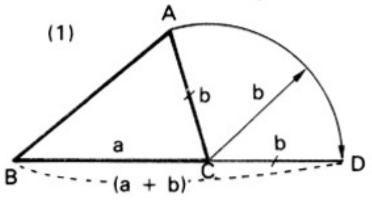
Soma ou diferença de elementos lineares

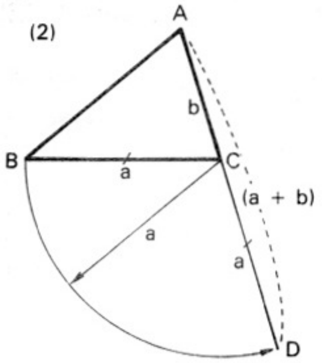
Entre os lados de um problema que propõe a construção de um triângulo, podem figurar somas de elementos lineares, isto é, soma de dois lados, soma de uma altura com um lado, perímetro etc. É importante notar que nesses casos é dado um segmento que corresponde à soma, mas não se sabe quais porções desse segmento correspondem aos elementos somados. Por exemplo: se é dado que $b + c = \ell$, isto é, ℓ correspondente à soma dos lados **b** e **c**, não se sabe que porção de ℓ corresponde a **b** ou a **c**.

Em problema assim, o segmento-soma deve ser introduzido na figura onde imaginamos o problema resolvido. O mesmo vale para o caso em que é dada uma diferença entre elementos lineares. Em particular, vamos examinar os casos em que é dada uma soma ou uma diferença entre dois lados.

Soma de dois lados

Vamos supor que foi dada a soma a + b. Observe nas figuras duas formas para introduzir essa soma quando se imagina o problema resolvido.

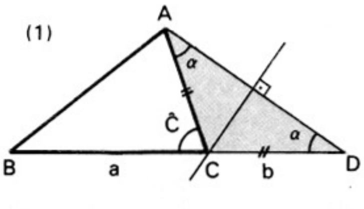


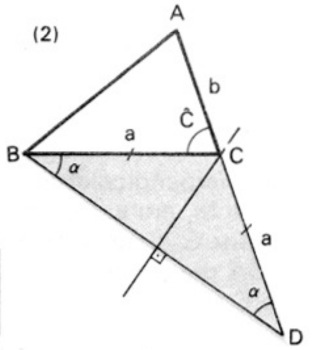


Entre as duas formas de introduzir a soma a + b na figura, dependendo dos outros dados, uma pode ser mais conveniente do que a outra. Assim, para efeito de estudo, convém introduzir a soma de todas as maneiras possíveis para optar pela melhor.

Na disposição (1), BD = a + b e na (2) AD = a + b. Assim, introduzimos a soma prolongando $\overline{BC}$ ou prolongando $\overline{AC}$. O próximo passo fundamental nas figuras é unir as extremidades A e D em (1) ou B e D em (2).

Observe atentamente que os triângulos ACD e BCD são isósceles.





$$\boxed{\alpha = \frac{\hat{C}}{2}}$$

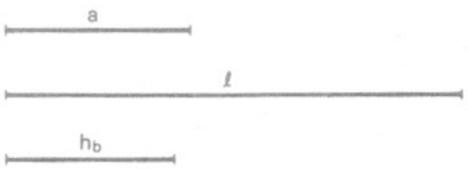
É muito comum, com os dados, ser possível construir o triângulo ABD para em seguida determinar C. Para construir o triângulo ABD, é de suma importância notar que α é a metade de C. De fato, tomemos por exemplo a disposição (1). Como C é ângulo externo de triângulo isósceles, temos:

$$\alpha + \alpha = \hat{C} \Rightarrow 2\alpha = \hat{C} \Rightarrow \alpha = \frac{\hat{C}}{2}$$

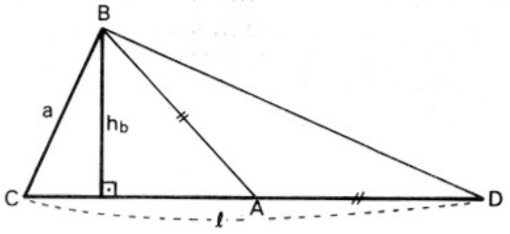
Uma vez constituído o triângulo ABD, determinamos o vértice C traçando a mediatriz de $\overline{AD}$ em (1) ou de $\overline{BD}$ em (2).

Exercícios

E16. **21** Dados: a, $\ell = b + c$ e h_b.



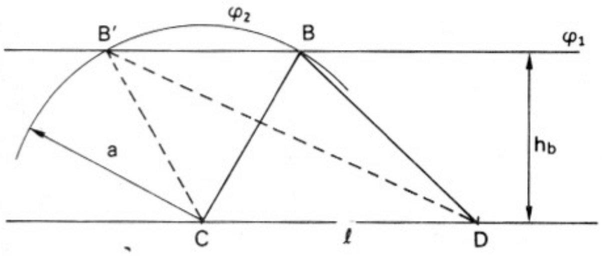
Suposto resolvido

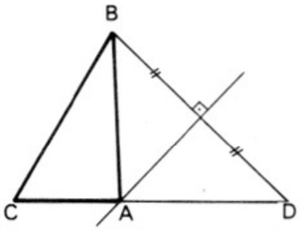


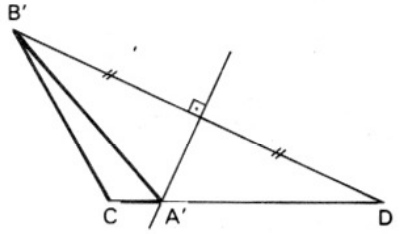
Resolução: Introduzimos a soma na forma do segmento CD (veja a figura onde se supõe o problema resolvido) e temos o triângulo BCD construtível. De fato, posicionando $\overline{CD}$, teremos duas propriedades para B:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: B dista } h_b \text{ de } \overline{CD} \text{ (LG 3)} \\ \varphi_2\text{: B dista } \mathbf{a} \text{ de C (LG 1)} \end{cases}$$

Uma vez construído o triângulo BCD, só resta determinar A. Mas isso se faz de imediato, pois basta traçar a mediatriz de $\overline{BD}$, a qual intercepta $\overline{CD}$ em A.



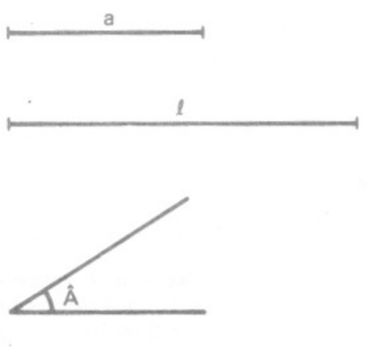




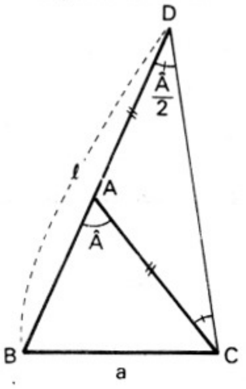
Observe que foi possível construir dois triângulos, BCD e B'CD. Nesse caso, o próprio problema admitiu duas soluções (triângulos ABC e A'B'C). Novamente fizemos figuras separadas para as duas soluções, apenas para obter maior clareza de exposição.

E16. **22** Dados: a + b = 95 mm, c = 45 mm e $\hat{B} = 60°$. Quanto vale **a**?

E16. **23** Dados:a, $\ell = b + c$ e $\hat{A}$.



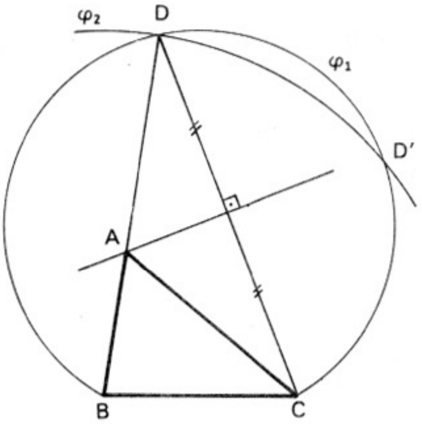
Suposto resolvido

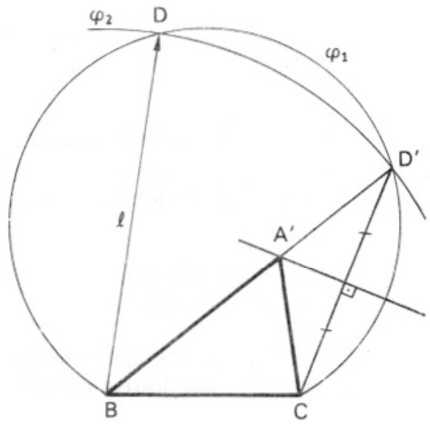


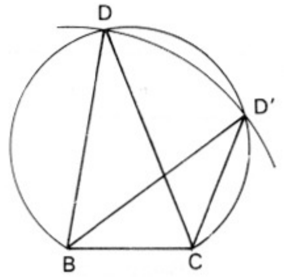
Resolução: Introduzimos a soma conforme a figura, onde se supõe o problema já resolvido. Então o triângulo BCD é construtível, pois posicionando $\overline{BC}$ temos duas propriedades para D:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: D enxerga } \overline{BC} \text{ segundo o ângulo } \dfrac{\hat{A}}{2} \text{ (LG 5)} \\ \varphi_2\text{: D dista } \ell \text{ de B (LG 1)} \end{cases}$$

Após a construção do triângulo BCD, determinar A na intersecção da mediatriz de $\overline{CD}$ com o segmento BD.

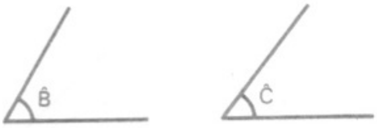




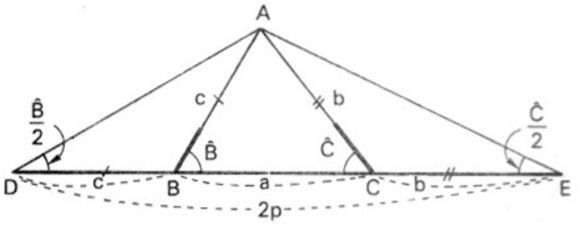


Embora para a construção do triângulo BCD tenhamos duas soluções (BCD e BCD'), as duas levam a uma só solução para o triângulo ABC, já que ABC e A'BC são a mesma solução em posições diferentes.

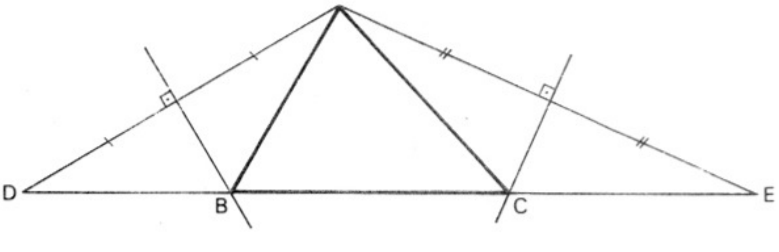
E16.**24** Dados: $\hat{B}$, $\hat{C}$ e 2p. (2p = perímetro).



Suposto resolvido



Resolução: Introduzimos o perímetro como na figura em que se supõe o problema já resolvido. Então o triângulo ADE é construtível, pois dele conhecemos DE = 2p, $\hat{D} = \dfrac{\hat{B}}{2}$ e $\hat{E} = \dfrac{\hat{C}}{2}$. Em seguida, determinamos B e C sobre $\overline{CD}$, traçando as mediatrizes de $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$.

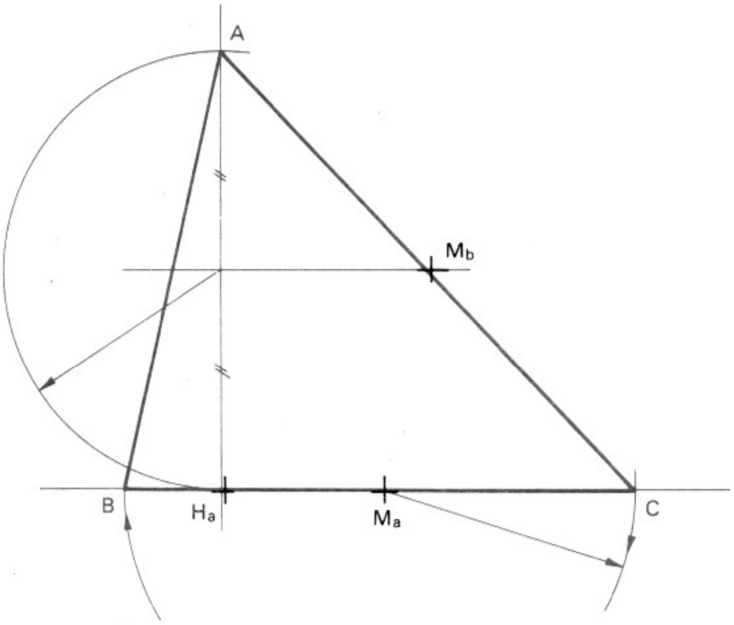


E16.**25** Dados: 2p = 139 mm, h_a = 34 mm e $\hat{B}$ = 60°. Quanto vale **b**?

Sugestão: Introduzindo o perímetro como no problema anterior, o triângulo ADE será novamente construtível.

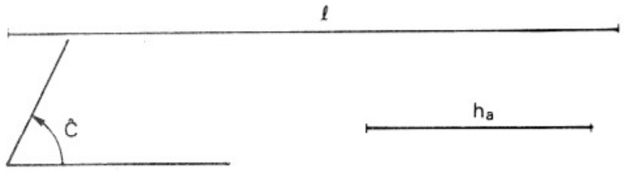
Resolva os exercícios de 121 a 124 do caderno de atividades.

120 H_a, M_a e M_b.

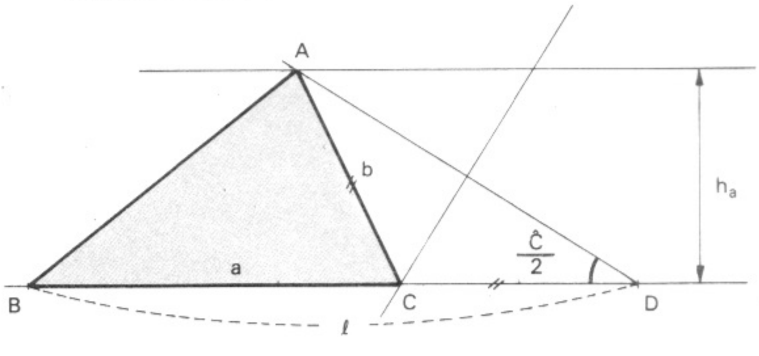


121 $a + b = \ell$, h_a e $\hat{C}$.

Observação:
Insista que, quando é dada a soma de dois lados, na figura onde se supõe o problema resolvido aparece um triângulo isósceles, do qual se constrói a mediatriz da base (ΔACD).



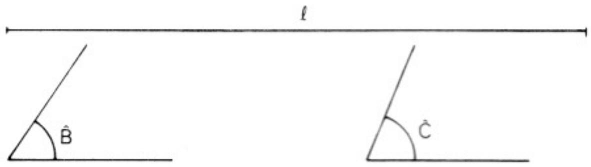
1.º) ΔABD
2.º) Mediatriz de
$\overline{AD}$, determinando C

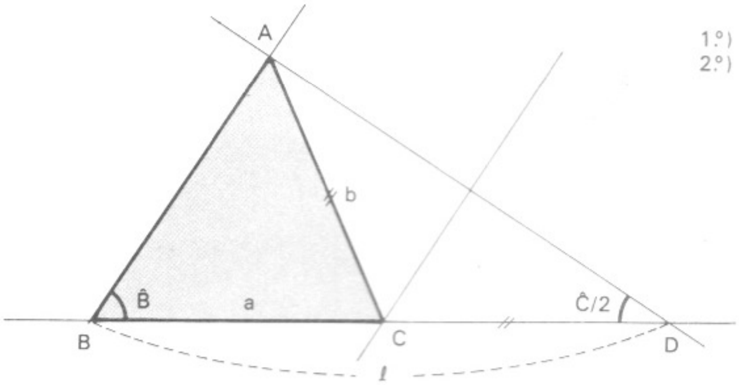


Construção de triângulos

Figura auxiliar e anotações

122 $a + b = \ell$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.



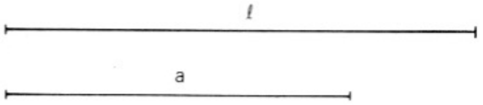


1.º) ΔABD
2.º) Mediatriz de $\overline{AD}$, determinando C

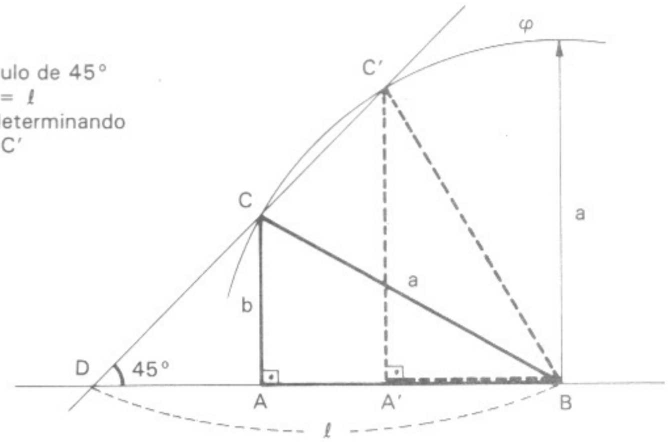
123 **a**, $b + c = \ell$ e $\hat{A} = 90°$.

Observações:

1) Em vez de traçar a perpendicular a $\overline{BD}$ por C (e C') para determinar A (e A'), insista que se poderia traçar a mediatriz de $\overline{CD}$ (e $\overline{C'D}$).
2) No caso particular de $\hat{A} = 90°$, as duas soluções só diferem em posição, isto é, o problema admite solução única.

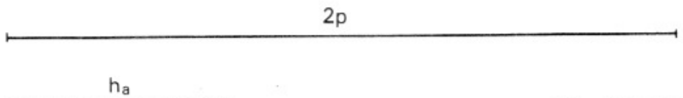


1.º) Ângulo de 45°
2.º) $DB = \ell$
3.º) φ, determinando C e C'

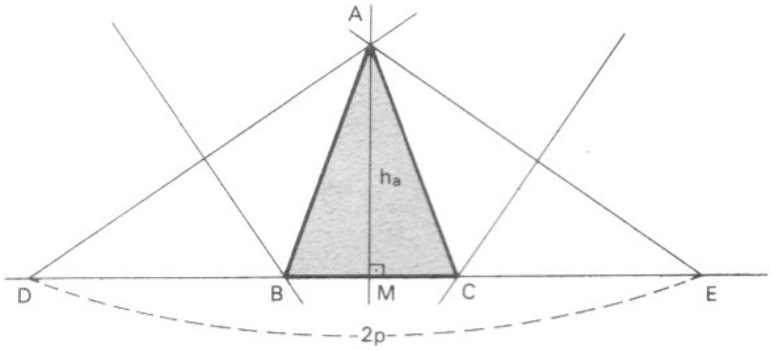


Construção de triângulos e quadriláteros

124 2p, h_a e $b = c$.
Sugestão: Lembre-se que num triângulo isósceles o pé da altura relativa à base é o ponto médio da base.



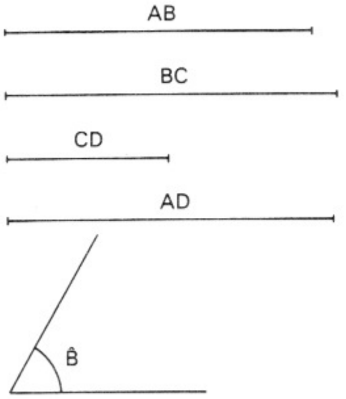
1.º) ΔADE (M é ponto médio de DE)
2.º) Mediatrizes de $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$, determinando B e C.

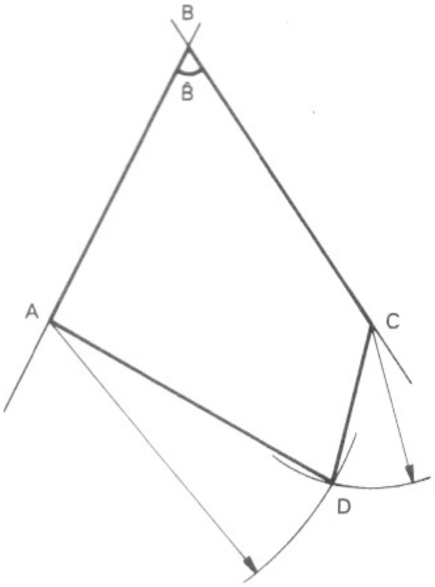


Para os exercícios de 125 a 130.
Construa um quadrilátero ABCD, conhecendo:

125 AB, BC, CD, AD e $\hat{B}$.

Observação:
Reforce bem a idéia de que, para construir um quadrilátero, via de regra, primeiro constrói-se um triângulo.

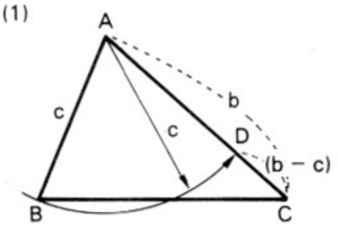


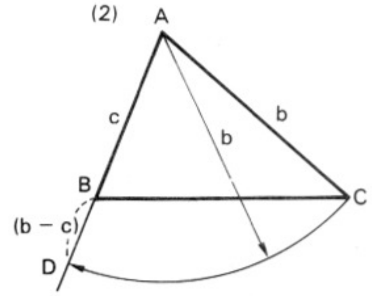


1.º) ΔABC
2.º) D

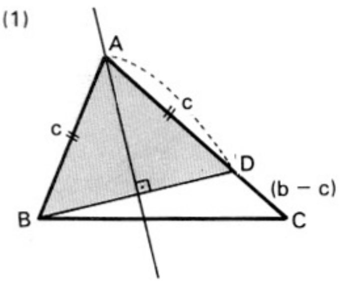
Diferença de dois lados

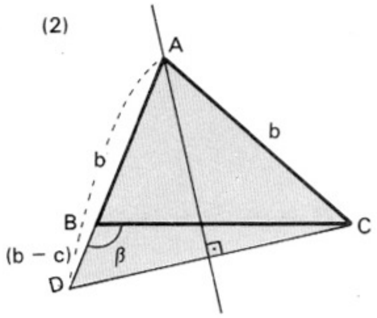
Vamos supor que foi dada a diferença b − c. Como na adição, também essa diferença pode ser introduzida de duas maneiras, na figura:





E também é fundamental unir B e D em (1) ou C e D em (2). Note, nos dois casos, novamente a presença de triângulos isósceles.



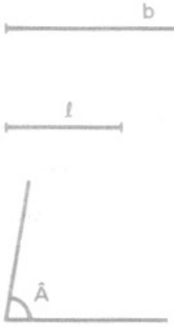


Observe que na disposição (1) o ângulo Ĉ do triângulo ABC fica inalterado no triângulo BCD. Já em (2) é o ângulo B̂ que se mantém no triângulo BCD pois $\beta = 180° - \hat{B}$, isto é, se B̂ for conhecido, β também o será.

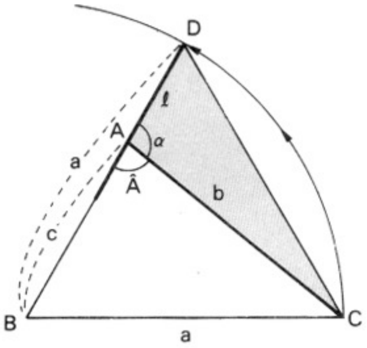
Nesses casos, é comum, com os demais dados, ser possível construir o triângulo BCD, para a partir dele obter o triângulo ABC. Assim, convém observar que A pertence à mediatriz de $\overline{BD}$ em (1) ou à de $\overline{CD}$ em (2).

Exercícios

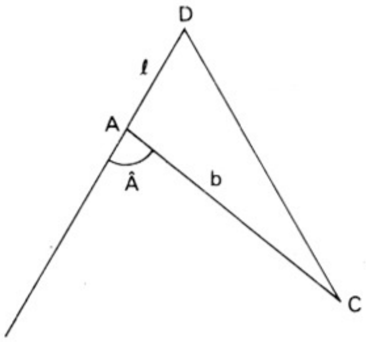
E16. **26** Dados: b, $\ell = a - c$ e Â.

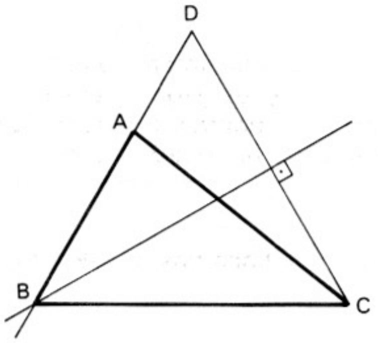


Suposto resolvido



Resolução: Introduzimos a diferença conforme a figura onde se supõe o problema resolvido. Então, o triângulo ACD é construtível, pois dele conhecemos os lados ℓ e **b**, e o ângulo $\alpha = 180° - \hat{A}$. O vértice B é o ponto de intersecção do prolongamento do lado $\overline{DA}$ com a mediatriz de $\overline{CD}$, já que B é eqüidistante de C e D.





E16.**27** Dados: b = 30 mm, a − c = 10 mm e $\hat{A} = 90°$. Quanto vale o perímetro?

E16.**28** Dados: a = 60 mm, b − c = 14 mm e $\hat{C} = 45°$. Quanto vale **b**?

17

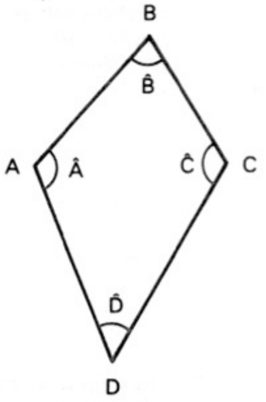
Quadriláteros

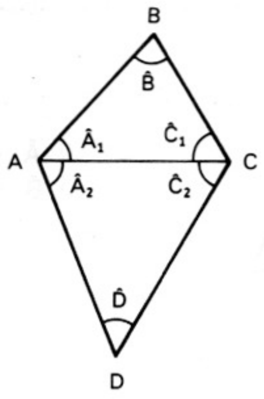
Com o objetivo de efetuar construções de quadriláteros e aplicar as propriedades desses polígonos nas construções geométricas de um modo geral, vamos fazer um estudo dessas importantes figuras. Convém, de início, estabelecer a soma dos ângulos internos de um quadrilátero.

Teorema

Num quadrilátero qualquer, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 360°.

☐ **Demonstração:**





Num quadrilátero ABCD dizemos que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$, assim como $\hat{B}$ e $\hat{D}$, são opostos. Dizemos, também, que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, assim como $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ são também opostos.

Traçando-se a diagonal $\overline{AC}$, o quadrilátero ABCD fica dividido nos triângulos ABC e ACD. Como a soma das medidas dos ângulos de um triângulo é igual a 180°, temos:

No triângulo ABC: $\hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C}_1 = 180°$
No triângulo ACD: $\hat{A}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D} = 180°$

Somando membro a membro vem: $\underline{\hat{A}_1 + \hat{A}_2} + \hat{B} + \underline{\hat{C}_1 + \hat{C}_2} + \hat{D} = 360°$

Como $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}$ e $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = \hat{C}$, vem a tese:

$$\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°}$$

■ c.q.d.

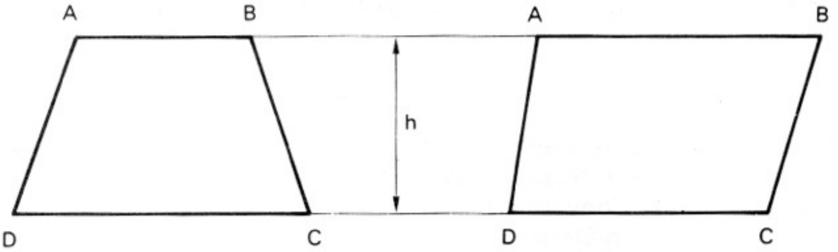
Quadriláteros notáveis

Trapézio

Definição

Trapézio é todo quadrilátero que possui um par, e somente um par, de lados opostos paralelos.

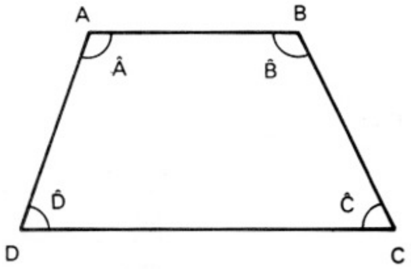
Observação: Os lados paralelos de um trapézio são denominados **bases**, enquanto os outros dois lados são chamados **lados não-paralelos** do trapézio.



Nos trapézios das figuras anteriores, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são as bases, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são os lados não-paralelos.

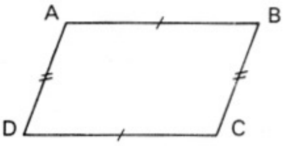
A distância entre as bases é chamada **altura** do trapézio.

Uma propriedade imediata dos trapézios é: os ângulos internos formados por um qualquer lado não-paralelo com as bases são suplementares (colaterais internos).



$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{D} = 180° \\ \hat{B} + \hat{C} = 180° \end{cases}$$

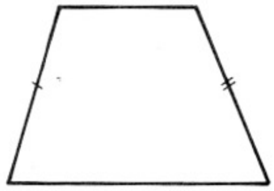
Atualmente é mais comum, na definição de trapézio, não dizer "**apenas um par** de lados opostos paralelos" Em não se fazendo tal exigência, um quadrilátero que possui os pares de lados opostos respectivamente paralelos também é um trapézio, isto é, um paralelogramo também é um trapézio.



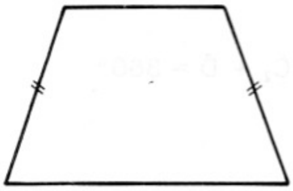
Os trapézios classificam-se em:

- **Escaleno**: quando os lados não-paralelos não são congruentes.
- **Isósceles**: quando os lados não-paralelos são congruentes.
- **Retângulo**: quando um dos lados não-paralelos é perpendicular às bases.

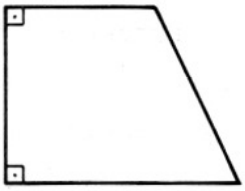
Aqui optou-se por diferenciar essas duas famílias de quadriláteros, ou seja, os trapézios propriamente ditos e os paralelogramos. Desse modo perdem-se, em generalidades, algumas poucas propriedades que essas duas famílias têm em comum, mas ganha-se na caracterização de dois importantes entes geométricos.



Escaleno

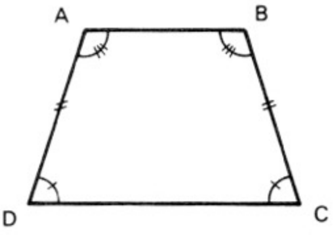


Isósceles

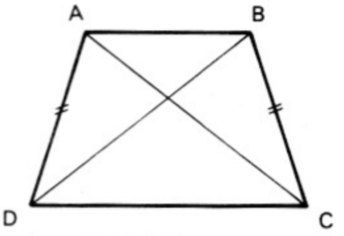


Retângulo

Observação: Num trapézio isósceles os ângulos de uma mesma base são congruentes e as diagonais são também congruentes.



$\measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{B}$ e $\measuredangle \hat{C} \equiv \measuredangle \hat{D}$

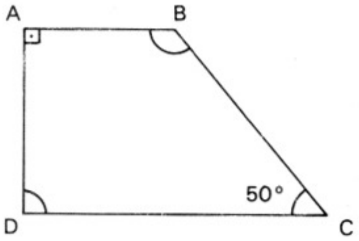


$\overline{AC} \equiv \overline{BD}$

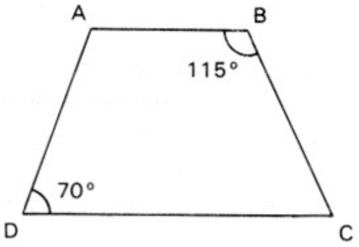
Exercícios

E17.1 Dê as medidas dos ângulos desconhecidos nos trapézios seguintes, de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

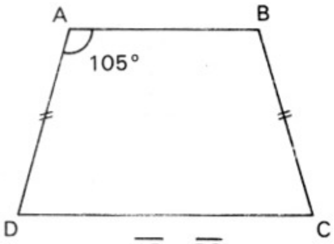
a)



b)

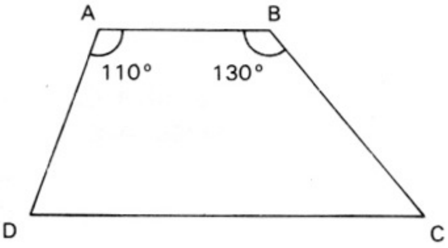


c)



($\overline{AD} \equiv \overline{BC}$)

d)



E17.2 O que se pode concluir a respeito dos ângulos opostos de um trapézio isósceles?

E17.3 Num trapézio isósceles, os ângulos opostos são tais que um é o triplo do outro. Quanto medem esses ângulos?

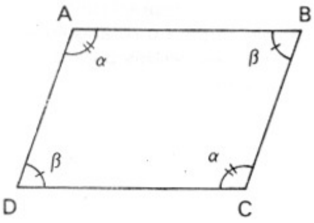
Paralelogramos

Definição

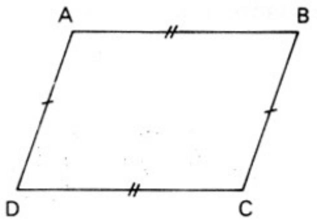
Paralelogramo é todo quadrilátero que possui os pares de lados opostos respectivamente paralelos.

São muito importantes as seguintes propriedades válidas para todo paralelogramo:

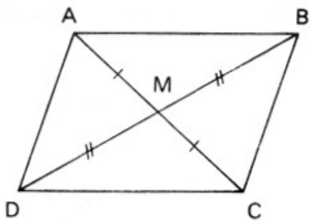
- Os ângulos opostos são congruentes.
- Quaisquer dois ângulos internos não-opostos são suplementares.
- Os lados opostos são congruentes.
- As diagonais interceptam-se em seus pontos médios.



$\alpha + \beta = 180°$



$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$
$\overline{BC} \equiv \overline{AD}$

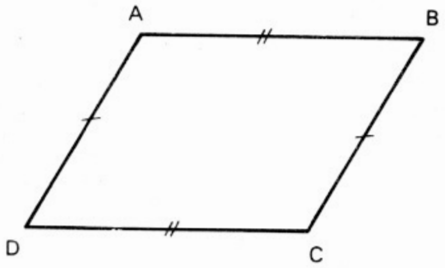


$\overline{AM} \equiv \overline{MC}$
$\overline{BM} \equiv \overline{MD}$

Também são usadas com freqüência as seguintes propriedades.

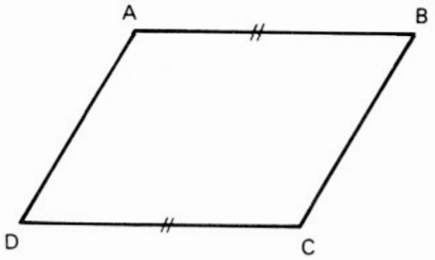
Um quadrilátero é um paralelogramo quando:

- os pares de lados opostos são respectivamente congruentes.



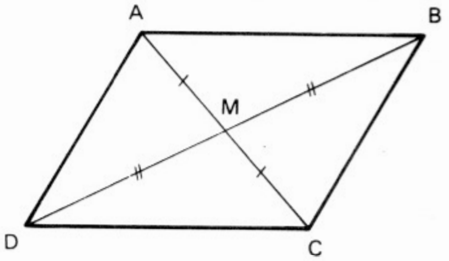
Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$
Então ABCD é um paralelogramo.

- um par de lados opostos são paralelos e congruentes.



Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
Então ABCD é um paralelogramo

- as diagonais interceptam-se em seus pontos médios.

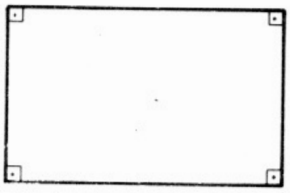


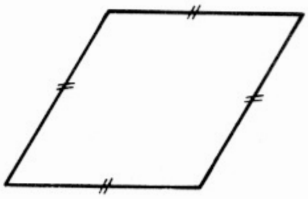
Se $\overline{AM} \equiv \overline{MC}$ e $\overline{BM} \equiv \overline{MD}$
Então ABCD é um paralelogramo.

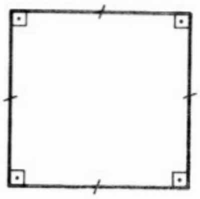
Os paralelogramos classificam-se em:

- **Retângulo**: quando possui os ângulos retos.
- **Losango**: quando possui os quatro lados congruentes.
- **Quadrado**: quando possui os ângulos retos e os quatro lados congruentes.

Observe, pela definição, que o quadrado é simultaneamente um retângulo e um losango. É importante entender o quadrado dessa forma, pois ele herda automaticamente todas as propriedades válidas para o retângulo e todas as válidas para o losango.

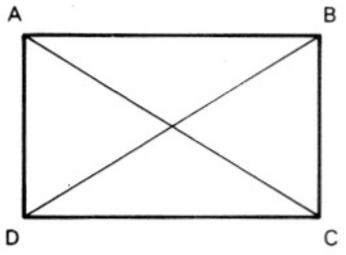

Retângulo


Losango

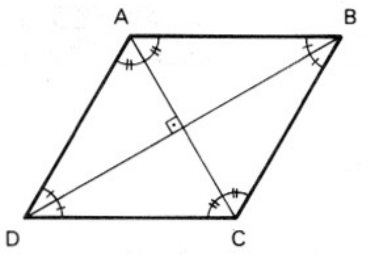

Quadrado

O retângulo, o losango e o quadrado possuem todas as propriedades já mencionadas para os paralelogramos. Mas, além daquelas, eles possuem propriedades particulares muito importantes com relação às suas diagonais. Vejamos quais:

- **Em todo retângulo as diagonais são congruentes.**
- **Em todo losango as diagonais são perpendiculares e bissetrizes dos ângulos internos.**



$\boxed{\overline{AC} \equiv \overline{BD}}$



$\boxed{\overline{AC} \perp \overline{BD}}$

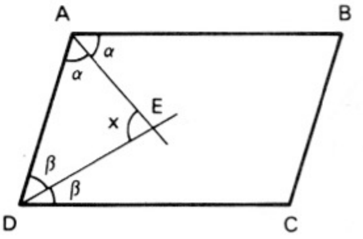
Como o quadrado é um retângulo, suas diagonais são congruentes, e como ele também é losango, suas diagonais são perpendiculares e bissetrizes dos ângulos internos.

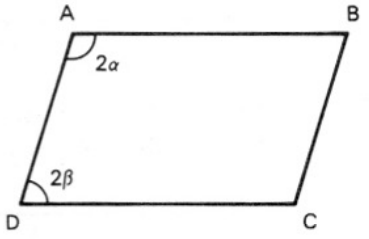
Exercícios

E17.**4** ABCD é um paralelogramo em que $\hat{A}$ é o quádruplo de $\hat{B}$. Calcule $\hat{A}$.

E17.**5** Calcule a medida do ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ de um paralelogramo ABCD.

Resolução:





Seja E o ponto de intersecção dessas bissetrizes.

No triângulo ADE, $\boxed{x + \alpha + \beta = 180°}$ (1)

No paralelogramo, $2\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = 90°}$

Substituindo $\alpha + \beta$ por 90° na equação (1), vem:

$$x + 90° = 180° \Rightarrow \boxed{x = 90°}$$

Resposta: 90°

E17.**6** Num losango, uma das diagonais forma com um dos lados um ângulo de 27°. Calcule as medidas dos ângulos desse losango.

E17.**7** ABCD é um retângulo em que a diagonal $\overline{AC}$ forma com o lado $\overline{AB}$ um ângulo de 30°. Sendo M o ponto de encontro das diagonais:

a) Calcule $A\hat{M}B$.

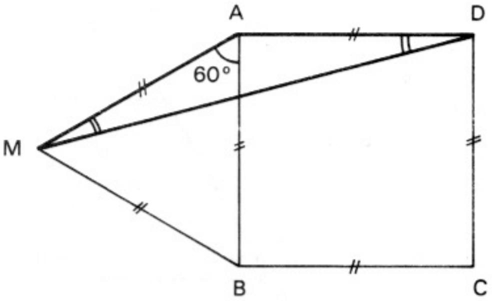
b) Que tipo de triângulo é BCM?

E17.**8** ABCD é um quadrado e ABM é um triângulo eqüilátero externo ao quadrado. Calcule as medidas dos ângulos do triângulo AMD.

Resolução: Como os lados do quadrado são congruentes e os do triângulo eqüilátero também, é imediato que o triângulo AMD é isósceles. Nesse triângulo, temos:

$M\hat{A}D = 60° + 90° = 150°$

Como $\measuredangle\ A\hat{M}D \equiv \measuredangle\ A\hat{D}M$,
vem $A\hat{M}D = A\hat{D}M = 15°$



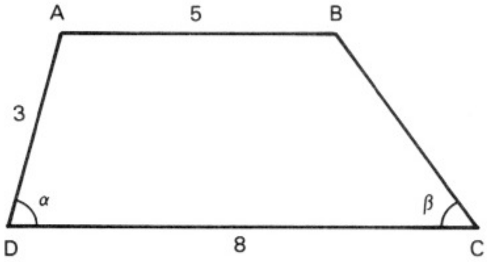
Resposta: 150°, 15° e 15°

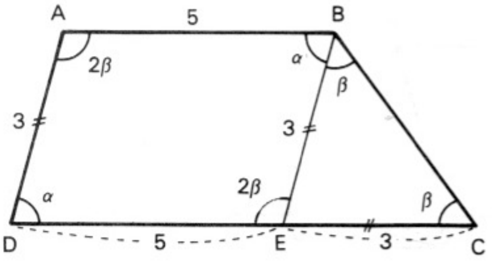
E17.**9** ABCD é um quadrado e ABM é um triângulo eqüilátero interno ao quadrado. Calcule as medidas dos ângulos do triângulo BMC.

E17.**10** ABCD é um paralelogramo em que a bissetriz do ângulo $\hat{D}$ intercepta o lado $\overline{AB}$ em seu ponto médio. Quanto vale a razão entre o menor e o maior lado desse paralelogramo?

E17.**11** ABCD é um trapézio de bases AB = 5 e CD = 8. Além disso, AD = 3. Sendo $\hat{D} = \alpha$ e $\hat{C} = \beta$, calcule, em função de α e β, as medidas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ desse trapézio.

Resolução:





Pelo vértice B traçamos uma paralela ao lado $\overline{AD}$, que intercepta $\overline{CD}$ em E. Assim, o quadrilátero ABED é um paralelogramo, pois possui os lados opostos paralelos.

Como os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, temos:

$$AD = 3 \Rightarrow \boxed{BE = 3}$$

$$AB = 5 \Rightarrow DE = 5 \therefore \boxed{CE = 3}$$

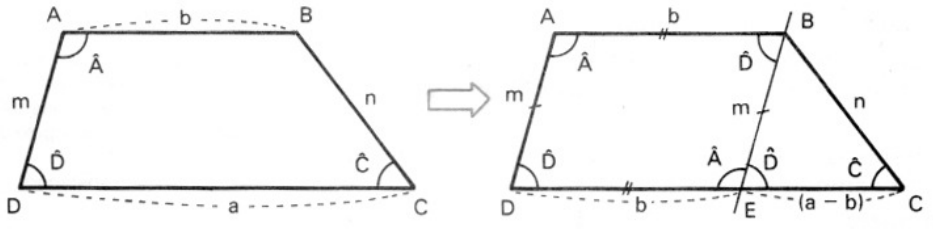
Assim, o triângulo EBC é isósceles, pois $\overline{CE} \equiv \overline{BE}$. Nesse triângulo, temos: $C\hat{B}E = \beta$ (ângulos da base congruentes) e como $\measuredangle\ B\hat{E}D$ é um ângulo externo, $B\hat{E}D = \beta + \beta$, isto é, $B\hat{E}D = 2\beta$.

Finalmente, como os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes, temos:

$$\hat{A} = 2\beta \text{ e } A\hat{B}E = \alpha$$

Resposta: 2β e $\alpha + \beta$

Observação: O artifício usado na resolução do problema anterior é muito empregado nos trapézios. Note que o trapézio ficou dividido em um paralelogramo e em um triângulo. Diante de um problema sobre um trapézio, pode-se pensar no traçado dessa paralela. Convém examinar com atenção os ângulos e lados do paralelogramo e do triângulo em que o trapézio fica dividido pelo traçado.



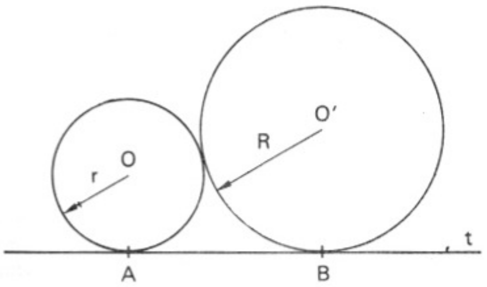
No volume 2 aprenderemos que o traçado dessa paralela está incluído num método bastante geral de resolução de problemas, chamado **translação**.

E17.**12** Num trapézio isósceles, um dos ângulos mede 60° e as bases medem 7 cm e 10 cm. Calcule a medida de um dos lados não-paralelos.

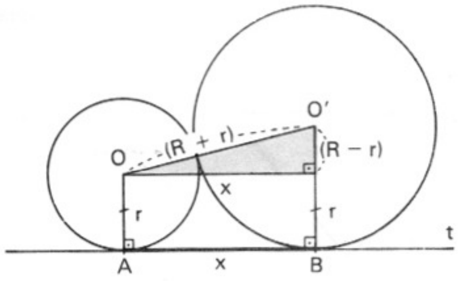
Sugestão: Use o artifício do problema anterior.

E17.**13** Num trapézio retângulo, o ângulo agudo mede 45°. Se as bases medem 4 cm e 10 cm, determine a altura do trapézio.

E17.**14** Na figura seguinte, as circunferências são tangentes entre si e tangenciam a reta **t** nos pontos A e B. Calcule AB em função dos raios.



Resolução:



Seja **x** o comprimento do segmento AB. Os centros O e O' e os pontos A e B são vértices de um trapézio retângulo. Conduzindo por O uma paralela a **t**, obtém-se um triângulo retângulo de lados **x**, R − r e R + r. Pelo teorema de Pitágoras, desse triângulo vem:

$$x^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2$$
$$x = 2\sqrt{R \cdot r}$$

Resposta: $AB = 2\sqrt{R \cdot r}$

E17.**15** Calcule o comprimento da diagonal de um retângulo de lados 5 cm e 12 cm.

E17.**16** Calcule o comprimento da diagonal de um quadrado em função de seu lado ℓ.

E17.**17** As diagonais de um losango medem 6 cm e 8 cm. Calcule o perímetro desse losango.

Construção de quadriláteros

Um quadrilátero pode ser entendido como uma composição de dois triângulos. Por essa razão, para construí-lo, é necessário conhecer **cinco** elementos de um quadrilátero, dos quais **ao menos um deve ser linear**. Com **três** deles, constrói-se um dos triângulos em que o quadrilátero fica dividido por uma de suas diagonais, e com os outros **dois** determina-se o quarto vértice.

Entretanto, quando se trata de um quadrilátero notável, convém observar que há dados que estão implícitos. Assim, sendo ABCD um quadrilátero a ser construído, observe que:

- se ABCD é um trapézio, são precisos **quatro** dados para construí-lo, pois **um** já está implícito, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, por exemplo;
- se ABCD é um paralelogramo qualquer, são precisos **três** dados, pois **dois** já são conhecidos, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$;
- se ABCD é um retângulo, são precisos **dois** dados, pois já se sabe que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ e que seus ângulos são retos;
- se ABCD é um losango, também são precisos **dois** dados, pois já se sabe que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ e os lados são congruentes;
- Finalmente, se ABCD é um quadrado, é preciso apenas **um** dado, pois já são conhecidos **quatro**, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, os lados são congruentes e os ângulos são retos.

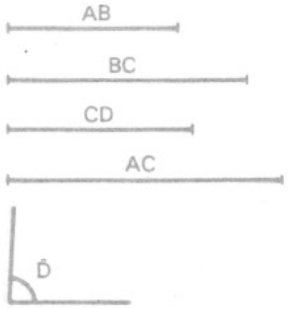
Embora tenhamos feito um estudo dos trapézios, vamos deixar as construções desse quadrilátero para o próximo volume quando estudarmos translação.

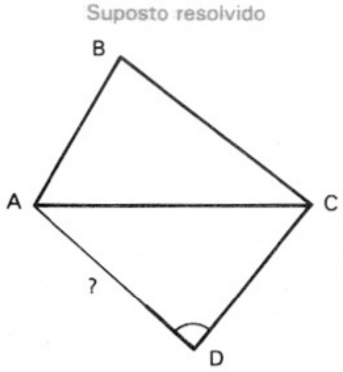
As técnicas de construções de quadriláteros são as mesmas utilizadas para os triângulos. Isto é, imagina-se o problema já resolvido e faz-se uma figura-rascunho onde se dá destaque a elementos dados etc.

Exercícios

E17.**18** Dados: AB, BC, CD, AC e D.

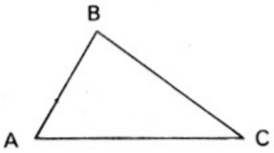
Nos problemas em que se propõem construções de quadriláteros, vamos omitir do enunciado "construa um quadrilátero ABCD..."

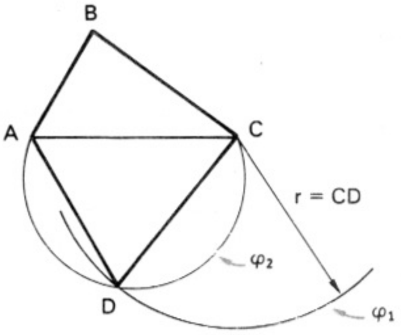




Resolução: Construímos o triângulo ABC, pois dele conhecemos os três lados. Então, podemos determinar o vértice D, já que dele conhecemos duas propriedades:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: D dista CD de C (LG 1)} \\ \varphi_2\text{: D enxerga } \overline{AC} \text{ segundo o ângulo } \hat{D} \text{ (LG 5)} \end{cases}$$



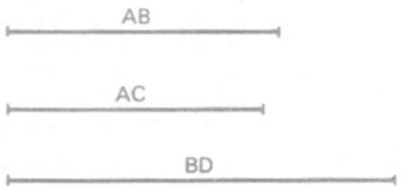


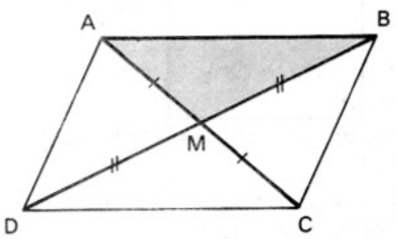
E17.**19** Dados: BC = 25 mm, AD = 35 mm, AC = 40 mm, B = 90° e D = 60°. Quanto mede a diagonal $\overline{BD}$?

E17.**20** Dados: AB = 32 mm, BC = 35 mm, CD = 14 mm, AC = 42 mm e BD = 40 mm. Qual é a medida do lado $\overline{AD}$?

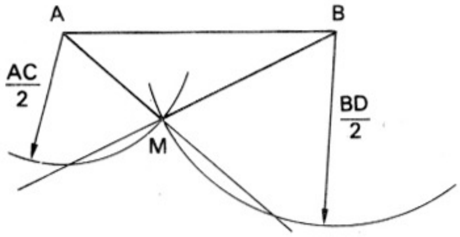
Resolva os exercícios de 125 a 130 do caderno de atividades.

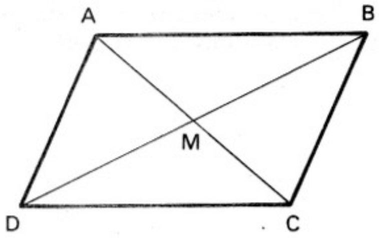
E17.**21** Dados: Paralelogramo, AB, AC e BD.




Suposto resolvido

Resolução: Sendo M o ponto de encontro das diagonais, o triângulo AMB é construtível, já que dele conhecemos os três lados (lembre-se de que as diagonais do paralelogramo interceptam-se em seus pontos médios). Em seguida é fácil determinar C e D nos prolongamentos de $\overline{AM}$ e $\overline{BM}$.





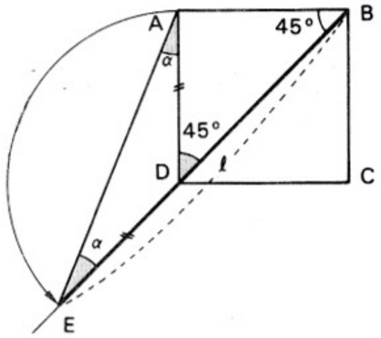
E17.**22** Dados: Paralelogramo, AC = 40 mm, BD = 58 mm e $A\hat{M}D = 60°$, onde M é o ponto de encontro das diagonais. Qual é o perímetro do paralelogramo?

E17.**23** Dados: Paralelogramo, AB = 60 mm, AD = 30 mm, AC = 55 mm. Quanto mede a diagonal $\overline{BD}$?

E17.**24** Construa um retângulo, dados o raio R = 30 mm da circunferência circunscrita e um lado ℓ = 36 mm. Quanto mede o outro lado?

E17.**25** Num losango, uma das diagonais mede 60 mm, e o lado é o segmento áureo dessa diagonal. Construa esse losango. Quanto mede a outra diagonal?

E17.**26** Construa um quadrado dada a soma ℓ de um lado com uma diagonal.

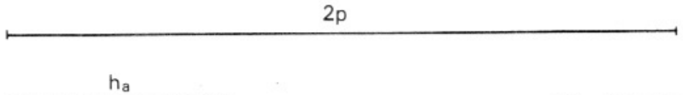

Suposto resolvido

Pelo teorema do ângulo externo, no triângulo ADE temos:

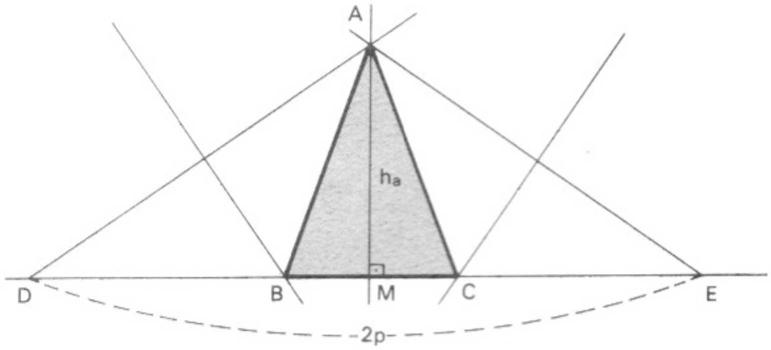
$2\alpha = 45° \Rightarrow \alpha = 22°30'$

Construção de triângulos e quadriláteros

124 2p, h_a e $b = c$.
Sugestão: Lembre-se que num triângulo isósceles o pé da altura relativa à base é o ponto médio da base.



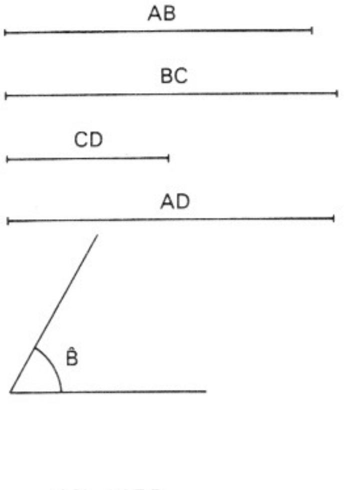
1.º) ΔADE (M é ponto médio de DE)
2.º) Mediatrizes de $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$, determinando B e C.



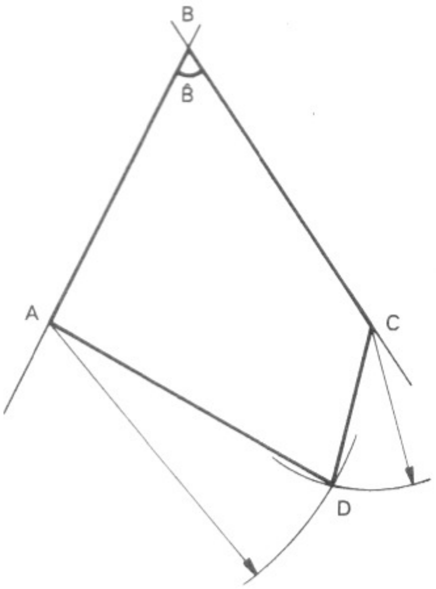
Para os exercícios de 125 a 130.
Construa um quadrilátero ABCD, conhecendo:

125 AB, BC, CD, AD e $\hat{B}$.

Observação:
Reforce bem a idéia de que, para construir um quadrilátero, via de regra, primeiro constrói-se um triângulo.

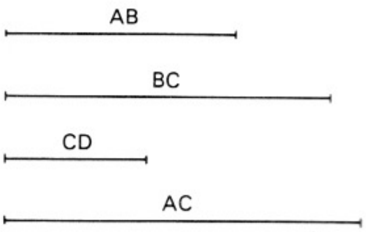


1.º) ΔABC
2.º) D

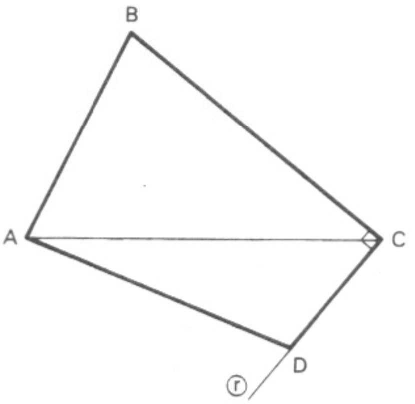


Construção de quadriláteros

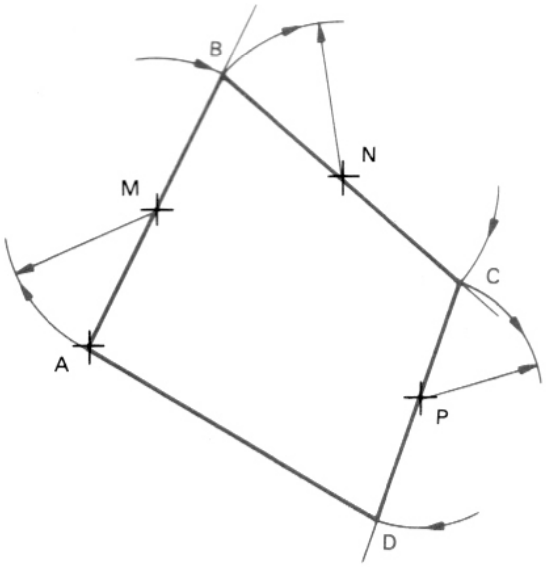
126 AB, BC, CD, AC e $\hat{C} = 90°$.



1.º) ΔABC
2.º) reta r
3.º) $\overline{CD}$



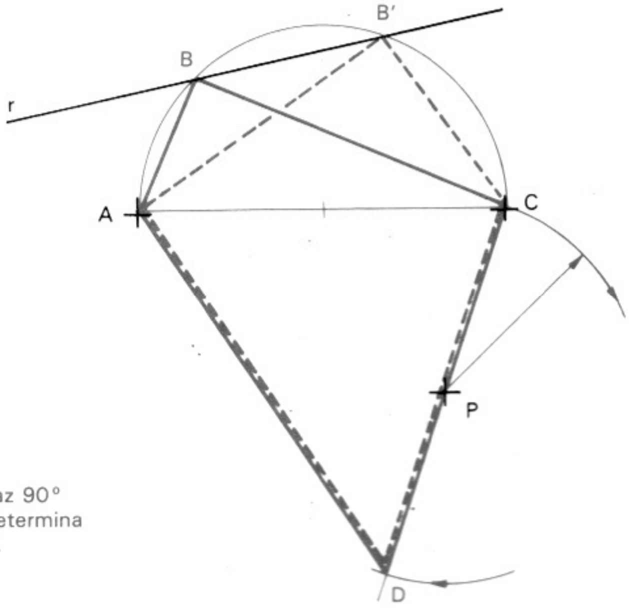
127 O vértice A e os pontos M, N e P, médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.



Construção de quadriláteros

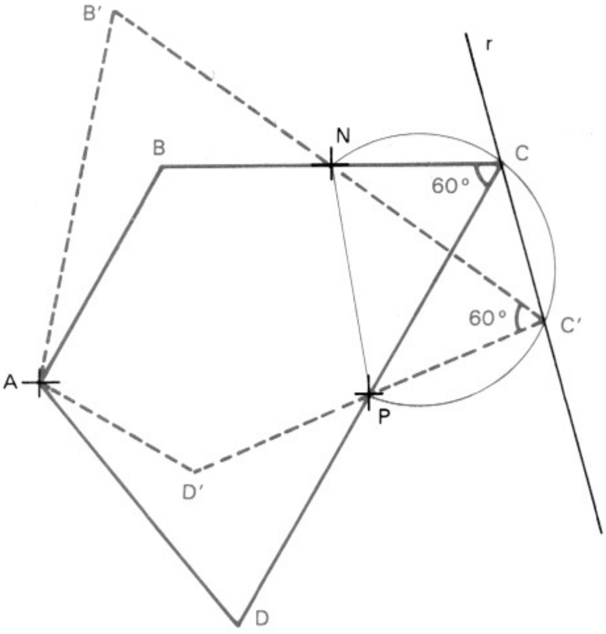
Figura auxiliar e anotações

128 Os vértices A e C, o ponto P, médio de $\overline{CD}$, a reta **r** que contém B e $\hat{B} = 90°$.



O arco capaz 90° sobre $\overline{AC}$ determina B e B' em **r**.

129 O vértice A, os pontos N e P, médios de $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, a reta **r** que contém C e $\hat{C} = 60°$.

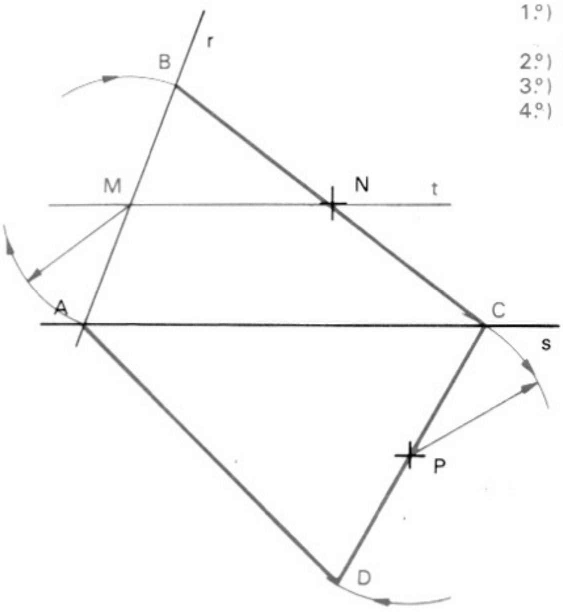


O arco capaz de 60° sobre $\overline{NP}$ determina C e C' em **r**. Em seguida determinam-se B e D (B' e D').

Construção de quadriláteros

130 O vértice A, os pontos N e P, médios de $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, a reta **r** que contém B e a reta **s** que contém C.

Sugestão: Você pode construir o triângulo ABC como no exercício 114.

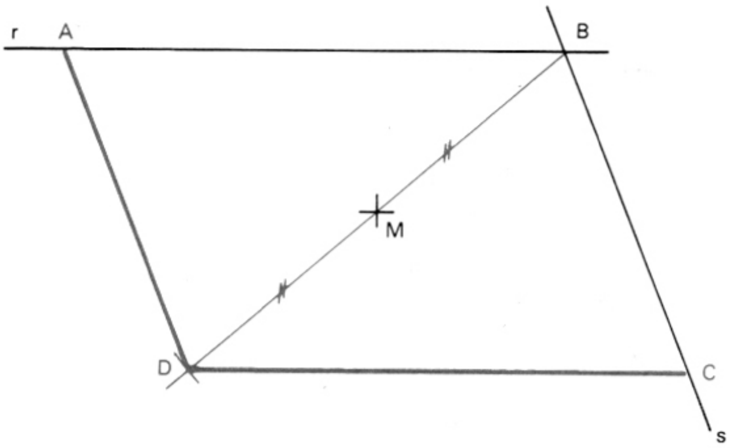


1.º) **t** // **s**, determinando M, ponto médio de $\overline{AB}$
2.º) B
3.º) C
4.º) D

131 Construa um paralelogramo ABCD, dadas as retas **r** e **s**, suportes de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, e o ponto M, de intersecção das diagonais.

Sugestão: A diagonal $\overline{BD}$ pode ser traçada.

Observação:
Reforce bem a propriedade característica dos paralelogramos: "As diagonais interceptam-se em seus pontos médios."

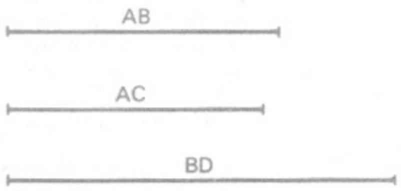


Resolva os exercícios de 125 a 130 do caderno de atividades.

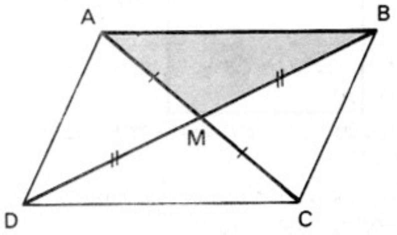
E17.**19** Dados: BC = 25 mm, AD = 35 mm, AC = 40 mm, B = 90° e D = 60°. Quanto mede a diagonal $\overline{BD}$?

E17.**20** Dados: AB = 32 mm, BC = 35 mm, CD = 14 mm, AC = 42 mm e BD = 40 mm. Qual é a medida do lado $\overline{AD}$?

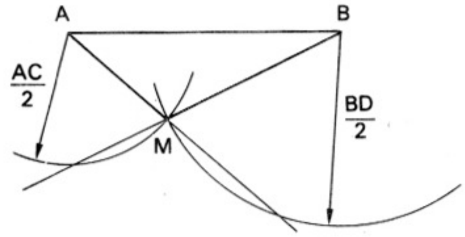
E17.**21** Dados: Paralelogramo, AB, AC e BD.

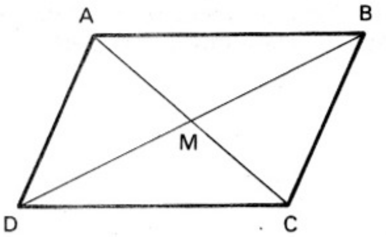


Suposto resolvido



Resolução: Sendo M o ponto de encontro das diagonais, o triângulo AMB é construtível, já que dele conhecemos os três lados (lembre-se de que as diagonais do paralelogramo interceptam-se em seus pontos médios). Em seguida é fácil determinar C e D nos prolongamentos de $\overline{AM}$ e $\overline{BM}$.





E17.**22** Dados: Paralelogramo, AC = 40 mm, BD = 58 mm e $A\hat{M}D = 60°$, onde M é o ponto de encontro das diagonais. Qual é o perímetro do paralelogramo?

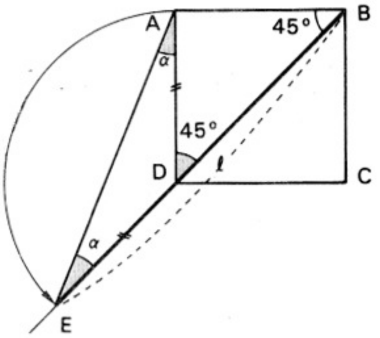
E17.**23** Dados: Paralelogramo, AB = 60 mm, AD = 30 mm, AC = 55 mm. Quanto mede a diagonal $\overline{BD}$?

E17.**24** Construa um retângulo, dados o raio R = 30 mm da circunferência circunscrita e um lado ℓ = 36 mm. Quanto mede o outro lado?

E17.**25** Num losango, uma das diagonais mede 60 mm, e o lado é o segmento áureo dessa diagonal. Construa esse losango. Quanto mede a outra diagonal?

E17.**26** Construa um quadrado dada a soma ℓ de um lado com uma diagonal.

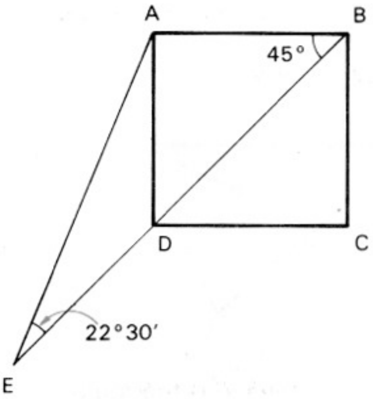
Suposto resolvido



Pelo teorema do ângulo externo, no triângulo ADE temos:

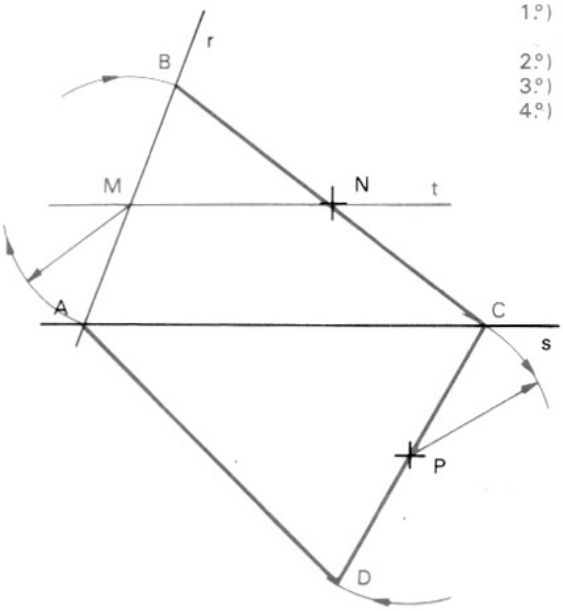
$2\alpha = 45° \Rightarrow \alpha = 22°30'$

Resolução: Introduzindo a soma da maneira como foi feito na figura em que se supõe o problema resolvido, obtemos o triângulo ABE construtível, pois dele conhecemos o lado BE = ℓ e os ângulos $\hat{B} = 45°$ e $\hat{E} = 22°30'$. O lado $\overline{AB}$ desse triângulo é o lado do quadrado procurado.



Resolva os exercícios de 131 a 137 do caderno de atividades.

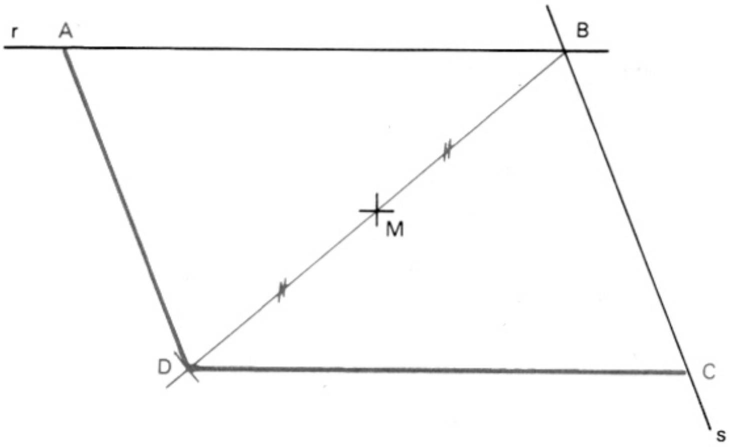
130 O vértice A, os pontos N e P, médios de $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, a reta **r** que contém B e a reta **s** que contém C.
Sugestão: Você pode construir o triângulo ABC como no exercício 114.



1.º) **t** // **s**, determinando M, ponto médio de $\overline{AB}$
2.º) B
3.º) C
4.º) D

131 Construa um paralelogramo ABCD, dadas as retas **r** e **s**, suportes de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, e o ponto M, de intersecção das diagonais.
Sugestão: A diagonal $\overline{BD}$ pode ser traçada.

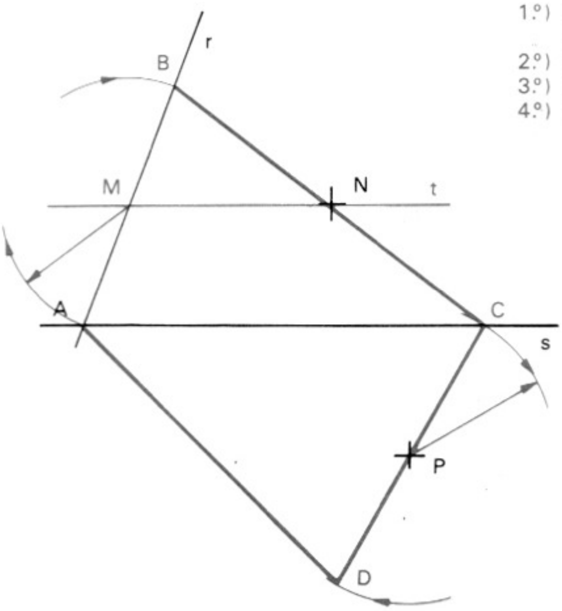
Observação:
Reforce bem a propriedade característica dos paralelogramos: "As diagonais interceptam-se em seus pontos médios."



Construção de quadriláteros

Figura auxiliar e anotações

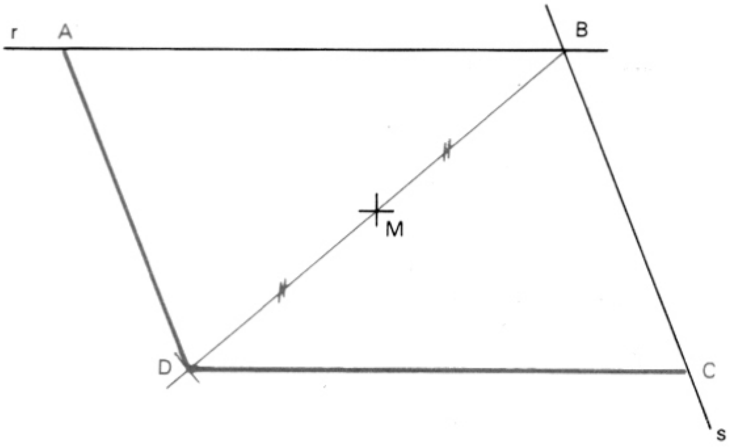
130 O vértice A, os pontos N e P, médios de $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, a reta **r** que contém B e a reta **s** que contém C.
Sugestão: Você pode construir o triângulo ABC como no exercício 114.



1.º) **t** // **s**, determinando M, ponto médio de $\overline{AB}$
2.º) B
3.º) C
4.º) D

131 Construa um paralelogramo ABCD, dadas as retas **r** e **s**, suportes de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, e o ponto M, de intersecção das diagonais.
Sugestão: A diagonal $\overline{BD}$ pode ser traçada.

Observação:
Reforce bem a propriedade característica dos paralelogramos: "As diagonais interceptam-se em seus pontos médios."

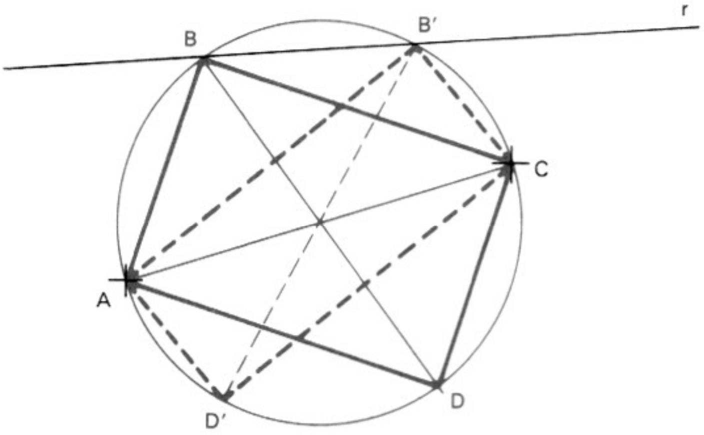


Construção de quadriláteros

Figura auxiliar e anotações

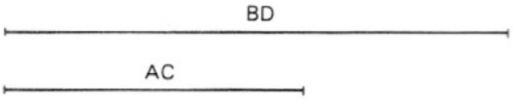
132 Construa um retângulo ABCD, dados os vértices A e C, e a reta **r** que contém o vértice B.

Observação:
Explore a propriedade que garante que as diagonais do retângulo são diâmetros da circunferência circunscrita (o arco capaz fica implícito nessa propriedade).

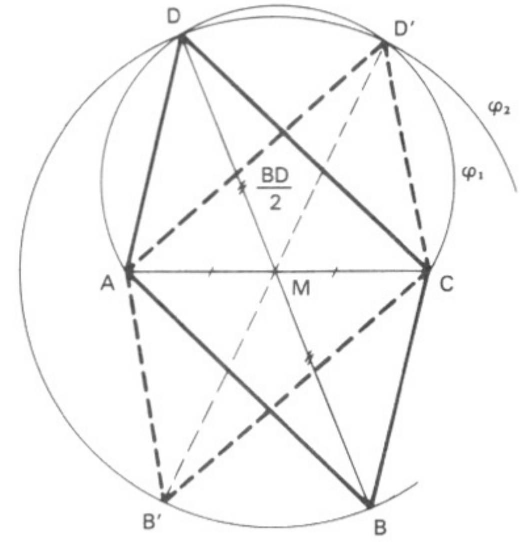


133 Construa um paralelogramo ABCD, dados AC, BD e $\hat{D} = 60°$.
Sugestão: A construção do triângulo ACD é o E16.3.

Observação:
Mostre ao aluno que, para a construção do triângulo ACD, têm-se os seguintes dados:
lado: AC
mediana relativa ao lado: $\frac{BD}{2}$
ângulo oposto ao lado: $\hat{D}$.



1.º) φ_1 – (arco capaz de 60° sobre $\overline{AC}$)
2.º) φ_2, determinando D e D′ (φ_2 tem centro M e raio BD/2.)



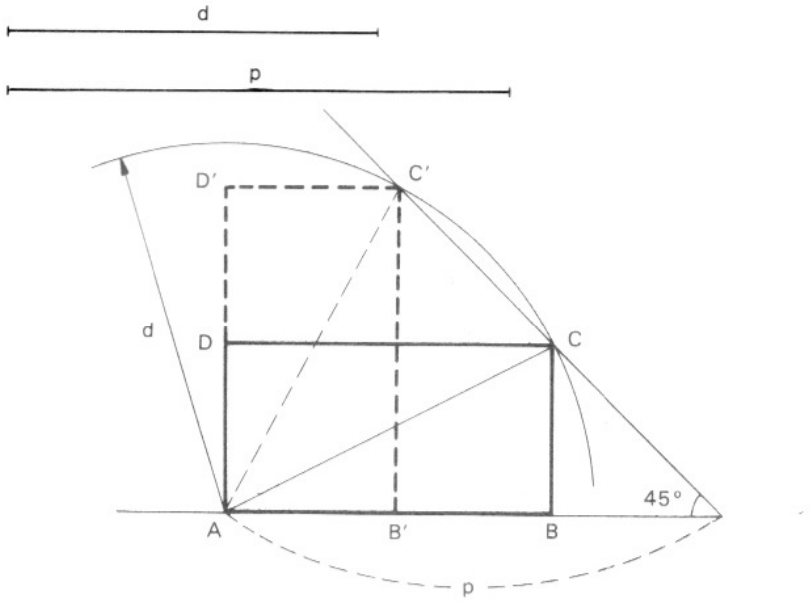
Construção de quadriláteros

Figura auxiliar e anotações

134 Construa um retângulo ABCD, dadas a diagonal **d** e a soma AB + BC = p.

Observações:

1) Oriente o aluno dizendo que a construção do triângulo ABC é exatamente o problema 123 deste caderno.
2) As duas soluções só diferem em posição. Portanto, o problema admite solução única.

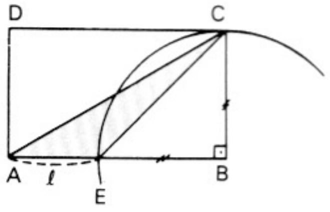


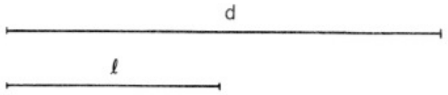
135 Construa um retângulo ABCD, dadas a diagonal **d** e a diferença AB − BC = ℓ.

Sugestão: Introduzindo a diferença conforme a figura abaixo, o triângulo AEC poderá ser construído.

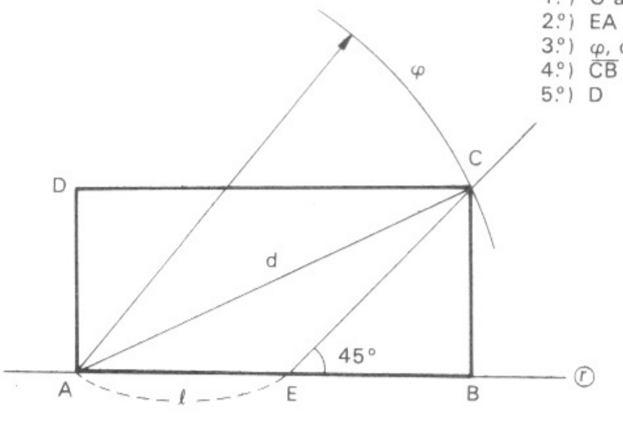
Observação:

Destaque ao aluno que do triângulo AEC são conhecidos três elementos: AC = d; AE = ℓ; AÊC = 135°





1º) O ângulo de 45°
2º) EA = ℓ
3º) φ, determinando C
4º) $\overline{CB} \perp r$
5º) D



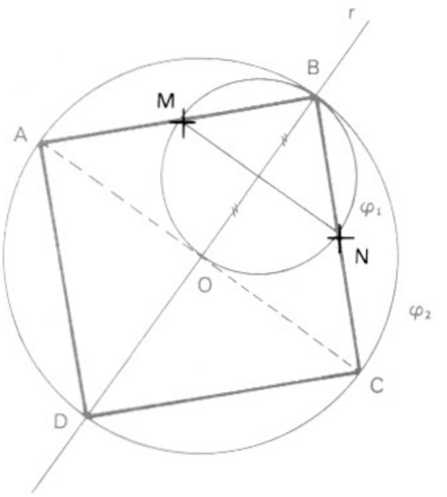
Construção de quadriláteros

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Mostre ao aluno que $\overline{MN}$ corta $\overline{AB}$ em seu ponto médio.

136 Construa um quadrado ABCD, dados os pontos M e N, médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.

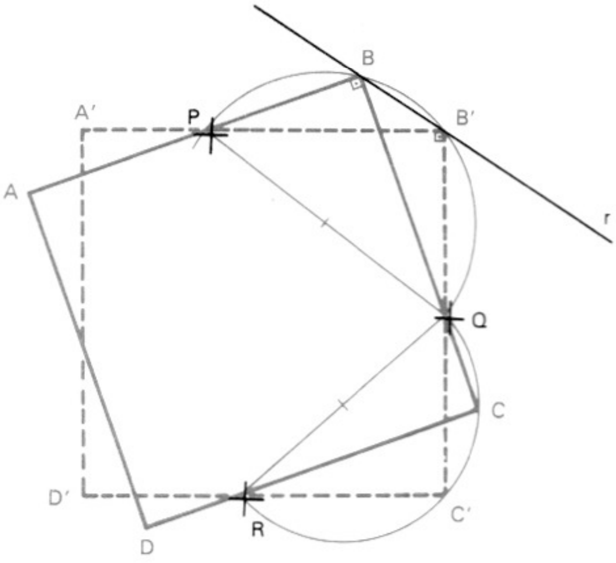
1.º) φ_1
2.º) reta r
3.º) φ_2



137 Em um quadrado ABCD os pontos P, Q e R pertencem aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Construa esse quadrado, sabendo ainda que o vértice B pertence à reta **r**.

Sugestão: B enxerga $\overline{PQ}$ segundo um ângulo reto, e C enxerga $\overline{QR}$ segundo um ângulo reto.

1.º) Arco capaz de 90° sobre $\overline{PQ}$, determinando B e B′
2.º) Arco capaz de 90° sobre $\overline{QR}$
3.º) Reta por B e Q, determinando C. Então, $\overline{BC}$ é lado já conhecido do quadrado (Idem para $\overline{B'C'}$)



Impressão e Acabamento: Gráfica Editora Hamburg

1 scipione - elem.de geom. e des.geom.v.1

Apêndice

Por razões didáticas e porque as construções geométricas constituem o principal enfoque deste livro, foram omitidas várias demonstrações das propriedades utilizadas. Pois bem, este apêndice destina-se à apresentação das demonstrações dessas propriedades.

Para tanto, vamos examinar inicialmente um valioso recurso nas demonstrações: a **congruência de triângulos**.

Congruência de triângulos

Convém lembrar, conforme vimos na apresentação da semelhança de polígonos, que se podem estabelecer correspondências entre os vértices de dois triângulos, as quais definem também correspondências entre os ângulos e os lados. Por exemplo: quando dizemos que os vértices de um triângulo ABC estão em correspondência com os vértices de um triângulo DEF, respectivamente, escrevemos:

$$\boxed{ABC \longleftrightarrow DEF}$$

E, nesse caso, ficam também subentendidas as seguintes correspondências:

Ângulos	Lados
$\measuredangle \hat{A} \longleftrightarrow \measuredangle \hat{D}$	$\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{DE}$
$\measuredangle \hat{B} \longleftrightarrow \measuredangle \hat{E}$	$\overline{BC} \longleftrightarrow \overline{EF}$
$\measuredangle \hat{C} \longleftrightarrow \measuredangle \hat{F}$	$\overline{AC} \longleftrightarrow \overline{DF}$

Lembre-se também de que a ordem em que as letras são escritas segue a ordem das correspondências. Isto é,

ABC ⟷ DEF

significa que:

A e D são correspondentes
B e E são correspondentes
C e F são correspondentes

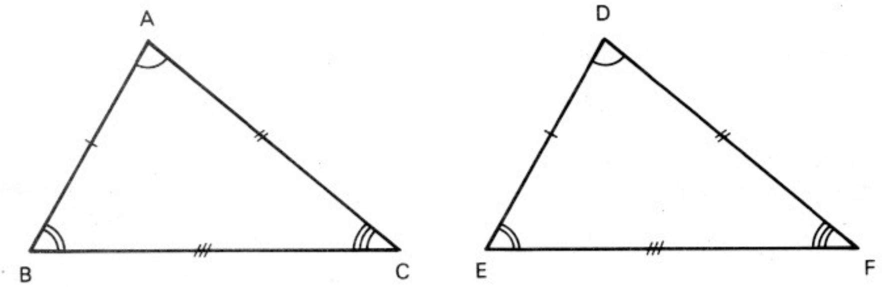
Assim, observe que entre os vértices de dois triângulos ABC e DEF podem ser definidas seis correspondências distintas:

ABC ⟷ DEF
ABC ⟷ DFE
ABC ⟷ EDF
ABC ⟷ EFD
ABC ⟷ FED
ABC ⟷ FDE

Definição

Dois triângulos são congruentes quando, e somente quando, existe ao menos uma correspondência entre seus vértices, que defina:

- **lados correspondentes congruentes;**
- **ângulos correspondentes congruentes.**

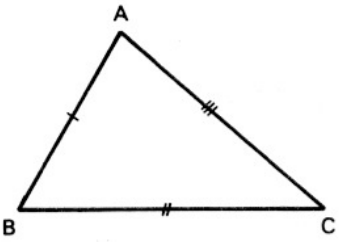


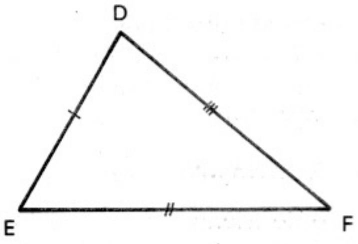
$$\triangle ABC \equiv \triangle DEF \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \overline{AB} \equiv \overline{DE} & & \measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{D} \\ \overline{BC} \equiv \overline{EF} & \text{e} & \measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{E} \\ \overline{AC} \equiv \overline{DF} & & \measuredangle C \equiv \measuredangle \hat{F} \end{array} \right.$$

Embora a definição apresentada exija seis congruências (três entre lados e três entre ângulos), há situações em que o conhecimento de três congruências entre os elementos de dois triângulos assegura a própria congruência desses triângulos. Tais situações são denominadas **critérios de congruência**. Passemos a estudá-los.

Critério LLL (Lado, Lado, Lado)

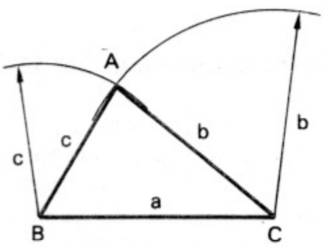
Dois triângulos são congruentes quando possuem os lados correspondentes congruentes.





$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}\equiv\overline{DE}\\ \overline{BC}\equiv\overline{EF}\\ \overline{AC}\equiv\overline{DF}\end{array}\right\} \overset{\text{LLL}}{\Longleftrightarrow} \triangle ABC\equiv\triangle DEF.\ \text{Logo,}\ \left\{\begin{array}{l}\sphericalangle\hat{A}\equiv\sphericalangle\hat{D}\\ \sphericalangle\hat{B}\equiv\sphericalangle\hat{E}\\ \sphericalangle\hat{C}\equiv\sphericalangle\hat{F}\end{array}\right.$$

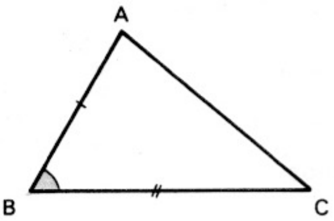
Do ponto de vista gráfico, o critério LLL significa que o problema: "construir um triângulo, dados **a**, **b** e **c**", quando tem solução, é única.

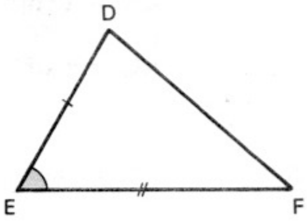


Ainda que se construam dois, três ou mais triângulos de lados **a**, **b** e **c**, eles só se diferenciarão pela posição, mas serão todos congruentes entre si.

Critério LAL (Lado, Ângulo, Lado)

Dois triângulos são congruentes quando dois lados de um são respectivamente congruentes aos correspondentes do outro e, além disso, os ângulos compreendidos entre esses lados são também congruentes.



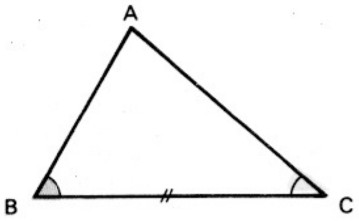


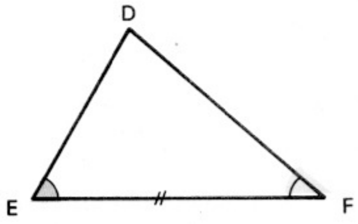
$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}\equiv\overline{DE}\\ \sphericalangle\hat{B}\equiv\sphericalangle\hat{E}\\ \overline{BC}\equiv\overline{EF}\end{array}\right\} \overset{\text{LAL}}{\Longleftrightarrow} \triangle ABC\equiv\triangle DEF.\ \text{Logo,}\ \left\{\begin{array}{l}\sphericalangle\hat{A}\equiv\sphericalangle\hat{D}\\ \overline{AC}\equiv\overline{DF}\\ \sphericalangle\hat{C}\equiv\sphericalangle\hat{F}\end{array}\right.$$

Também o critério LAL significa que o problema: "construir um triângulo dados dois lados e o ângulo compreendido" (por exemplo **a**, **c** e $\hat{B}$ tem solução única.

Critério ALA (Ângulo, Lado, Ângulo)

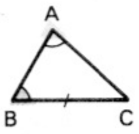
Dois triângulos são congruentes quando possuem um par de lados correspondentes congruentes e os ângulos adjacentes a esses lados, respectivamente, congruentes.

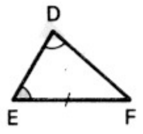




$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle\hat{B}\equiv\sphericalangle\hat{E}\\ \overline{BC}\equiv\overline{EF}\\ \sphericalangle\hat{C}\equiv\sphericalangle\hat{F}\end{array}\right\} \overset{\text{ALA}}{\Longleftrightarrow} \triangle ABC\equiv\triangle DEF.\ \text{Logo,}\ \left\{\begin{array}{l}\overline{AB}\equiv\overline{DE}\\ \sphericalangle\hat{A}\equiv\sphericalangle\hat{D}\\ \overline{AC}\equiv\overline{DF}\end{array}\right.$$

Critério LAA_0 (uma variação do critério ALA)





$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC}\equiv\overline{EF}\\ \sphericalangle\hat{B}\equiv\sphericalangle\hat{E}\\ \sphericalangle\hat{A}\equiv\sphericalangle\hat{D}\end{array}\right\} \overset{LAA_0}{\Longleftrightarrow} \triangle ABC\equiv\triangle DEF$$

$$\text{Pois}\ \left.\begin{array}{l}\sphericalangle\hat{B}\equiv\sphericalangle\hat{E}\\ \sphericalangle\hat{A}\equiv\sphericalangle\hat{D}\end{array}\right\}\Rightarrow\sphericalangle\hat{C}\equiv\sphericalangle\hat{F}$$

Observação: Vamos supor que dois triângulos ABC e DEF possuam as seguintes congruências:

$$\overline{BC} \equiv \overline{EF},\ \measuredangle\hat{B} \equiv \measuredangle\hat{E} \text{ e } \measuredangle\hat{A} \equiv \measuredangle\hat{D}$$

Nesse caso, dizemos que os triângulos têm **lado**, **ângulo** e **ângulo oposto** ao lado, respectivamente, congruentes.

Mas se $\measuredangle\hat{B} \equiv \measuredangle\hat{E}$ e $\measuredangle\hat{A} \equiv \measuredangle\hat{D}$, é de verificação imediata que $\measuredangle\hat{C} \equiv \measuredangle\hat{F}$. Então, pelo critério ALA, esses triângulos são congruentes.

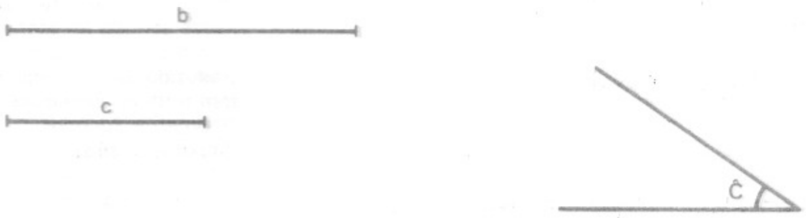
Para evitar essa seqüência de deduções, já que tais congruências se apresentam com alguma freqüência, diremos que os triângulos são congruentes pelo critério LAA_0 (Lado, Ângulo e Ângulo oposto).

Então são conhecidas as seguintes congruências:

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle\hat{B} \equiv \measuredangle\hat{E}\\ \overline{BC} \equiv \overline{EF}\\ \measuredangle\hat{C} \equiv \measuredangle\hat{F}\end{array}\right\} \xLeftrightarrow{ALA} \triangle ABC \equiv \triangle DEF$$

Critério LLA$_r$ (Lado, Lado e Ângulo reto)

Este é um critério de congruência exclusivo de triângulos retângulos. Porém, antes de estabelecê-lo, convém verificarmos que LLA não é um critério de congruência na sua generalidade. De fato, consideremos o seguinte problema: ''Construir um triângulo ABC, dados b, c e Ĉ.''

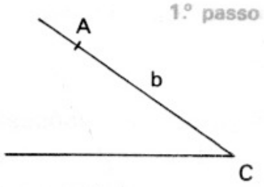


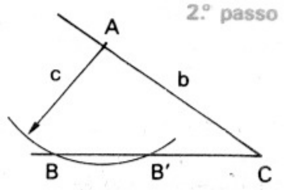
Resolução:

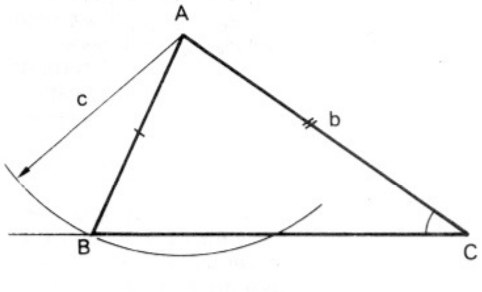
1.º) Transporta-se o ângulo Ĉ para uma posição arbitrária e, sobre um de seus lados, toma-se o vértice A, de modo que AC = b.

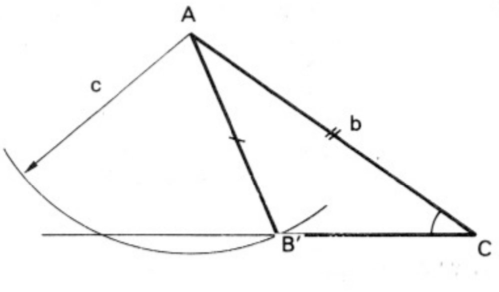
2.º) Com centro em A e raio igual a c, descreve-se um arco de circunferência, o qual intercepta o outro lado do ângulo em B.

Evolução do traçado



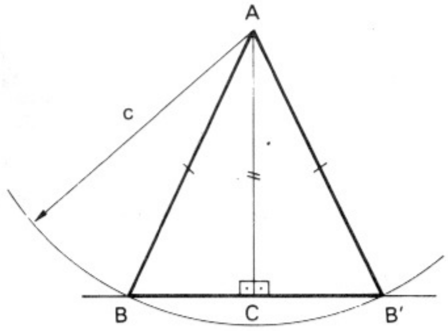






Com os elementos dados, o problema possui duas soluções. Assim, embora os triângulos ABC e AB'C possuam lado, lado e ângulo respectivamente congruentes, eles não são triângulos congruentes.

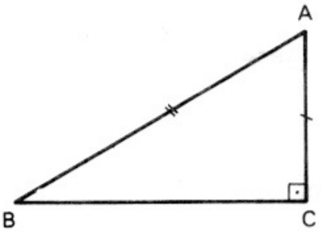
Porém, se o ângulo Ĉ for reto, os triângulos ABC e AB'C representam uma única solução em posições diferentes, isto é, são congruentes.

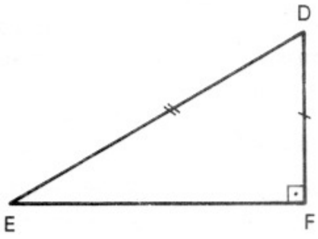


O leitor não deve entender a discussão gráfica que acabamos de realizar como sendo uma demonstração de que LLA$_r$ é um critério de congruência. O objetivo da mesma é apenas aproveitar os recursos das construções geométricas para auxiliar a visualização de tal critério.

Podemos, então, enunciar o critério seguinte.

Dois **triângulos retângulos** são congruentes quando a hipotenusa e um cateto de um deles são, respectivamente, congruentes à hipotenusa e a um cateto do outro.





$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \equiv \overline{DE}\\ \overline{AC} \equiv \overline{DF}\\ \hat{C} = \hat{F} = 90°\end{array}\right\} \xLeftrightarrow{LLA_r} \triangle ABC \equiv \triangle DEF. \text{ Logo, } \left\{\begin{array}{l}\measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{D}\\ \measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{E}\\ \overline{BC} \equiv \overline{EF}\end{array}\right.$$

Teoremas

Passaremos agora às demonstrações de alguns teoremas importantes aos nossos propósitos. Para efeito de referência, vamos enumerá-los na forma T_1, T_2, ..., para facilitar suas posteriores referências.

T_1

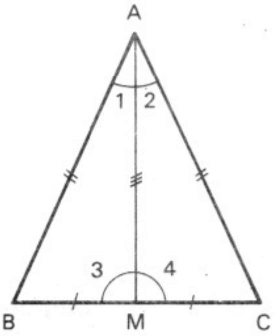
Num triângulo isósceles:

1.º) a bissetriz, a mediana e a altura relativas ao vértice são coincidentes;

2.º) os ângulos da base são congruentes.

$$\textbf{Hipótese} \left\{\begin{array}{l}\overline{AB} \equiv \overline{AC}\\ \overline{AM} \text{ é mediana}\end{array}\right.$$

$$\textbf{Tese} \left\{\begin{array}{l}\overline{AM} \text{ é bissetriz de } \hat{A}\\ \overline{AM} \text{ é altura}\\ \measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{C}\end{array}\right.$$



☐ **Demonstração**:

Nos triângulos ABM e ACM temos:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \equiv \overline{AC} \text{ (hip.)}\\ \overline{BM} \equiv \overline{CM} \text{ (hip.)}\\ \overline{AM} \text{ é lado comum}\end{array}\right\} \xLeftrightarrow{LLL} \triangle ABM \equiv \triangle ACM$$

Então, os ângulos correspondentes desses triângulos são congruentes. Assim,

- $\measuredangle \hat{A}_1 \equiv \measuredangle \hat{A}_2$, o que prova que $\overline{AM}$ é bissetriz de $\hat{A}$;
- $\measuredangle \hat{M}_3 \equiv \measuredangle \hat{M}_4$ e, como esses ângulos são suplementares, deduz-se que ambos são retos, isto é, $\overline{AM}$ é altura relativa à base;
- $\measuredangle \hat{B} \equiv \hat{C}$, o que prova que os ângulos da base são congruentes.

■ c.q.d.

Estamos aqui admitindo os critérios de congruência como postulados, isto é, estamos admitindo-os verdadeiros, sem demonstração. Porém, a rigor, escolhendo um conjunto conveniente de postulados, entre eles o critério LAL, é possível demonstrar os demais critérios de congruência. Ao leitor que pretende aprofundar-se nos estudos da Geometria, recomenda-se o livro *The foundations of Geometry* (*Os fundamentos da Geometria*), cujo autor é David Hilbert (1862-1943). Esse trabalho de Hilbert é um verdadeiro marco no que se refere ao tratamento rigoroso da Geometria.
Um outro excelente trabalho nesse sentido foi escrito por Edwin E. Moise, que, traduzido para o espanhol, tem o título: *Elementos de Geometria Superior*. (México - 1968).

Convém lembrar que a hipótese se constitui de todos os elementos dados para demonstrar um teorema. No T_1, foi dado que o triângulo é isósceles, isto é, que ele possui dois lados congruentes. A tese é tudo aquilo que se pretende demonstrar. Na 1.ª parte do T_1 pretende-se demonstrar que a mediana, a bissetriz e altura relativas ao vértice coincidem. Para demonstrar tal propriedade basta assumir, por exemplo, que $\overline{AM}$ é mediana (hipótese) e provar que $\overline{AM}$ é também bissetriz e altura.

O T_1 demonstra também que os ângulos de um triângulo eqüilátero são congruentes. De fato, na 2.ª parte, demonstrou-se que os ângulos da base são congruentes. Isto é, se $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$, então $\measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{C}$. Ora, num triângulo eqüilátero, temos $\overline{AB} \equiv \overline{AC} \equiv \overline{BC}$. Assim,

$\overline{AB} \equiv \overline{AC} \Rightarrow \measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{C}$ (1)

$\overline{AC} \equiv \overline{BC} \Rightarrow \measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{B}$ (2)

De (1) e (2), vem:

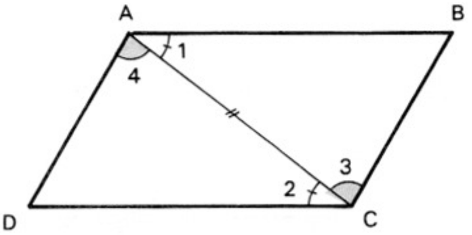
$$\measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{C}$$

T_2

Em todo paralelogramo, os lados opostos são, respectivamente, congruentes.

Hipótese $\begin{cases} \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ \overline{BC} \parallel \overline{AD} \end{cases}$

Tese $\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{CD} \\ \overline{BC} \equiv \overline{AD} \end{cases}$



☐ **Demonstração:**

Traçamos a diagonal $\overline{AC}$ e então temos:

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Leftrightarrow \measuredangle \hat{A}_1 \equiv \measuredangle \hat{C}_2 \text{ (alternos internos)}$$
$$\overline{BC} \parallel \overline{AD} \Leftrightarrow \measuredangle \hat{C}_3 \equiv \measuredangle \hat{A}_4 \text{ (alternos internos)}$$

Assim, os triângulos ABC e CDA são congruentes, pelo critério ALA, pois:

$$\measuredangle \hat{A}_1 \equiv \measuredangle \hat{C}_2,\ \measuredangle \hat{C}_3 \equiv \measuredangle \hat{A}_4 \text{ e } \overline{AC} \text{ é lado comum.}$$

Logo, os seus lados correspondentes são congruentes, isto é, $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$.

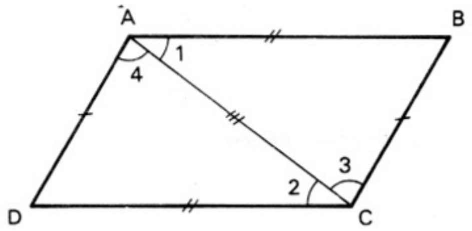
■ c.q.d.

T_3

Todo quadrilátero que possui os lados opostos, respectivamente, congruentes é um paralelogramo.

Hipótese $\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{CD} \\ \overline{BC} \equiv \overline{AD} \end{cases}$

Tese $\begin{cases} \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ \overline{BC} \parallel \overline{AD} \end{cases}$



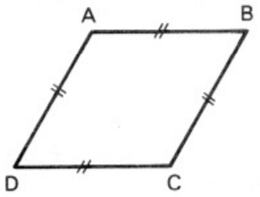
☐ **Demonstração:**

Traçamos a diagonal $\overline{AC}$ e obtemos os triângulos ABC e CDA congruentes pelo critério LLL, pois $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$ por hipótese e $\overline{AC}$ é lado comum. Então, os ângulos correspondentes nesses triângulos são congruentes.

Assim, os ângulos $\hat{A}_1$ e $\hat{C}_2$ são congruentes e alternos internos com relação a $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e à transversal $\overline{AC}$. Logo, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. De modo análogo, como $\measuredangle \hat{C}_3 \equiv \measuredangle \hat{A}_4$, vem que $\overline{BC} \parallel \overline{AC}$.

■ c.q.d.

O T_3 demonstra que todo losango é um paralelogramo. De fato, como os quatro lados de um losango são congruentes por definição, em particular ele possui os lados opostos, respectivamente, congruentes. Então, pelo T_3, todo losango é um paralelogramo.



Observação: Examinando com atenção os teoremas T_2 e T_3, vemos que o que é hipótese de um é tese do outro. De fato,

T_2

Hipótese $\begin{cases} \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ \overline{BC} \parallel \overline{AD} \end{cases}$

Tese $\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{CD} \\ \overline{BC} \equiv \overline{AD} \end{cases}$

T_3

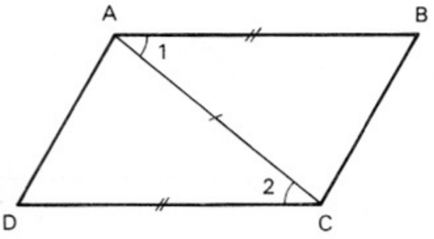
Hipótese $\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{CD} \\ \overline{BC} \equiv \overline{AD} \end{cases}$

Tese $\begin{cases} \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ \overline{BC} \parallel \overline{AD} \end{cases}$

Todo teorema possui um recíproco, porém nem sempre o recíproco é verdadeiro.
Por exemplo:
Teorema
Se dois ângulos são o.p.v., então eles são congruentes.
Recíproco
Se dois ângulos são congruentes, então eles são o.p.v.
Evidentemente, o teorema é verdadeiro, mas o recíproco não é, pois existem ângulos congruentes que não são o.p.v.

T_6

Todo quadrilátero que possui um par de lados opostos paralelos e congruentes é um paralelogramo.



Hipótese $\begin{cases} \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ \overline{AB} \equiv \overline{CD} \end{cases}$

Tese {ABCD é um paralelogramo

☐ **Demonstração**:

Traçamos a diagonal $\overline{AC}$ e temos:

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Leftrightarrow \sphericalangle \hat{A}_1 \equiv \sphericalangle \hat{C}_2 \text{ (alternos internos)}$$

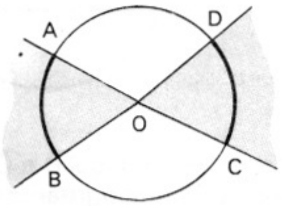
Então, os triângulos ABC e CDA são congruentes pelo critério LAL, pois:

$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ por hipótese, $\sphericalangle \hat{A}_1 \equiv \sphericalangle \hat{C}_2$ e $\overline{AC}$ é lado comum. Logo, $\overline{BC} \equiv \overline{AD}$. Assim, o quadrilátero ABCD possui os pares de lados opostos, respectivamente, congruentes. Logo, pelo T_3, ele é um paralelogramo.

■ c.q.d.

Para a demonstração do T_7 convém notar que:

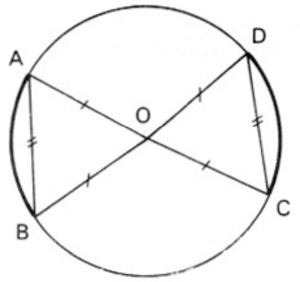
"Numa circunferência, ou em duas circunferências de raios iguais, a ângulos centrais congruentes correspondem arcos congruentes."



Se $\sphericalangle A\hat{O}B \equiv \sphericalangle C\hat{O}D$, então arc $\overset{\frown}{AB} \equiv$ arc $\overset{\frown}{CD}$.

T_7

Numa circunferência, ou em duas circunferências de raios iguais, as extremidades de duas cordas congruentes são também extremidades de dois arcos congruentes.



Hipótese $\begin{cases} \text{A, B, C e D são pontos} \\ \text{de uma circunferência} \\ \text{e } \overline{AB} \equiv \overline{CD}. \end{cases}$

Tese {arc $\overset{\frown}{AB} \equiv$ arc $\overset{\frown}{CD}$

☐ **Demonstração**:

Seja O o centro da circunferência. Então os triângulos AOB e COD são congruentes pelo critério LLL, pois:

$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ por hipótese, $\overline{OA} \equiv \overline{OC}$ e $\overline{OB} \equiv \overline{OD}$ por serem raios da mesma circunferência.

Da congruência dos triângulos, deduz-se que $\sphericalangle A\hat{O}B \equiv \sphericalangle C\hat{O}D$ e, portanto, arc $\overset{\frown}{AB} \equiv$ arc $\overset{\frown}{CD}$.

■ c.q.d.

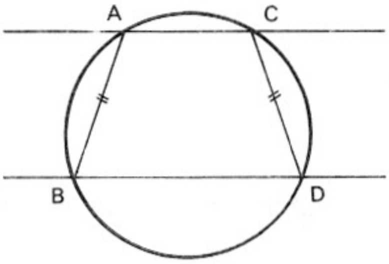
Observação: Tomando-se $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ em circunferências distintas, mas de raios iguais, a demonstração é análoga.

T_8

As extremidades de duas cordas congruentes quaisquer de uma circunferência qualquer são pontos pelos quais passam duas retas paralelas.

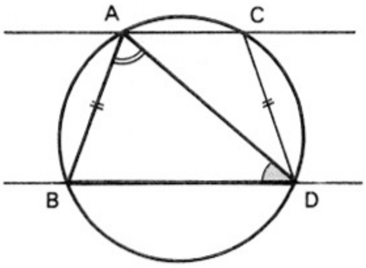
Hipótese $\left\{\begin{array}{l}\text{A, B, C e D são pontos} \\ \text{de uma circunferência} \\ \text{e } \overline{AB} \equiv \overline{CD}\end{array}\right.$

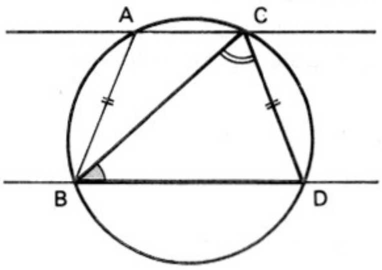
Tese $\{\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$



☐ **Demonstração**:

O teorema ficará demonstrado se provarmos que os pontos A e C são eqüidistantes de $\overleftrightarrow{BD}$. Para tanto, consideremos os triângulos ABD e CDB. (Para maior clareza, as figuras aparecem separadas.)





Como as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são congruentes por hipótese, os arcos arc $\overset{\frown}{AB}$ e arc $\overset{\frown}{CD}$ são congruentes (T_7). Então, os ângulos inscritos $A\hat{D}B$ e $C\hat{B}D$ são congruentes por enxergarem arcos congruentes. Também os ângulos inscritos $B\hat{A}D$ e $D\hat{C}B$ são congruentes, pois enxergam o mesmo arco.

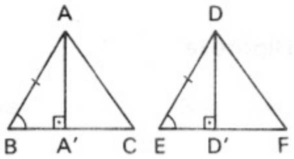
Assim, os triângulos ABD e CDB são congruentes pelo critério LAA_0. Logo, as alturas correspondentes $\overline{AA'}$ e $\overline{CC'}$ são congruentes, donde os pontos A e C são eqüidistantes da reta $\overleftrightarrow{BD}$.

Portanto, $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$.

■ c.q.d.

Para a demonstração do T_8, vamos utilizar a seguinte propriedade:

"Se ABC e DEF são triângulos congruentes, então as alturas correspondentes $\overline{AA'}$ e $\overline{DD'}$ são congruentes."

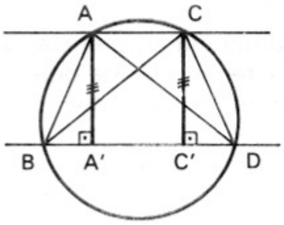


A demonstração é imediata, pois os triângulos ABA' e DED' são congruentes pelo critério LAA_0.
De fato,

$\left.\begin{array}{l}\overline{AB} \equiv \overline{DE} \\ \measuredangle\hat{B} \equiv \measuredangle\hat{E}\end{array}\right\}$ (já que $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$)

$\measuredangle\hat{A}' \equiv \measuredangle\hat{D}'$ (ambos são retos)

$\therefore\ \overline{AA'} \equiv \overline{DD'}$

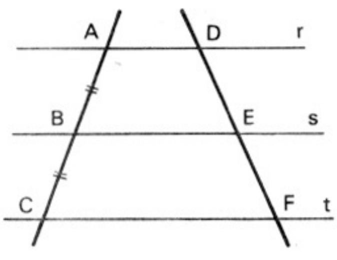


T_9

Se três retas paralelas determinam segmentos congruentes em uma transversal, então determinam segmentos também congruentes em qualquer outra transversal.

Hipótese $\left\{\begin{array}{l}r \parallel s \parallel t \\ \overline{AB} \equiv \overline{BC}\end{array}\right.$

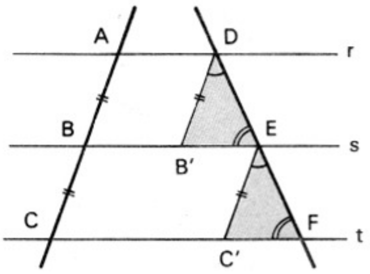
Tese $\{\overline{DE} \equiv \overline{EF}$

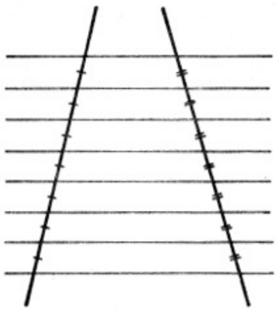


É evidente que o teorema se generaliza para um número qualquer de paralelas, isto é: "Se um feixe de retas paralelas determina segmentos congruentes em uma transversal, então determina também segmentos congruentes em qualquer outra transversal."

☐ **Demonstração**:

Por D e E traçamos, respectivamente, $\overline{DB'} \parallel \overline{AB}$, $\overline{EC'} \parallel \overline{BC}$. Então, $\overline{DB'} \equiv \overline{AB}$ e $\overline{EC'} \equiv \overline{BC}$ por serem lados opostos nos paralelogramos ABB'D e BCC'E (T_2).





Como $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$ por hipótese, vem que $\overline{DB'} \equiv \overline{EC'}$.
Assim, os triângulos DEB' e EFC' são congruentes pelo critério LAA_0, pois:

$\overline{DB'} \equiv \overline{EC'}$, $\measuredangle\, E\hat{D}B' \equiv \measuredangle\, F\hat{E}C'$ (correspondente) e $\measuredangle\, D\hat{E}B' \equiv E\hat{F}C'$ (correspondentes).

Da congruência desses triângulos, vem a tese, $\overline{DE} \equiv \overline{EF}$.

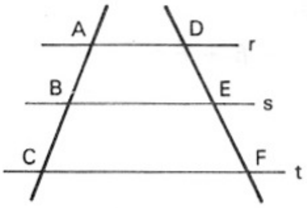
■ c.q.d.

T_{10}

(Teorema de Tales) Um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais quaisquer segmentos em uma proporcionais aos correspondentes na outra.

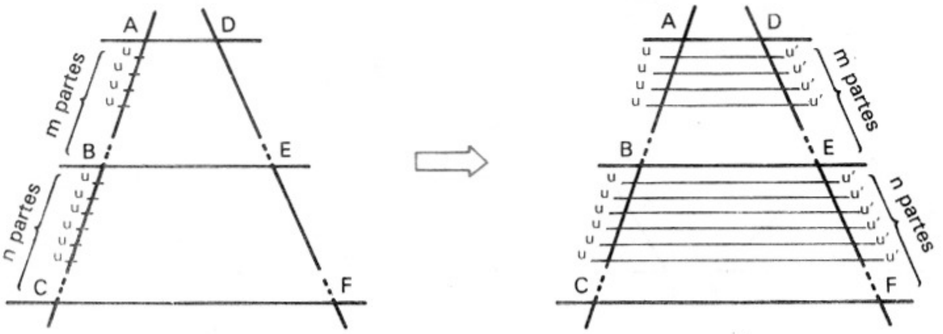
Hipótese $\{r \parallel s \parallel t$

Tese $\left\{\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}\right.$



☐ **Demonstração**:

Vamos admitir que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ sejam comensuráveis, isto é, vamos admitir que exista um segmento **u** que divida $\overline{AB}$ em **m** segmentos congruentes, e $\overline{BC}$ em **n** segmentos congruentes.



Então, AB = m · u e BC = n · u, ou ainda,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{m}{n} \quad (1)$$

Aqui omitiu-se a demonstração do caso em que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são incomensuráveis, isto é, no caso em que não existe um segmento **u** que divide simultaneamente $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ em partes iguais.
A demonstração desse caso apóia-se em postulados e teoremas sobre os números reais, os quais estão fora dos nossos propósitos.
O leitor que pretende aprofundar-se nos estudos de Geometria, encontrará excelentes demonstrações nas seguintes obras:

- *Elementos de Geometria Superior* (Edwin E. Moise)
- *Geometria Metrica, Proyectiva y Sistemas de Representacion. Tomo I (L. Sanches M. e M. Perez Beato)*
- *Elementi di Geometria* — parte seconda (F. Henriques e U. Amaldi)
- *Cours de Géométrie* — première partie (Curso de M. Vaisner, revisto e completado por M. Masson)

Traçando agora as paralelas ao feixe pelos pontos de divisão, pelo teorema anterior, elas determinarão segmentos u′ também congruentes entre si na outra transversal. Assim, $DE = m \cdot u'$ e $EF = n \cdot u'$. Logo,

$$\frac{DE}{EF} = \frac{m \cdot u'}{n \cdot u'} \Rightarrow \frac{DE}{EF} = \frac{m}{n} \quad (2)$$

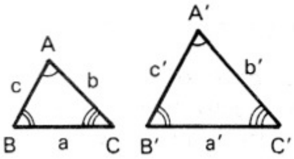
De (1) e (2), $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$

■ c.q.d.

T_{11}

Se dois triângulos são tais que dois ângulos de um são, respectivamente, congruentes a dois ângulos do outro, então esses triângulos são semelhantes.

O T_{11} é o critério AA de semelhança de triângulos. A definição de semelhança exige que os triângulos possuam ângulos correspondentes congruentes e lados homólogos proporcionais.



Se $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$,

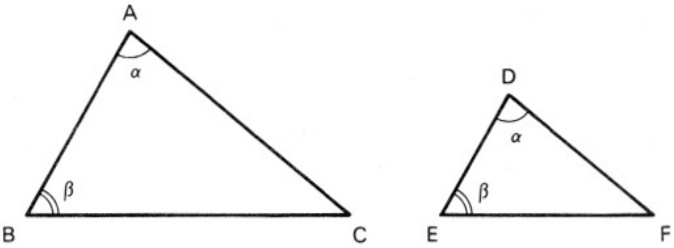
então $\begin{cases} \measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{A}' \\ \measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{B}' \\ \measuredangle \hat{C} \equiv \measuredangle \hat{C}' \end{cases}$

e $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

Assim, no T_{11}, para provar que os triângulos são semelhantes, é necessário provar que:

1.º) $\measuredangle \hat{C} \equiv \measuredangle \hat{D}$

2.º) $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$



Hipótese $\begin{cases} \measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{D} \\ \measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{E} \end{cases}$ **Tese** $\{\triangle ABC \sim \triangle DEF$

☐ **Demonstração**:

1.º) Fazendo $\hat{A} = \hat{D} = \alpha$ e $\hat{B} = \hat{E} = \beta$, temos:

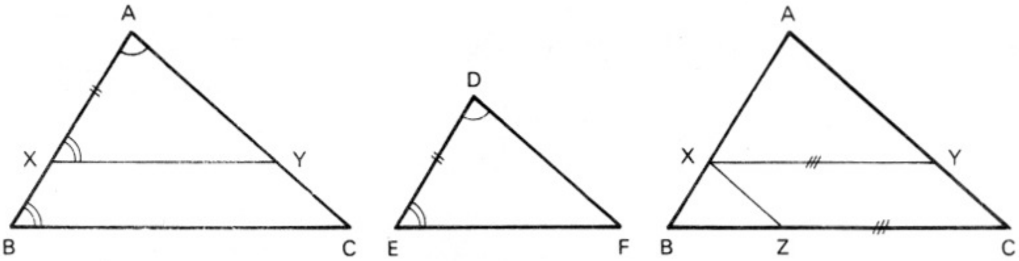
$$\alpha + \beta + \hat{C} = 180° \text{ e } \alpha + \beta + \hat{F} = 180°$$

Portanto, $\alpha + \beta + \hat{C} = \alpha + \beta + \hat{F}$

Assim, $\hat{C} = \hat{F}$, ou ainda $\boxed{\measuredangle \hat{C} \equiv \measuredangle \hat{F}}$

2.º) Tomamos o ponto X sobre $\overline{AB}$ de modo que se tenha $\overline{AX} \equiv \overline{DE}$ e conduzimos por X o segmento XY paralelo a $\overline{BC}$. Então, é imediato que $\measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{X}$ (ângulos correspondentes segundo as paralelas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{XY}$ e a transversal $\overleftrightarrow{AB}$). Como $\measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{E}$ (por hipótese), vem que $\measuredangle \hat{X} \equiv \measuredangle \hat{E}$. Assim, os triângulos AXY e DEF são congruentes pelo critério ALA, pois:

$\measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{D}$ (por hipótese), $\overline{AX} \equiv \overline{DE}$ (por construção) e $\measuredangle \hat{X} \equiv \measuredangle \hat{E}$.



Por outro lado, pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY} \quad (1)$$

Traçamos, agora, $\overline{XZ} \parallel \overline{AC}$ e, novamente pelo teorema de Tales:

$$\frac{AB}{AX} = \frac{BC}{ZC}$$

e, como XYCZ é um paralelogramo, pelo T_2, $\overline{ZC} \equiv \overline{XY}$. Logo:

$$\frac{AB}{AX} = \frac{BC}{XY} \quad (2)$$

$$\text{De (1) e (2), } \frac{AB}{AX} = \frac{BC}{XY} = \frac{AC}{AY} \quad (3)$$

Por fim, como $\triangle AXY \equiv \triangle DEF$, temos:

$\overline{AX} \equiv \overline{DE}$, $\overline{XY} \equiv \overline{EF}$ e $\overline{AY} \equiv \overline{DF}$. Assim, em (3) temos:

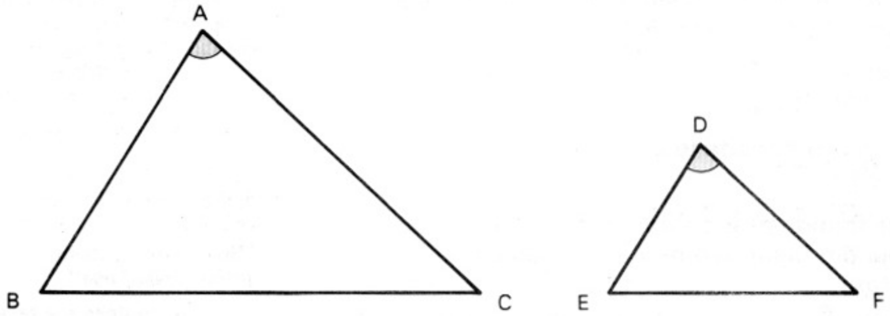
$$\boxed{\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}}$$

■ c.q.d.

T_{12}

Se dois triângulos são tais que dois lados de um são proporcionais a dois lados do outro e, além disso, os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

O T_{12} é o critério LAL de semelhança de triângulos. (Não confundir com o critério LAL de congruência.)

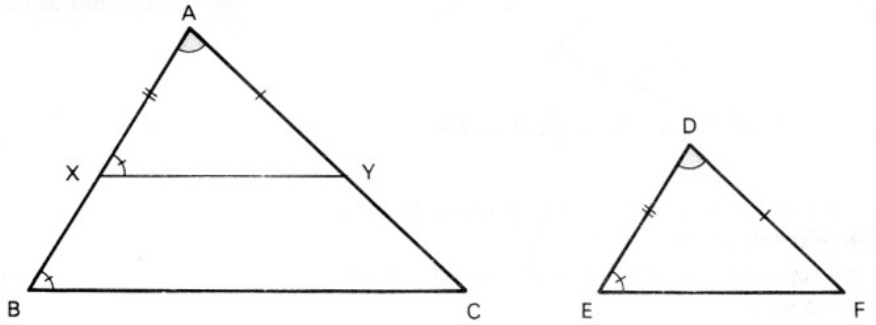


Hipótese $\begin{cases} \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} \\ \text{e} \\ \measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{D} \end{cases}$ **Tese** $\{\triangle ABC \sim \triangle DEF$

☐ **Demonstração:**

Basta provar que esses triângulos têm, além dos ângulos $\measuredangle \hat{A}$ e $\measuredangle \hat{D}$, mais um par de ângulos correspondentes congruentes, por exemplo $\measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{E}$. Então, pelo T_{11}, pode-se concluir que eles são semelhantes.

Seja, então, o ponto X sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{AX} \equiv \overline{DE}$. Traçamos por X o segmento XY paralelo a $\overline{BC}$.



Pelo teorema de Tales, $\frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$ e como $\overline{AX} \equiv \overline{DE}$ por construção, temos:

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{AY}$ (1)

Mas, por hipótese, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (2)

De (1) e (2), vem $\overline{AY} \equiv \overline{DF}$.
Assim, os triângulos AXY e DEF são congruentes pelo critério LAL, pois:

$$\overline{AX} \equiv \overline{DE},\ \measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{D} \text{ e } \overline{AY} \equiv \overline{DF}.$$

Então, $\measuredangle \hat{X} \equiv \measuredangle \hat{E}$.
Mas, $\overline{XY} /\!/ \overline{BC} \Rightarrow \measuredangle \hat{X} \equiv \measuredangle \hat{B}$ (ângulos correspondentes).
Logo, $\measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{E}$
Assim, os triângulos ABC e DEF possuem $\measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{D}$ e $\measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{E}$. Logo, pelo critério AA, eles são semelhantes.

■ c.q.d.

Estabelecimento dos lugares geométricos

Para estabelecer que uma determinada figura F é um lugar geométrico dos pontos que possuem uma propriedade φ, temos que demonstrar dois teoremas:
1.º) todo ponto de F tem a propriedade φ;
2.º) todo ponto que tem a propriedade φ pertence a F.

Os teoremas relativos à 1.ª e 2.ª proposições são recíprocos, pois, como já vimos, a hipótese de cada um é a tese do outro. De fato:

1.º) **Hipótese** → Se um ponto pertence a F,
Tese → Então ele tem a propriedade φ.

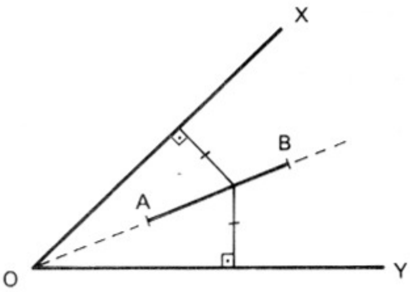
2.º) **Hipótese** → Se um ponto tem a propriedade φ,
Tese → Então ele pertence a F.

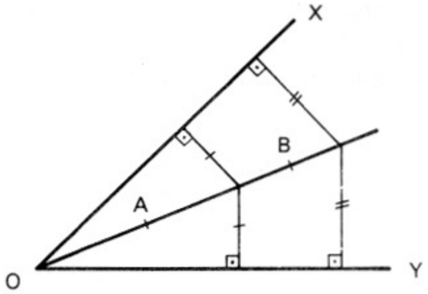
É importante frisar a necessidade de demonstrar os dois teoremas, pois um só deles não garante que a figura F seja um lugar geométrico. Vejamos um exemplo, para melhor ilustrar esse fato.

Consideremos um ângulo XÔY e seja $\overline{AB}$ um segmento da sua bissetriz. Pergunta-se:

$\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$?

Essa pergunta se desmembra em duas:
1.ª) Todo ponto de $\overline{AB}$ é eqüidistante de $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$?
2.ª) Todo ponto eqüidistante de $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ pertence a $\overline{AB}$?





A resposta à primeira pergunta é **Sim**, porém à segunda é **Não**, pois há pontos eqüidistantes de $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ que não pertencem ao segmento $\overline{AB}$.

Este exemplo nos mostra que o fato de uma das condições estar satisfeita não nos permite concluir que a outra também está.

Observe que a 2.ª condição equivale a dizer que **somente os pontos de F têm a propriedade** φ.

Ao invés de dois teoremas recíprocos, podem-se demonstrar dois teoremas, chamados **contrários**.
Se um teorema tem a forma:

"Se... *Hipótese...*, então... *Tese*"

o teorema contrário tem a forma:

"Se... *não* Hipótese..., então... *não* Tese."

Isto é, a hipótese e a tese do teorema contrário são, respectivamente, as negações da hipótese e tese do primeiro.
1.º) Todo ponto pertencente a F tem a propriedade φ.
2.º) Todo ponto **não** pertencente a F **não** tem a propriedade φ.

A 2.ª pergunta poderia ser assim:

Somente os pontos de $\overline{AB}$ são eqüidistantes de $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$?

Mediatriz: LG 2

T_{13}

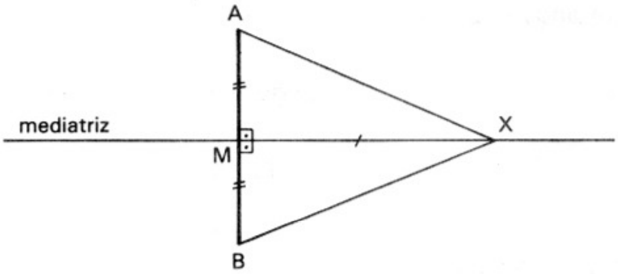
O lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de dois pontos A e B é a mediatriz de $\overline{AB}$.

Lembre-se de que, por definição, a mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular a ele passando por seu ponto médio.

1.ª Parte: Todo ponto da mediatriz de $\overline{AB}$ é eqüidistante de A e B.

Hipótese {X pertence à mediatriz de $\overline{AB}$

Tese {$\overline{XA} \equiv \overline{XB}$



☐ **Demonstração:**

Nos triângulos XAM e XBM temos:

$\overline{AM} \equiv \overline{BM}$ (M é ponto médio por hipótese)

$\measuredangle\, A\hat{M}X \equiv \measuredangle\, B\hat{M}X$ (ambos são retos por hipótese)

$\overline{XM}$ é lado comum.

Portanto, pelo critério LAL, podemos escrever:

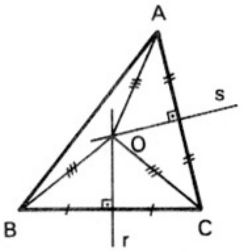
$$\triangle XAM \equiv \triangle XBM$$

Logo, $\overline{XA} \equiv \overline{XB}$.

Uma conseqüência do T_{13} é a nossa conhecida propriedade:

"As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo pônto".

De fato, seja O o ponto de intersecção das retas **r** e **s**, mediatrizes de $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.



Como $O \in r$, $\overline{OB} \equiv \overline{OC}$ (1)
Como $O \in s$, $\overline{OC} \equiv \overline{OA}$ (2)
De (1) e (2), $\overline{OA} \equiv \overline{OB}$

Assim, O eqüidista de A e B.

Logo, O pertence à mediatriz de $\overline{AB}$.

Como sabemos, O é o **circuncentro** do triângulo ABC.

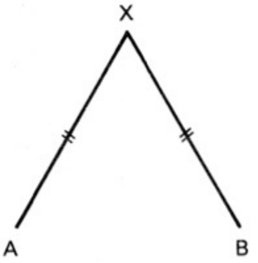
2.ª Parte: Todo ponto eqüidistante de A e B pertence à mediatriz de $\overline{AB}$.

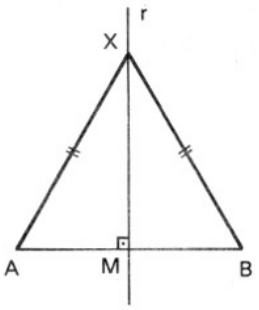
Hipótese {$\overline{XA} \equiv \overline{XB}$

Tese {X pertence à mediatriz de $\overline{AB}$

☐ **Demonstração:**

Seja X um ponto eqüidistante de A e B. Traçamos por X a reta **r** perpendicular a $\overline{AB}$ e vamos provar que **r** é a mediatriz de $\overline{AB}$, isto é, que **r** passa pelo ponto médio de $\overline{AB}$. Então, seja M o ponto de intersecção de **r** e $\overline{AB}$.





Como $\overline{XM}$ é a altura relativa à base do triângulo isósceles XAB, pelo T_1, $\overline{XM}$ é também mediana, isto é, M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Assim, a reta **r** é perpendicular a $\overline{AB}$ e passa pelo ponto médio do mesmo, isto é, **r** é a mediatriz de $\overline{AB}$. Logo, X pertence à mediatriz de $\overline{AB}$.

■ c.q.d.

Bissetriz: LG 4

T_{14}

O lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de duas retas concorrentes, **a** e **b**, constitui um par de retas perpendiculares, as quais contêm as bissetrizes dos ângulos determinados por **a** e **b**.

A demonstração de que as retas desse lugar geométrico são perpendiculares foi provado no E2.18. Assim, resta provar que:

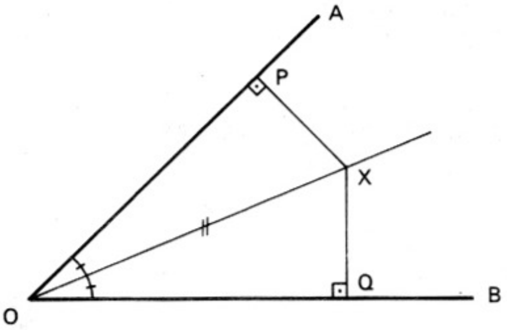
1.º) todo ponto da bissetriz de um ângulo eqüidista dos lados desse ângulo;

2.º) todo ponto que eqüidista dos lados de um ângulo pertence à bissetriz desse ângulo.

1.ª Parte

Hipótese {X pertence à bissetriz de um ângulo AÔB

Tese {X eqüidista de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$



☐ **Demonstração:**

Como as distâncias XP e XQ são medidas segundo segmentos perpendiculares aos lados do ângulo, nos triângulos XOP e XOQ, temos:

$\overline{OX}$ é lado comum

∡ XÔP ≡ ∡ XÔQ (por hipótese X pertence à bissetriz)

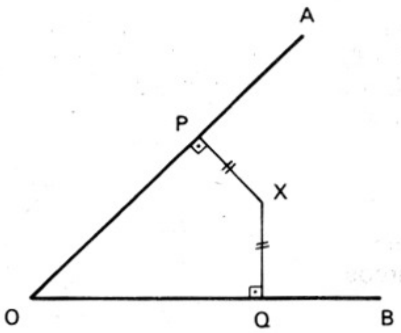
∡ P̂ ≡ ∡ Q̂ (por hipótese ambos são retos)

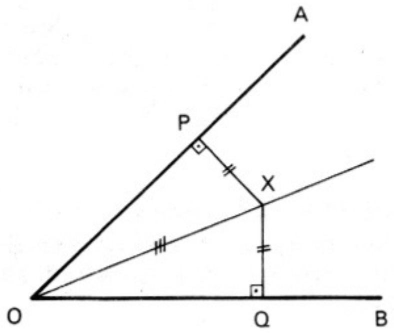
Assim, pelo critério LAA_0, XOP e XOQ são triângulos congruentes. Logo, $\overline{XP} \equiv \overline{XQ}$, ou seja, X eqüidista de $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.

2.ª Parte

Hipótese {X eqüidista dos lados de um ângulo AÔB

Tese {X pertence à bissetriz de AÔB

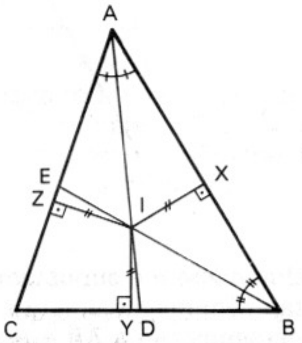




Uma conseqüência do T_{14} é a propriedade:

"As bissetrizes internas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto."

De fato, sejam as bissetrizes internas $\overline{AD}$ e $\overline{BE}$ e seja I o ponto de intersecção das mesmas.
Como I pertence a $\overline{AD}$, I é eqüidistante de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ (na figura, $\overline{IX} \equiv \overline{IZ}$).
Como I pertence a $\overline{BE}$, I é eqüidistante de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ (na figura, $\overline{IX} \equiv \overline{IY}$).
Logo, I é eqüidistante de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ (isto é, $\overline{IZ} \equiv \overline{IY}$) e assim, I pertence à bissetriz de ∡ Ĉ.



O ponto I é o incentro do triângulo ABC.

☐ **Demonstração**:

Traçamos a semi-reta $\overrightarrow{OX}$ e vamos provar que ela é a bissetriz de ∡ AÔB.
De fato, sejam XP e XQ as distâncias de X aos lados de AÔB. Então, nos triângulos XOP e XOQ, temos:

$$\overline{OX} \text{ é lado comum}$$
$$\overline{XP} \equiv \overline{XQ} \text{ (por hipótese)}$$
$$∡\, \hat{P} \equiv ∡\, \hat{Q} \text{ (ambos são retos por hipótese)}$$

Assim, pelo critério LLA_r, XOP e XOQ são triângulos congruentes. Logo, ∡ XÔP ≡ ∡ XÔQ, o que mostra que X pertence à bissetriz de ∡ AÔB.

■ c.q.d.

Arco Capaz: LG 5

T_{15}

O lugar geométrico dos pontos que enxergam um segmento AB segundo um ângulo α constante é o par de arcos capazes do ângulo α descritos sobre $\overline{AB}$.

Evidentemente, basta efetuar as demonstrações para um dos arcos capazes.

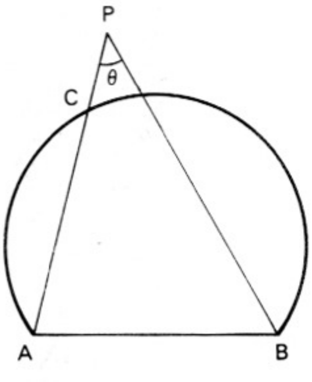
1.ª Parte

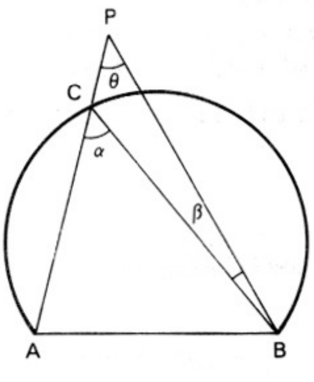
Todo ponto do arco capaz do ângulo α enxerga $\overline{AB}$ segundo o ângulo α.
A demonstração desse teorema já foi feita na página 101.

2.ª Parte

Todo ponto que enxerga $\overline{AB}$ segundo o ângulo α pertence a um dos arcos capazes do ângulo α.
Para demonstrar essa propriedade, vamos tomar um ponto que não pertence a qualquer dos arcos capazes e provar que ele **não** vê $\overline{AB}$ segundo o ângulo α.

Observe que se um ponto fora do arco capaz não enxergar $\overline{AB}$ segundo o ângulo α ficará provado que **somente os pontos do arco têm a propriedade.**





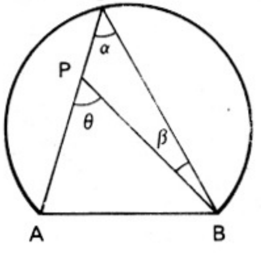
De fato, seja P, por exemplo, um ponto externo ao arco capaz do ângulo α sobre $\overline{AB}$ e seja C o ponto de intersecção de $\overline{PA}$ com o arco. Sendo $A\hat{P}B = \theta$, temos que provar que $\theta \neq \alpha$. Como C pertence ao arco capaz, temos $A\hat{C}B = \alpha$. Mas $A\hat{C}B$ é um ângulo externo do triângulo PBC, e sendo $P\hat{B}C = \beta$, teremos:

$$\alpha = \theta + \beta$$

Ora, como β é supostamente não-nulo, vem que $\alpha \neq \theta$.
Assim, fica provado que um ponto P não pertencente a qualquer dos arcos capazes não vê $\overline{AB}$ segundo o ângulo α, isto é, somente os pontos dos arcos vêem $\overline{AB}$ segundo o ângulo α.

■ c.q.d.

Tomando-se um ponto P interno, a demonstração é análoga.



$$\theta = \alpha + \beta$$

Como β não é nulo,

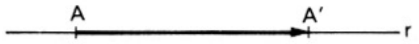
$$\theta \neq \alpha.$$

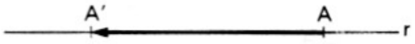
1

Translação

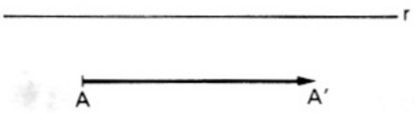
Imagine um ponto se deslocando sobre uma reta **r**, de uma posição A para uma posição A'. Dizemos que o ponto sofreu uma **translação** de A para A'. Observe, também, que um ponto pode se transladar sobre **r** em dois possíveis **sentidos**.

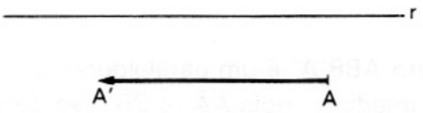
A translação, bem como a simetria e a homotetia, que estudaremos em seguida, são partes de um estudo chamado **transformação de figuras**.





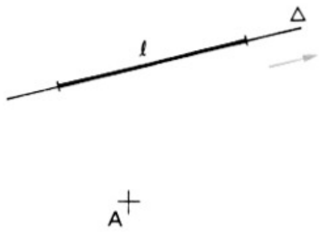
Podemos também imaginar um ponto A fora da reta **r** transladando-se paralelamente a **r**. Nesse caso, assim como naquele em que A está sobre **r**, dizemos que a translação do ponto A tem a **direção** da reta **r**.

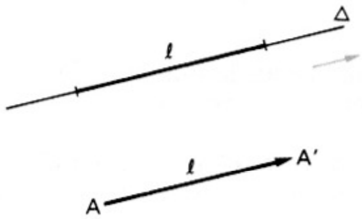




Nota-se, então, que a translação de um ponto A para uma posição A' fica definida quando se conhecem três características distintas desse deslocamento: a **direção**, o **sentido** e a **amplitude** (distância entre A e A').

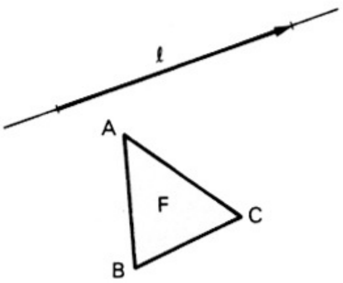
Assim, podemos resolver de forma única o seguinte problema:
Transladar o ponto A, dados a direção △, o sentido e a amplitude ℓ da translação.

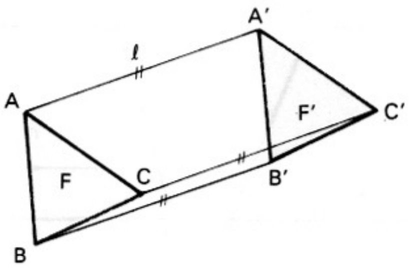




Translação de uma figura

Seja F uma figura qualquer. Suponha que cada ponto de F sofra uma translação de mesma direção, sentido e amplitude. O conjunto de todos os pontos obtidos pelas translações dos pontos de F é uma segunda figura, F'. Então, dizemos que F' **é uma transformação de F por translação**.



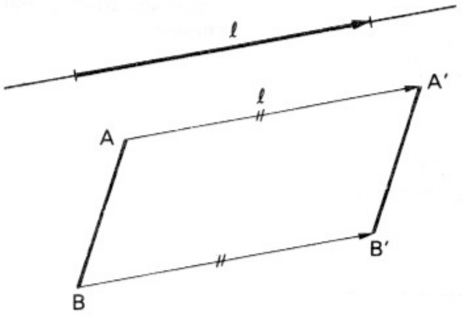


Se, através de uma translação, um ponto A de uma figura F se transforma no ponto A′ da figura F′, então dizemos que A e A′ são pontos **homólogos**, ou ainda que A′ é a imagem de A pela translação.

Propriedade fundamental da translação

Seja uma translação que transforma uma figura F na figura F′. Se A e B são pontos quaisquer de F e A′ e B′ os seus homólogos em F′, então:

1.º) $\boxed{\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}}$ 2.º) $\boxed{\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}}$



$$\text{Se } \{\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \text{ e } \overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$$
$$\text{Então } \{\overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \text{ e } \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$$

A propriedade ao lado garante que F e F′ são figuras congruentes. Assim, a translação é um deslocamento que mantém os elementos lineares sempre paralelos à posição primitiva.

Em outras palavras, o quadrilátero ABB′A′ é um paralelogramo.

Essa propriedade se justifica de imediato, pois $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ são congruentes e paralelos por definição e, como vimos, se um quadrilátero possui um par de lados opostos paralelos e congruentes, então esse quadrilátero é um paralelogramo.

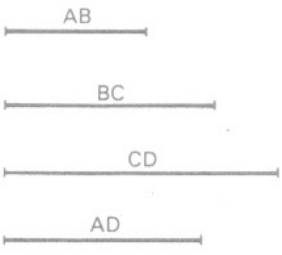
O emprego da translação nas construções geométricas

A translação tem vastas aplicações na resolução dos problemas de construções. Vamos analisar o emprego da translação através de problemas.

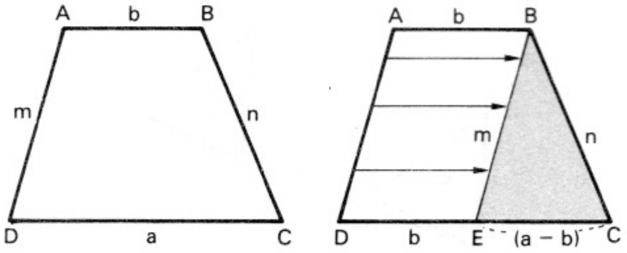
A TRANSLAÇÃO É FREQÜENTEMENTE UTILIZADA PARA APROXIMAR EXTREMIDADES DE SEGMENTOS QUE SE ENCONTRAM AFASTADOS NA FIGURA, REUNINDO ELEMENTOS EM TORNO DE UM MESMO PONTO.

Exercícios

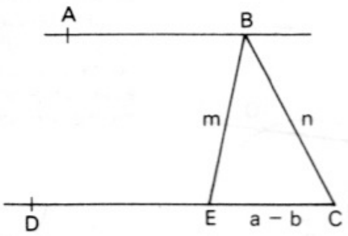
E1. **1** Construa um trapézio ABCD de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, dados os quatro lados.

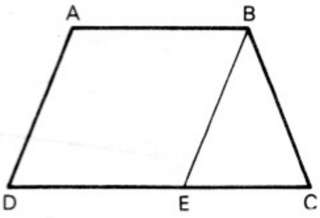


Suposto resolvido



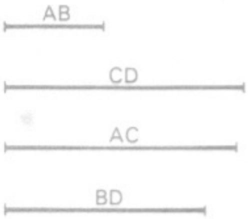
Resolução: Sejam AB = b, BC = n, CD = a e AD = m. Transladamos o lado $\overline{AD}$ de modo que A caia em B (a amplitude da translação é **b**). Então, o triângulo BEC é construtível, pois dele conhecemos os três lados, **m**, **n** e a − b. Construído esse triângulo, fica fácil determinar os vértices A e D.



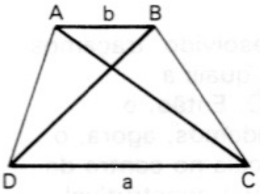


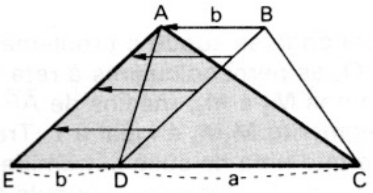
Embora já tenham sido resolvidos problemas de trapézios com esse artifício, note que agora ele passa a ser um método de resolução e, como veremos, terá aplicações de muito maior alcance.

E1.2 Construa um trapézio ABCD, dadas as bases, AB e CD, e as diagonais, AC e BD.

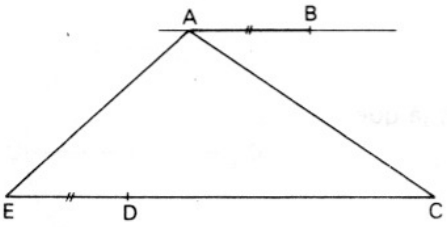


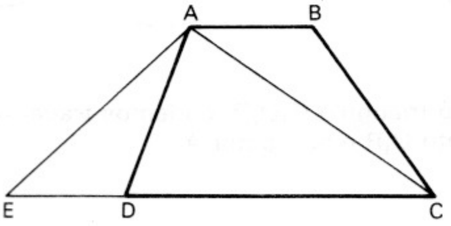
Suposto resolvido





Resolução: Transladamos a diagonal $\overline{BD}$ de modo que B caia em A (a amplitude da translação é igual ao comprimento da base menor). Então, o triângulo ACE é construtível, pois dele conhecemos os três lados. De fato, um dos lados é a soma das bases do trapézio e os outros são as diagonais. Após a construção desse triângulo, fica fácil obter os vértices B e D.





O trapézio é uma figura bastante favorável para se aplicar a translação. Isso porque, sendo as bases paralelas, podemos pensar em fazer um dos lados não-paralelos ou uma diagonal transladar-se entre as bases.

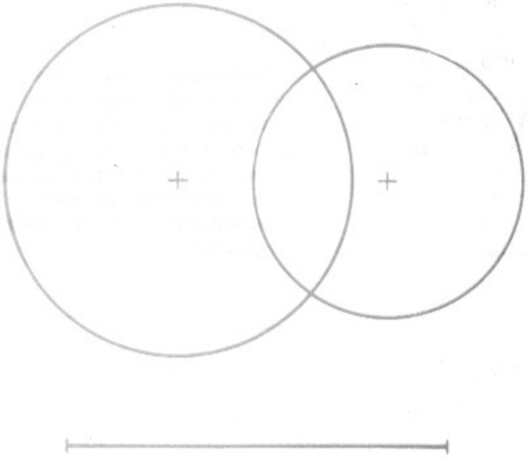
E1.3 Construa um trapézio ABCD, de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, dados AB = 22 mm, CD = 54 mm, $\hat{C} = 60°$ e $\hat{D} = 45°$. Qual é a medida da maior diagonal desse trapézio?

Sugestão: Procedendo como no E1.1 o triângulo BCE será construtível.

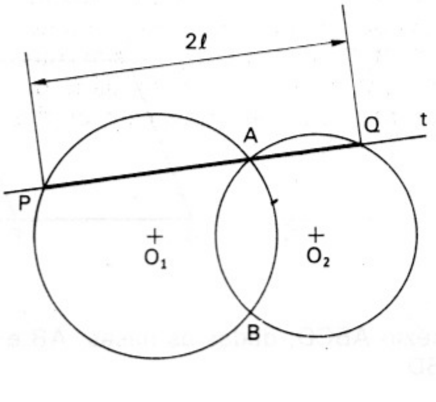
E1.4 Construa um trapézio ABCD, de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, dados AB = 30 mm, AC = 42 mm, BD = 58 mm e sabendo que as diagonais formam um ângulo de 120°. Qual é o perímetro desse trapézio?

Sugestão: Procedendo como no E1.2 o triângulo ACE será construtível.

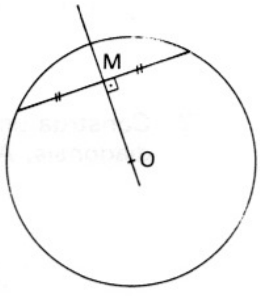
E1.5 São dadas duas circunferências de centros O_1 e O_2, secantes nos pontos A e B, e um segmento de comprimento 2ℓ. Trace por A uma reta **t** que intercepta uma circunferência em P, a outra em Q, de modo que se tenha $PQ = 2\ell$.



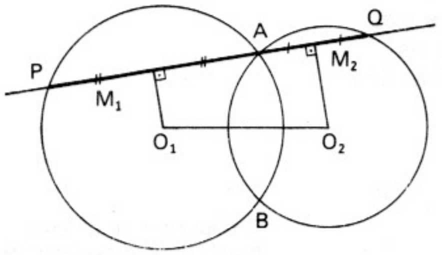
Suposto resolvido

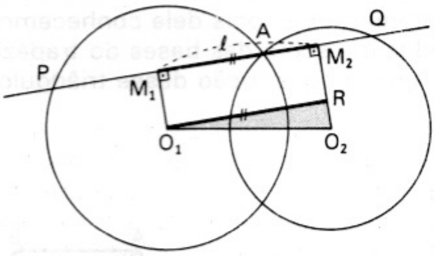


É muito importante que se observe a seguinte propriedade para compreender o E1.5.
Se pelo centro de uma circunferência traçarmos uma perpendicular a uma corda qualquer da mesma, essa corda ficará dividida ao meio por essa perpendicular.

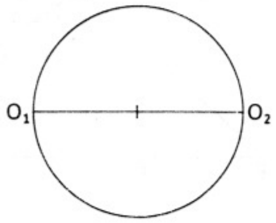


Resolução: Na figura onde se supõe o problema já resolvido, traçamos pelos centros O_1 e O_2 as perpendiculares à reta **t**, as quais a interceptam nos pontos M_1 e M_2, médios de $\overline{AP}$ e $\overline{AQ}$. Então, o comprimento do segmento M_1M_2 é igual a ℓ. Transladamos, agora, o segmento M_1M_2 até que uma de suas extremidades caia no centro de uma das circunferências. O triângulo retângulo O_1O_2R é construtível, pois dele temos a hipotenusa $\overline{O_1O_2}$ e um cateto ℓ.

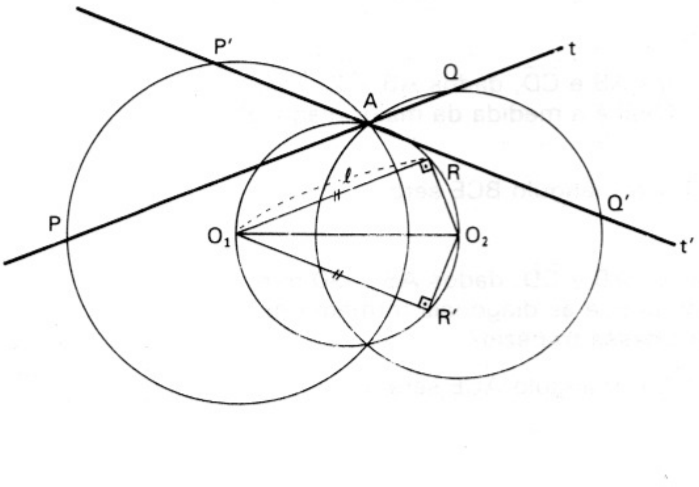


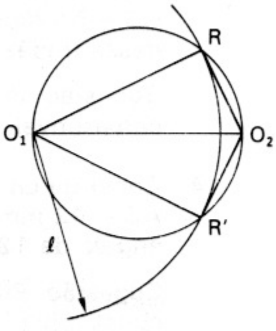


A construção do triângulo O_1O_2R foi feita através do arco capaz de 90°.



Uma vez construído o triângulo O_1O_2R, podemos traçar a reta **t**, já que ela é paralela ao cateto O_1R e passa por A.

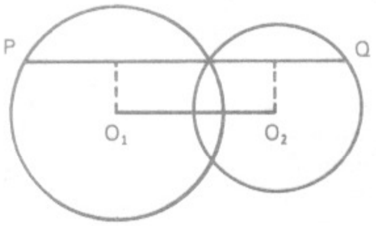




Observações:

- Embora os dois triângulos retângulos construídos sejam congruentes, o que de fato importava nesse problema era a posição do cateto O_1R (ou O_1R'), já que este dá a direção da reta **t**.
- Desse problema, podemos deduzir como traçar a reta **t** de modo que o segmento PQ tenha comprimento máximo. Basta notar que o cateto O_1R **não pode ser maior do que a hipotenusa**. No caso limite, teremos ℓ no máximo igual a O_1O_2. Mas para que isso aconteça, devemos ter a reta **t** paralela a O_1O_2. Assim, para que o segmento PQ tenha comprimento máximo, é necessário que ele seja traçado paralelamente à reta que passa pelos centros das circunferências.

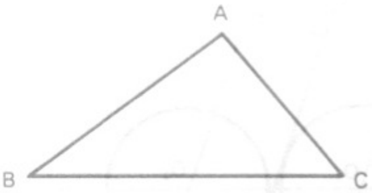
◁ IMPORTANTE



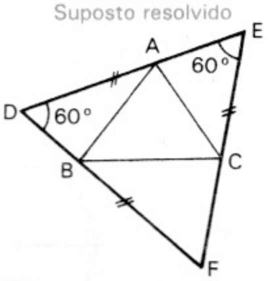
Se $\{\overline{PQ} \parallel \overline{O_1O_2}$
Então $\{\overline{PQ}$ é máximo

Essa propriedade é às vezes utilizada na resolução de problemas de construções. Veja o próximo problema.

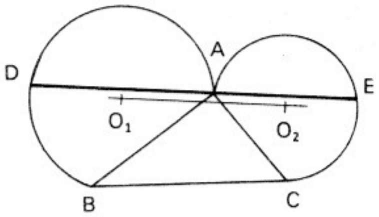
E1.6 Circunscreva a um triângulo ABC dado um triângulo eqüilátero de lado máximo.

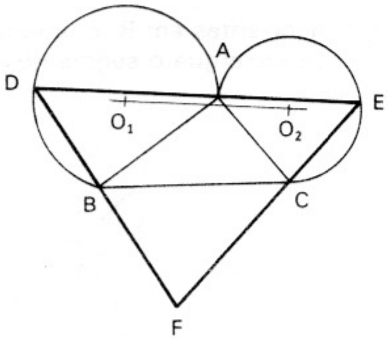


Suposto resolvido



Resolução: Seja DEF o triângulo procurado. Se determinarmos dois vértices desse triângulo, por exemplo, D e E, o problema fica resolvido, já que em seguida podemos traçar as retas que contêm os outros dois lados. Como D enxerga $\overline{AB}$ segundo um ângulo de 60°, esse ponto encontra-se sobre um arco capaz de 60° construído sobre $\overline{AB}$. O mesmo ocorre com E em relação a $\overline{AC}$. Mas queremos $\overline{DE}$ máximo. Conforme a observação feita anteriormente, traçamos $\overline{DE}$ paralelamente à reta que passa pelos centros dos arcos capazes.





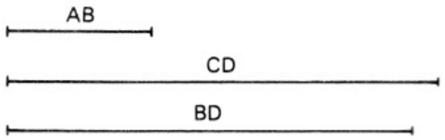
Nestas construções, O_1 e O_2 são os centros dos arcos capazes e $\overline{DE} \parallel \overline{O_1O_2}$.

ÀS VEZES TEMOS QUE CONSTRUIR UMA FIGURA NUMA DETERMINADA POSIÇÃO. ENTÃO, MANTENDO TODAS AS OUTRAS CONDIÇÕES A ELA IMPOSTAS, CONSTRUÍMOS A FIGURA NUMA POSIÇÃO ARBITRÁRIA E, EM SEGUIDA, A COLOCAMOS NA POSIÇÃO DESEJADA, ATRAVÉS DE UMA TRANSLAÇÃO.

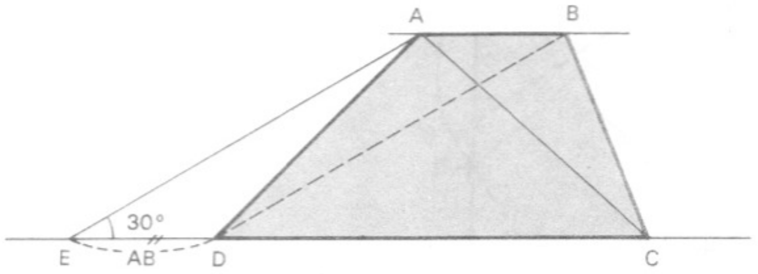
Resolva os exercícios de 1 a 4 do caderno de atividades.

Translação

1 Construa um trapézio ABCD, dadas as medidas das bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e da diagonal $\overline{BD}$, e sabendo ainda que essa diagonal forma um ângulo de 30° com a base maior.

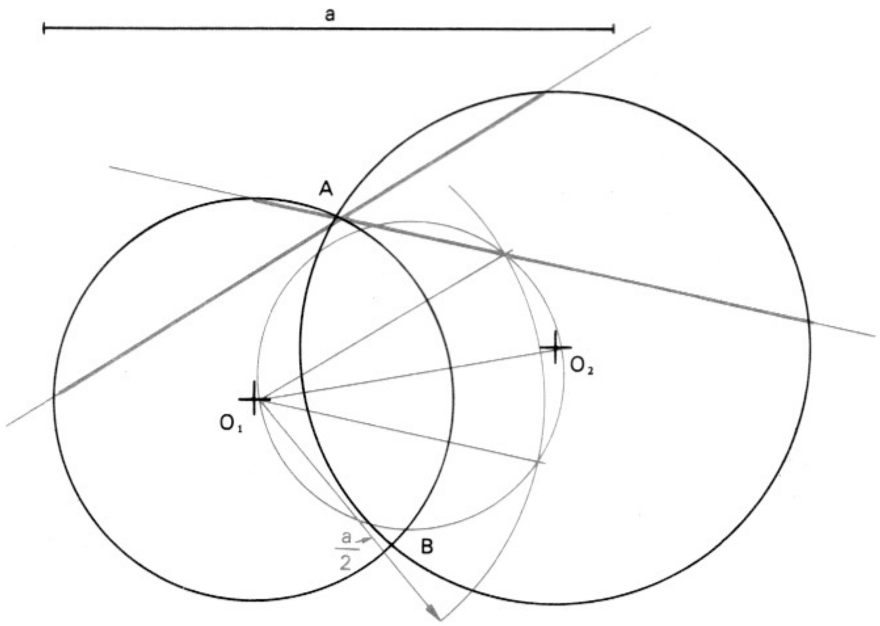


Construção a partir do triângulo EAC.



2 São dados um segmento **a** e duas circunferências secantes em A e B. Trace uma reta que passe por A e determine um segmento de comprimento **a** compreendido entre as duas circunferências.
Sugestão: Ver E1.5.

Observações:
1) Sugira ao aluno que estude o problema resolvido E1.5.
2) Aproveite para reforçar que o segmento máximo que se pode colocar entre as duas circunferências (passando por A) é paralelo à reta que passa pelos centros das mesmas.



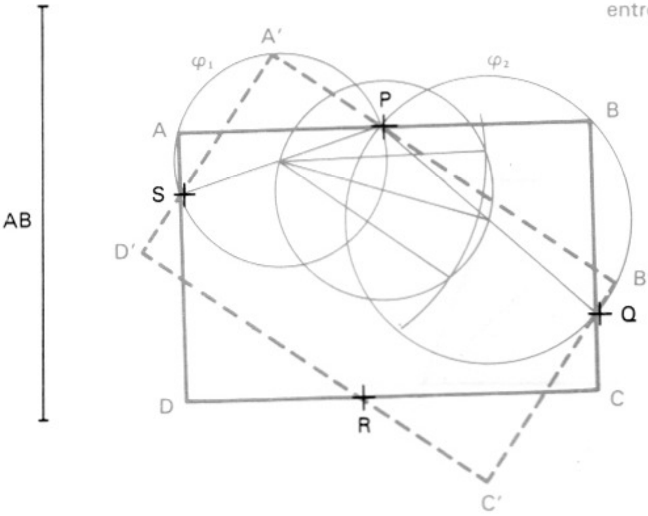
Translação

Figura auxiliar e anotações

3 Em um retângulo ABCD são dados os pontos P, Q, R e S pertencentes aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, respectivamente. Construa esse retângulo, dada a medida do lado $\overline{AB}$.

Sugestão: Construindo os arcos capazes de 90° sobre $\overline{PQ}$ e $\overline{PS}$, por exemplo, recai-se no problema anterior.

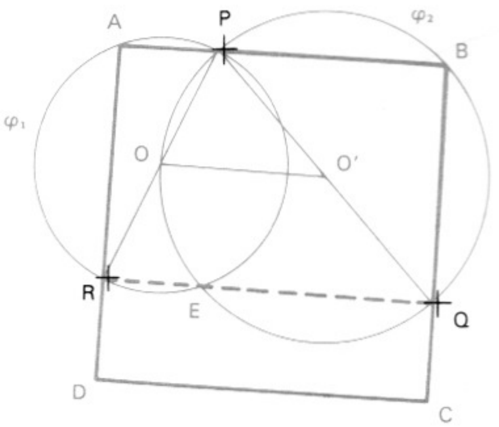
Observação:
Pergunte ao aluno como deve ser colocado o lado $\overline{AB}$ (supondo que tenha tamanho variável) para que ele seja máximo.



Construindo φ_1 e φ_2, o problema passa a ser: "colocar $\overline{AB}$, passando por P, entre φ_1 e φ_2".

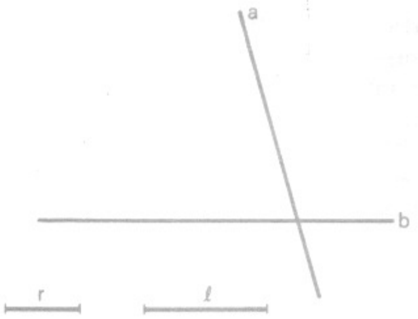
4 Construa um quadrado ABCD de lado máximo, dados os pontos P, Q e R pertencentes aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, respectivamente.

Observação:
Pode-se comentar com o aluno que o lado máximo é congruente ao segmento RQ. Pelo fato de que os pontos R, E e Q estão alinhados (E10.8), conclui-se que:
RQ = 2 × OO'
∴ RQ = AB

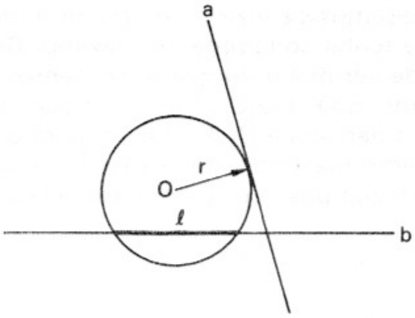


Basta traçar $\overline{AB}$ paralelamente à reta que une os centros de φ_1 e φ_2.

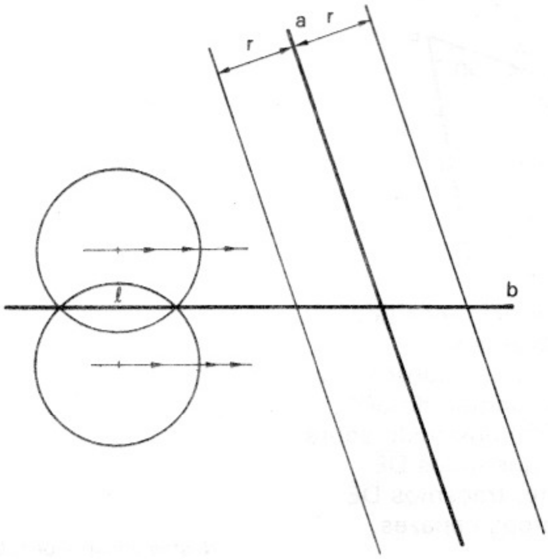
E1.7 São dados dois segmentos **r** e ℓ, duas retas concorrentes **a** e **b**. Construa uma circunferência de raio **r**, tangente à reta **a** e de tal modo que a reta **b** a intercepte segundo uma corda de comprimento ℓ.

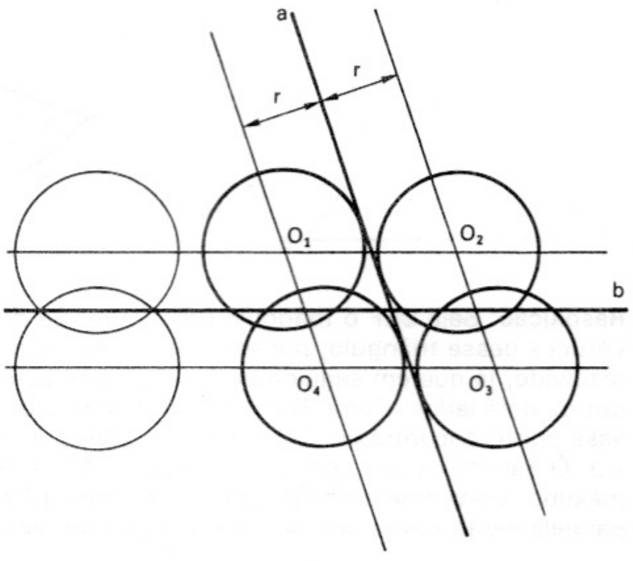


Suposto resolvido

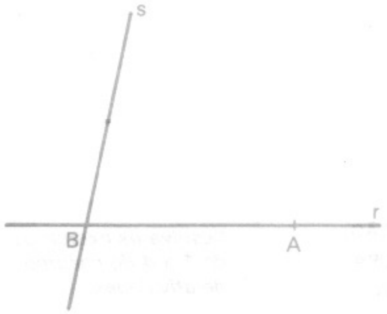


Resolução: Como o raio é conhecido, o problema se resolve com a determinação do centro. Um lugar geométrico do centro é conhecido, pois ele dista **r** da reta **a** (LG 3). Abandonamos, então, a condição de que a circunferência procurada seja tangente à reta **a**, construindo-a numa posição arbitrária, mas de modo que ela seja interceptada pela reta **b** segundo corda de comprimento ℓ. Imaginando agora que a circunferência construída na posição arbitrária translade-se até tangenciar a reta **a**, mantendo em **b** a corda de comprimento ℓ, é fácil deduzir que o seu centro se desloca sobre uma reta paralela a **b**. Podemos, então, traçar o segundo lugar geométrico para o seu centro.

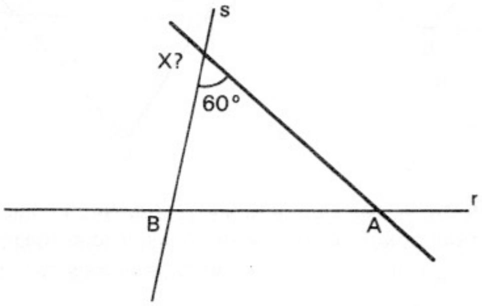




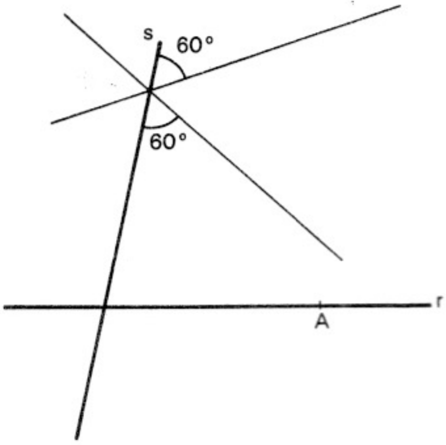
E1.8 São dadas duas retas **r** e **s**, concorrentes em B, e um ponto A sobre **r**. Determine um ponto X em **s** que enxergue o segmento AB segundo um ângulo de 60°.

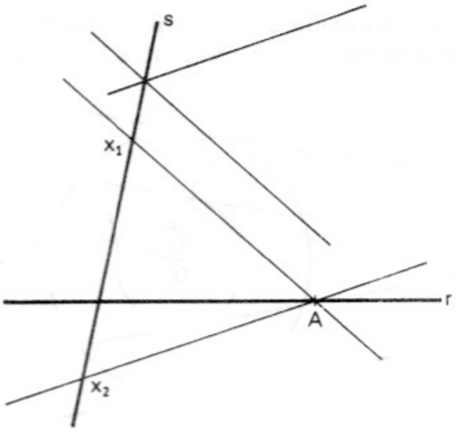


Suposto resolvido

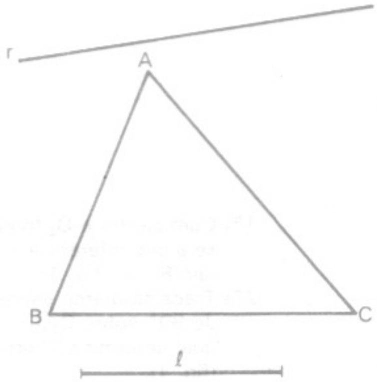


Resolução: Evidentemente, poderíamos traçar o par de arcos capazes de 60° sobre AB. Porém, podemos proceder a construção da seguinte forma: por um ponto arbitrário de **s** traçamos uma reta que forma um ângulo de 60° com a mesma (note que há duas possibilidades para o traçado dessa reta). Em seguida, transladamos essa reta de modo a fazê-la passar pelo ponto A. Então ela interceptará **s** no ponto X procurado.

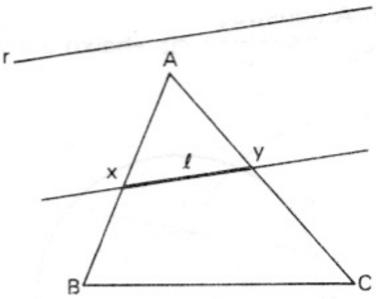




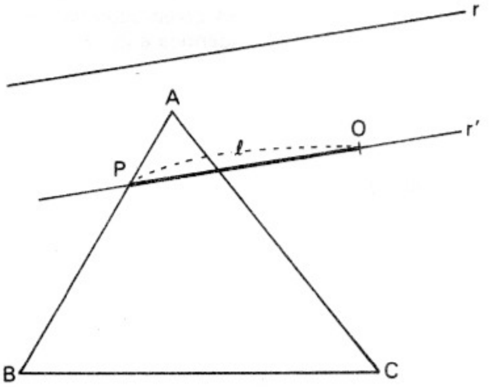
E1.**9** São dados um triângulo ABC, um segmento ℓ e uma reta **r**. Trace uma reta paralela a **r** que intercepte $\overline{AB}$ em X, $\overline{AC}$ em Y e de modo que se tenha XY = ℓ.

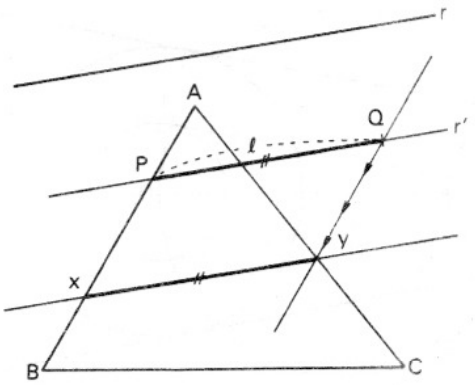


Suposto resolvido



Resolução: Por um ponto P qualquer do lado $\overline{AB}$ traçamos uma reta **r'** paralela a **r** e sobre ela tomamos um ponto Q tal que PQ = ℓ. Transladamos, agora, o ponto Q na direção de $\overline{AB}$ até ele encontrar $\overline{AC}$ em Y. Por fim, traçamos a paralela a **r** passando por Y e teremos a reta procurada.

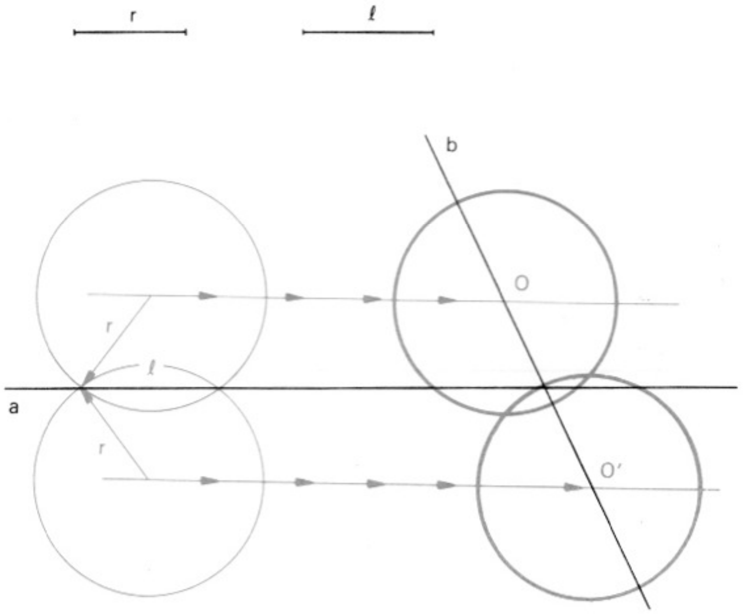




Resolva os exercícios de 5 a 8 do caderno de atividades.

Translação

5 São dados os segmentos **r** e **ℓ** e as retas concorrentes **a** e **b**. Construa uma circunferência de raio **r** sabendo que o seu centro pertence à reta **b** e que a reta **a** determina nessa circunferência uma corda de comprimento **ℓ**.



6 São dadas duas semi-retas OX e OY e os segmentos **r**, **m** e **n**. Construa uma circunferência que intercepte $\overrightarrow{OX}$ segundo uma corda de comprimento **m**, $\overrightarrow{OY}$ segundo uma corda de comprimento **n** e cujo raio seja igual a **r**.

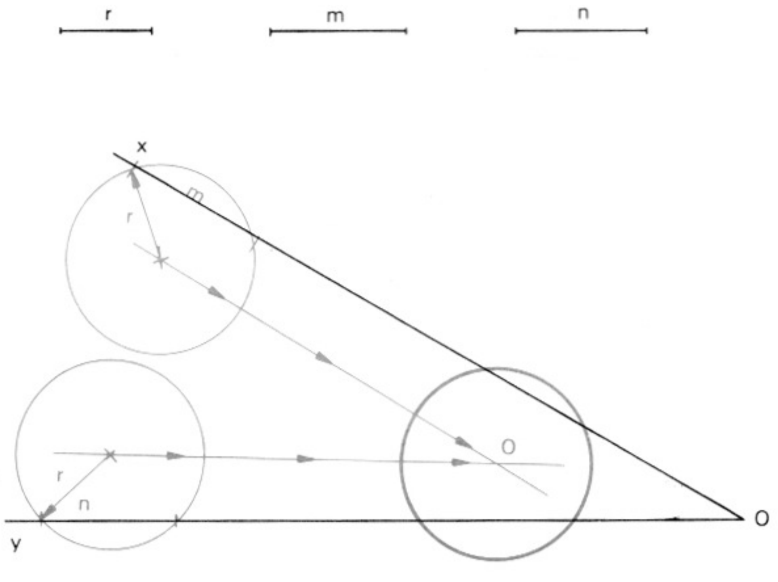
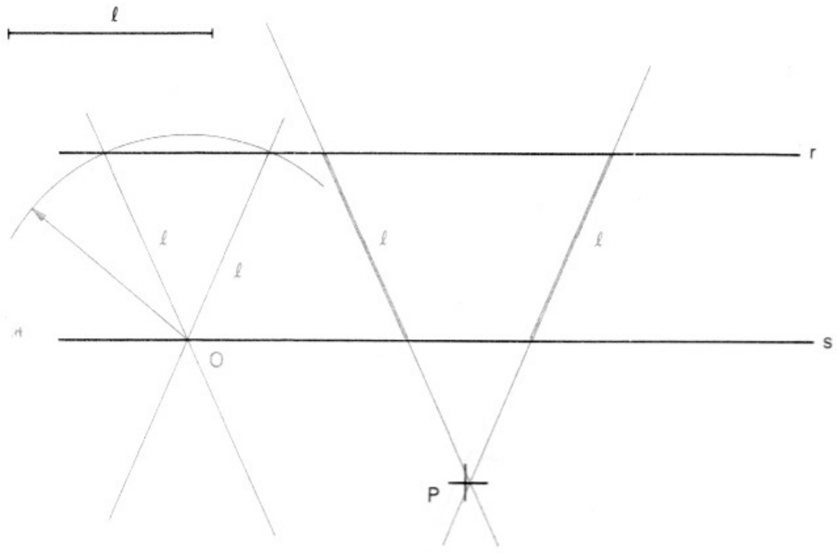


Figura auxiliar e anotações

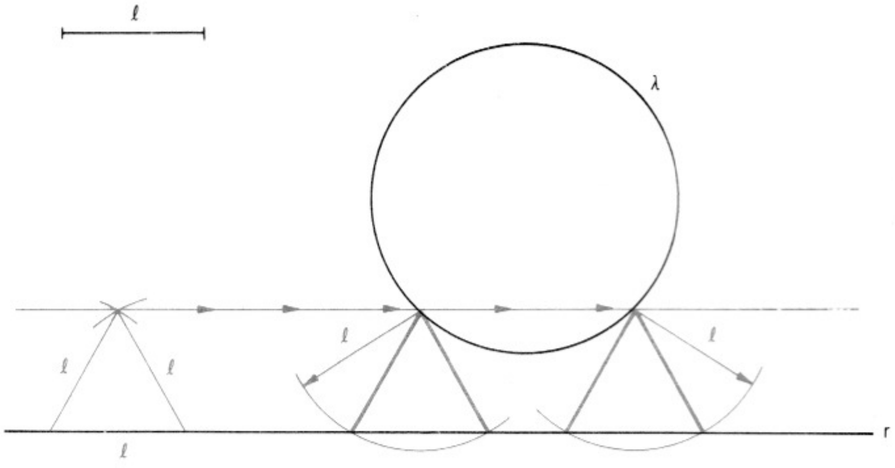
Observação:
Insista com o aluno para que ele se lembre sempre de que a circunferência arbitrária pode ser construída dos dois lados da reta, embora nem sempre os dois lados forneçam soluções.

7 São dados um ponto P, um segmento ℓ e duas retas paralelas **r** e **s**. Trace uma reta por P que determine um segmento de comprimento ℓ compreendido entre **r** e **s**.

Sugestão: Colocando-se entre **r** e **s** um segmento de comprimento ℓ numa posição arbitrária, obtém-se a direção da reta procurada.



8 São dados um segmento ℓ, uma reta **r** e uma circunferência λ. Construa um triângulo eqüilátero de lado ℓ sabendo que um vértice pertence a λ e que o seu lado oposto está contido em **r**.



Uma construção importante

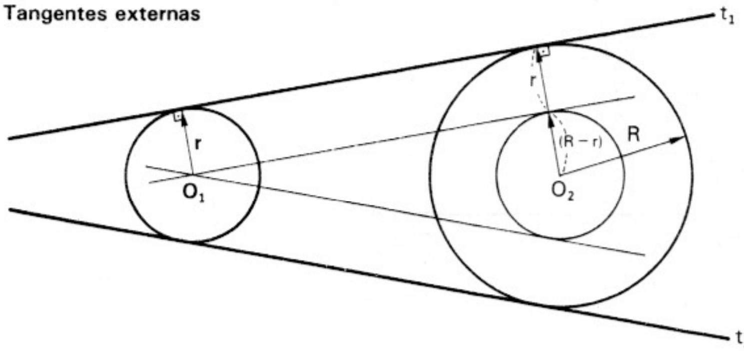
Problema

Traçar uma reta tangente comum a duas circunferências dadas.

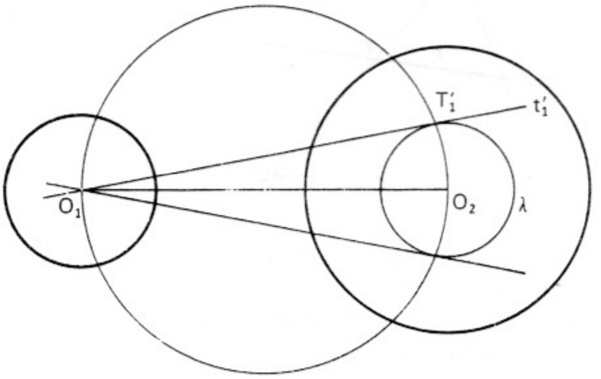
A resolução desse problema é um exemplo de aplicação da translação. Vamos considerar o caso mais geral que é aquele em que as circunferências dadas são exteriores e de raios diferentes.

Há dois tipos de tangentes a serem consideradas. Para diferenciá-las, costuma-se denominá-las **tangentes externas** e **tangentes internas**.

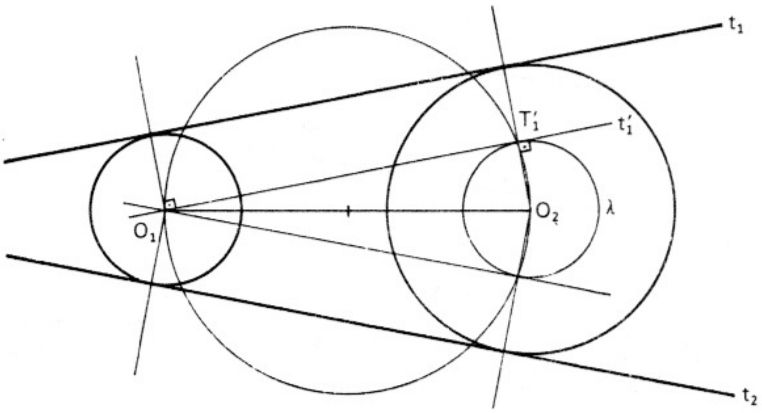
Tangentes externas



Resolução: Vamos imaginar o problema já resolvido e seja t_1 uma das retas procuradas. Então, transladamos t_1 até que ela passe pelo centro O_1 da circunferência de raio **r**. A amplitude da translação é igual a **r**, por essa razão a reta t_1 transladada é tangente à circunferência de centro O_2 e raio igual a R − r. Ora, essa reta nós podemos construir, pois recaímos num problema já estudado: ''por um ponto O_1 traçar uma tangente a uma circunferência de centro O_2 e raio R − r''. Uma vez construída a reta em questão, basta transladá-la para a posição desejada. A construção da tangente t_2 se faz análoga e simultaneamente com a de t_1. (Acompanhe abaixo a seqüência de construções.)



(fig. 1)



(fig. 2)

1.º) Com centro e O_2 traça-se a circunferência λ de raio R − r. (fig. 1)

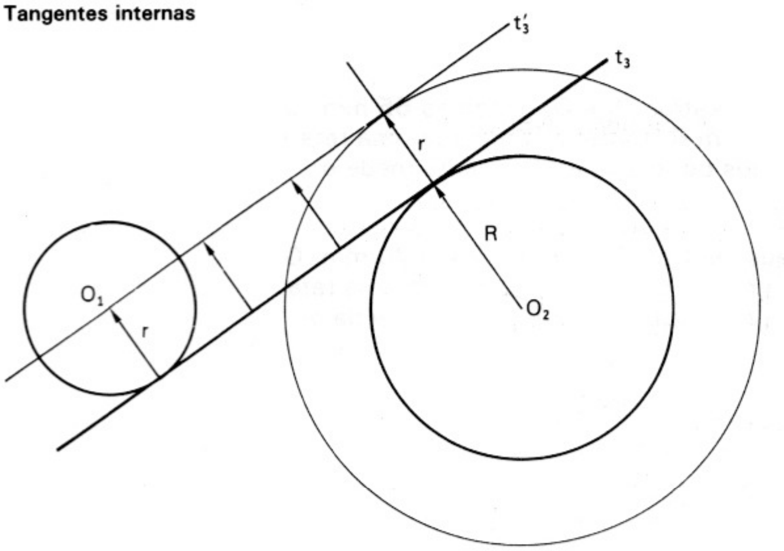
2.º) Traça-se o arco capaz de 90° sobre $\overline{O_1O_2}$, o qual determina T'_1 em λ. (fig. 1)

3.º) Traça-se a reta por O_2 e T'_1, e por O_1 a paralela a ela. (fig. 2)

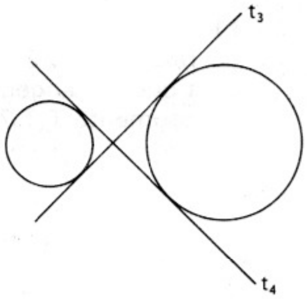
4.º) Essas retas interceptam as circunferências dadas nos pontos em que t_1 as tangencia. Por esses pontos traça-se a reta t_1. (fig. 2)

(A construção de t_2 é idêntica à de t_1.)

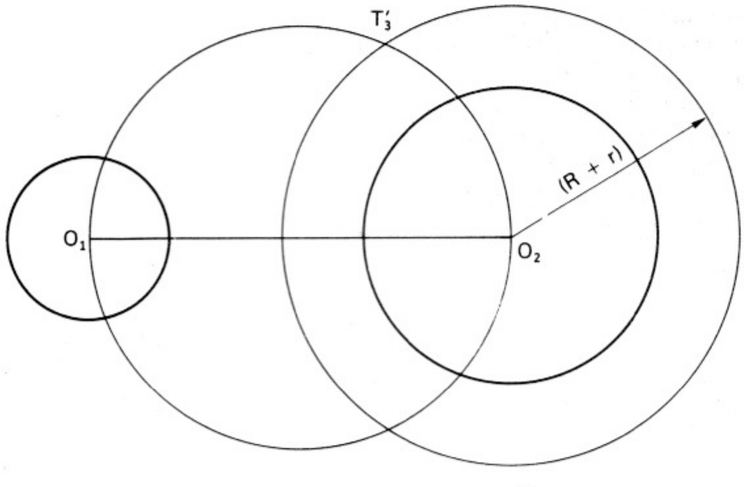
Tangentes internas

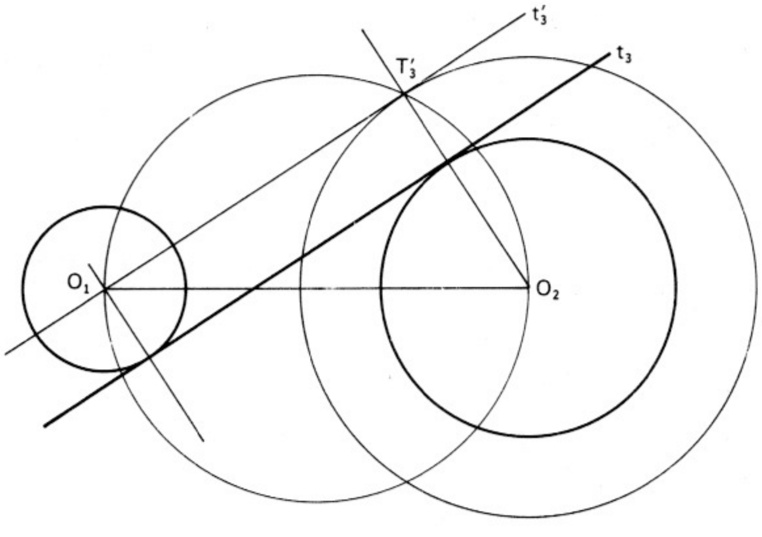


Há duas tangentes internas, t_3 e t_4. Acompanhamos apenas a construção de t_3 para obter maior clareza dos traçados, porém a construção de t_4 é idêntica à de t_3 e se faz simultaneamente com esta.



Resolução: Na figura, onde se imagina o problema já resolvido, transladamos a reta t_3 até ela passar por O_1. A amplitude da translação é igual a **r**. Assim, ela passa a ser tangente à circunferência de centro O_2 e raio R + r. Como no caso anterior, a reta t'_3 pode ser construída e então basta transladá-la para a posição desejada.





Observação: Como se viu, o problema admitiu quatro soluções, e como nada se disse sobre quais tangentes devem ser traçadas (externas ou internas), devemos construir as quatro.

Exercícios

E1.10 Duas circunferências têm os seus centros O_1 e O_2 distantes 65 mm. O raio de uma é r = 15 mm e o da outra R = 40 mm. Construa uma reta **t** que as tangencia externamente nos pontos T_1 e T_2. Quanto mede o segmento T_1T_2?

E1.11 Duas circunferências têm os seus centros O_1 e O_2 distantes 70 mm. O raio de uma é r = 16 mm e o da outra R = 40 mm. Construa uma reta **t** que as tangencia internamente nos pontos T_1 e T_2. Quanto mede o segmento T_1T_2?

2

Simetria

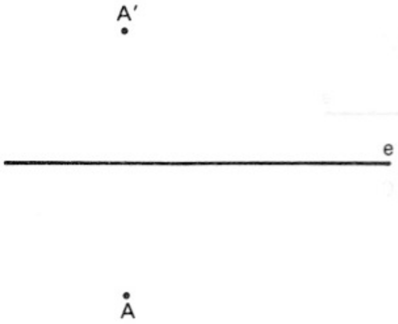
Simetria axial ou rebatimento

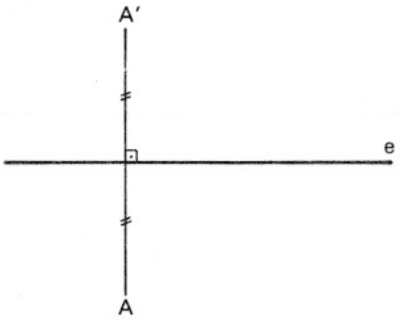
Definição

Dois pontos A e A′ são **simétricos em relação a uma reta e**, que não os contém, quando, e somente quando, a reta **e** é a mediatriz do segmento AA′.

Observações:

- A reta **e** é chamada eixo de simetria.
- Se um ponto pertence ao eixo de simetria, o simétrico dele em relação a esse eixo é ele próprio.





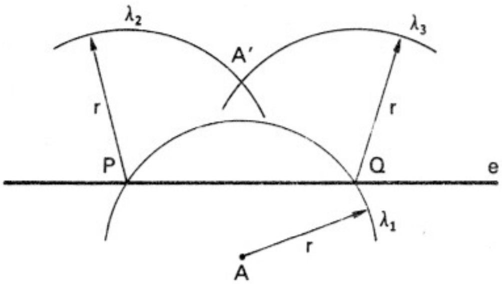
Problema

Dados um ponto A e uma reta **e**, construir o simétrico de A em relação a **e**.

Resolução:

1.º) Com centro em A e raio **r** qualquer conveniente, descreve-se o arco de circunferência λ_1, o qual intercepta **e** nos pontos P e Q.

2.º) Com centros em P e em Q, e o mesmo raio **r**, descrevem-se os arcos λ_2 e λ_3, os quais interceptam-se em A′, simétrico de A em relação a **e**.



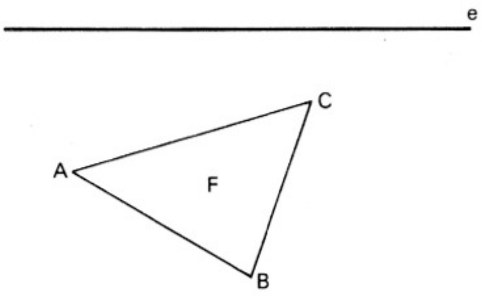
A justificativa dessa construção é imediata, pois P eqüidista de A e A′ (PA = PA′ = r) e Q eqüidista de A e A′ (QA = QA′ = r). Assim, como a reta **e** passa por P e Q ela é a mediatriz de $\overline{AA'}$.

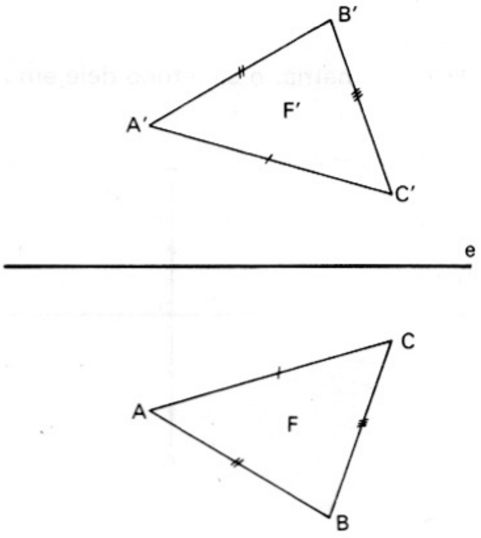
Observação: Quando construímos o simétrico de um ponto em relação a um eixo, dizemos que **rebatemos esse ponto em torno do eixo.**

Imagine que a folha de papel seja dobrada de modo que o vinco esteja sobre a reta **e**. As figuras F e F′ irão se sobrepor perfeitamente se forem simétricas em relação a **e**. Por isso usa-se dizer que F foi rebatida em torno de **e** obtendo-se F′.

Figuras simétricas

Sejam dadas uma reta **e** e uma figura F qualquer. Seja F′ a figura constituída pelos simétricos dos pontos de F em relação a **e**. Então, dizemos que **F′ é uma transformação de F por simetria**. Dizemos também que **F′ é o rebatimento de F em torno de e**.





Propriedade

Duas figuras simétricas em relação a um eixo são congruentes.

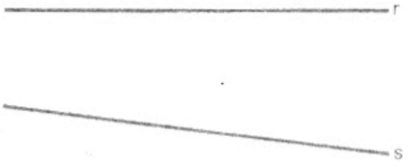
Essa propriedade nos permite, por exemplo, construir a simétrica de uma circunferência dada em relação a um eixo. Como a simétrica e a circunferência dada são congruentes (têm raios iguais), basta construir o simétrico do centro e por ele descrever a circunferência com o mesmo raio da circunferência dada.

Resolva os exercícios de 9 a 12 do caderno de atividades.

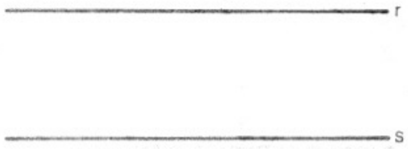
Um problema importante

*Dadas duas retas, **r** e **s**, construir a reta **r′** simétrica de **r** em relação a **s**.*

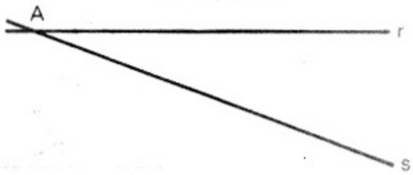
Situação (1)



Situação (2)



Situação (3)



Simetria axial

9 São dados um ponto P e uma reta **e**. Construa o simétrico de P em relação a **e**.

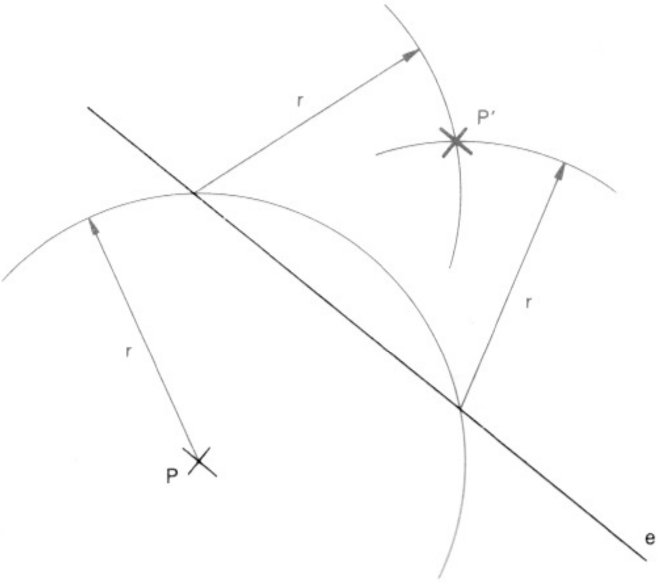
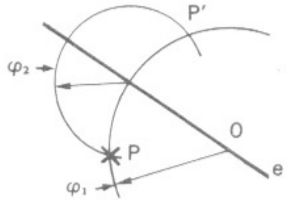


Figura auxiliar e anotações

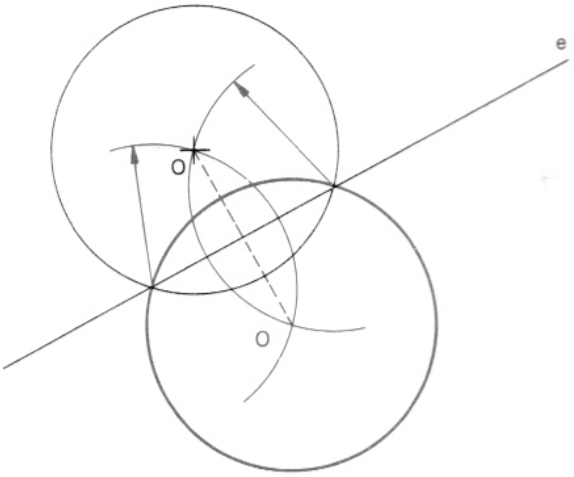
Observação:
Pode-se comentar o processo abaixo para determinar o simétrico de P.



1.º) O arbitrário em **e** − φ_1
2.º) φ_2

A vantagem do processo dado no livro-texto é que não se mexe na abertura do compasso.

10 São dadas uma circunferência de centro O e uma reta **e**. Construa a simétrica da circunferência dada em relação a **e**.

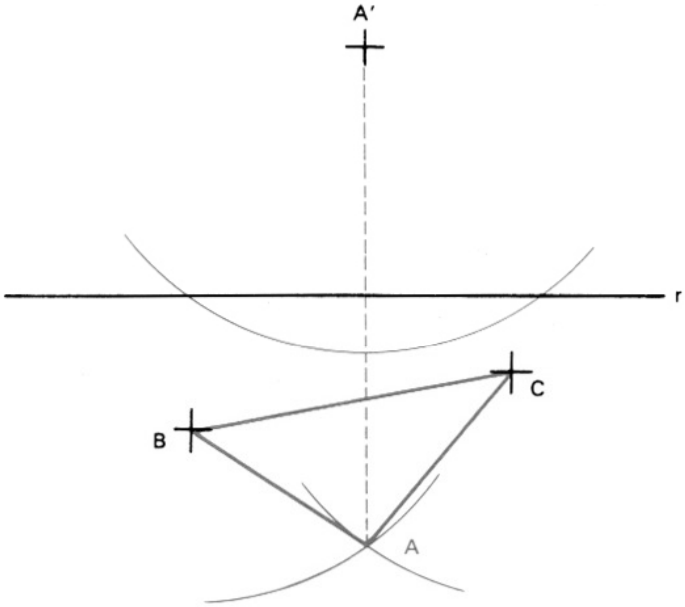


Observação:
Reforce o fato de que figuras simétricas em relação a um eixo são congruentes.

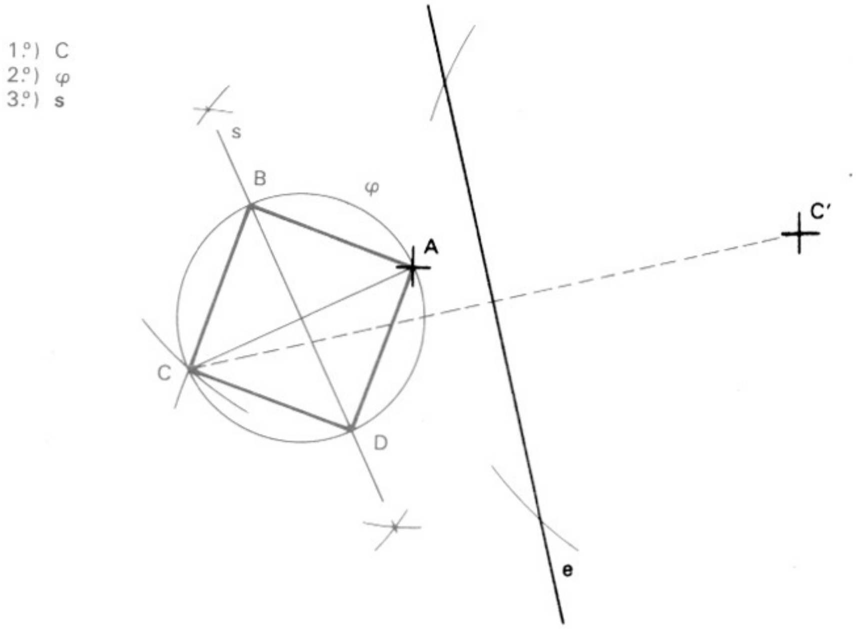
Simetria axial

Figura auxiliar e anotações

11 São dados os pontos A′, B e C e uma reta **r**. Construa um triângulo ABC sabendo que A′ é o simétrico de A em relação a **r**.



12 São dados os pontos A e C′ e uma reta **e**. Construa um quadrado ABCD sabendo que C′ é o simétrico de C em relação a **e**.



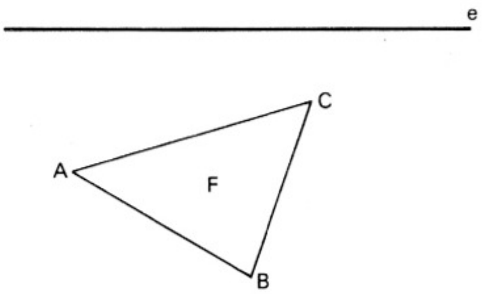
A justificativa dessa construção é imediata, pois P eqüidista de A e A' (PA = PA' = r) e Q eqüidista de A e A' (QA = QA' = r). Assim, como a reta **e** passa por P e Q ela é a mediatriz de $\overline{AA'}$.

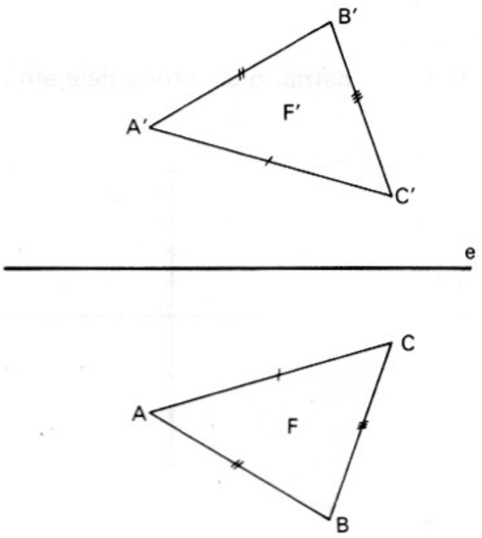
Observação: Quando construímos o simétrico de um ponto em relação a um eixo, dizemos que **rebatemos esse ponto em torno do eixo.**

Imagine que a folha de papel seja dobrada de modo que o vinco esteja sobre a reta **e**. As figuras F e F' irão se sobrepor perfeitamente se forem simétricas em relação a **e**. Por isso usa-se dizer que F foi rebatida em torno de **e** obtendo-se F'.

Figuras simétricas

Sejam dadas uma reta **e** e uma figura F qualquer. Seja F' a figura constituída pelos simétricos dos pontos de F em relação a **e**. Então, dizemos que **F' é uma transformação de F por simetria**. Dizemos também que **F' é o rebatimento de F em torno de e**.





Propriedade

Duas figuras simétricas em relação a um eixo são congruentes.

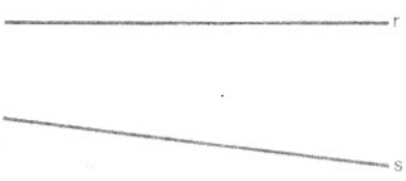
Essa propriedade nos permite, por exemplo, construir a simétrica de uma circunferência dada em relação a um eixo. Como a simétrica e a circunferência dada são congruentes (têm raios iguais), basta construir o simétrico do centro e por ele descrever a circunferência com o mesmo raio da circunferência dada.

Resolva os exercícios de 9 a 12 do caderno de atividades.

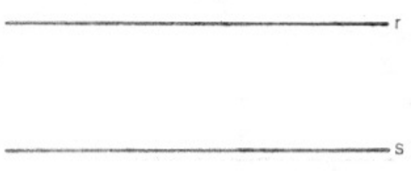
Um problema importante

*Dadas duas retas, **r** e **s**, construir a reta **r'** simétrica de **r** em relação a **s**.*

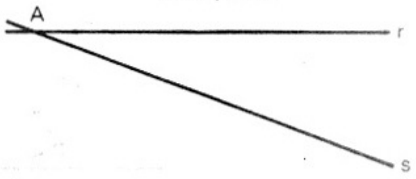
Situação (1)



Situação (2)



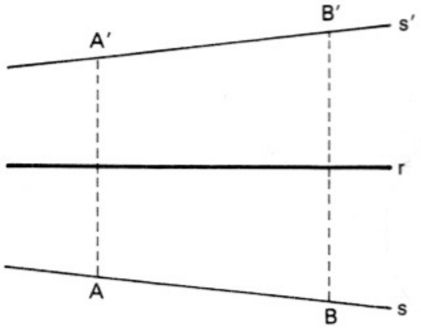
Situação (3)



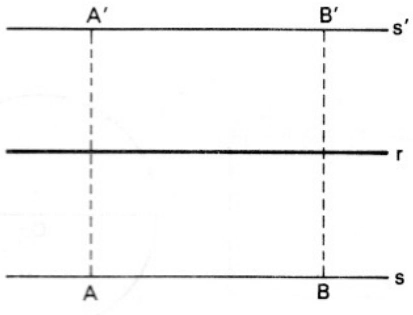
Resolução: Se o ponto de intersecção de **r** e **s** está fora do papel ou se essas retas são paralelas, tomamos dois pontos A e B quaisquer sobre **s** e construímos os seus simétricos A′ e B′ em relação a **r**. Então, traçamos s′ por A′ e B′.

Se **r** e **s** são concorrentes e temos acesso ao ponto de intersecção A, então basta construir o simétrico de um ponto B de **s** em relação a **r**. A reta s′ passa por esse ponto e por A.

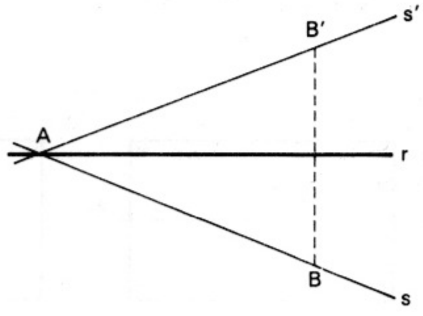
(1)



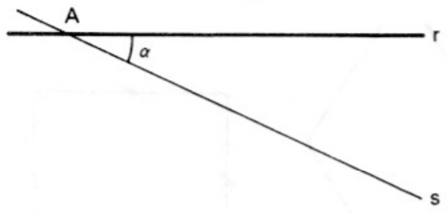
(2)

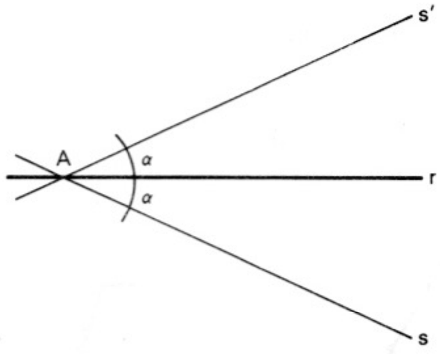


(3)



Vamos analisar a situação (3) mais atentamente. Como **r** é a mediatriz de $\overline{BB'}$, o triângulo ABB′ é isósceles, pois AB = AB′. Então, a mediatriz da base é bissetriz do ângulo do vértice, isto é, a reta **r**, eixo de simetria, contém as bissetrizes de um par de ângulos opostos pelo vértice formados por **s** e s′. Assim, nesse caso, podemos construir s′ transportando o ângulo α formado por **r** e **s** para o outro lado de **r**.



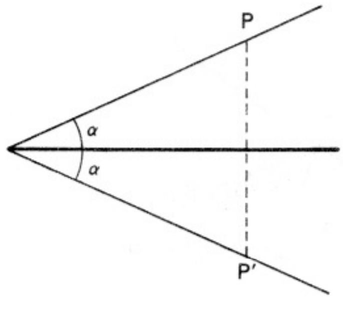


Então, podemos também enunciar a seguinte propriedade:

Propriedade

Os lados de um ângulo qualquer são simétricos em relação à bissetriz desse ângulo.

Essa propriedade garante que se um ponto P pertence a um lado de um ângulo, então o simétrico de P em relação à bissetriz pertence ao outro lado.



Nesse caso, dizemos que o ângulo é uma figura que admite um eixo de simetria, isto é, a reta que contém a sua bissetriz. Há uma série de figuras que admitem um ou mais eixos da simetria. Vejamos alguns exemplos:

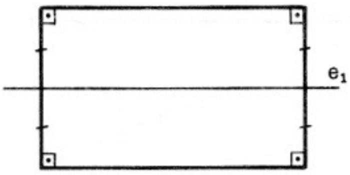
Exemplo 1

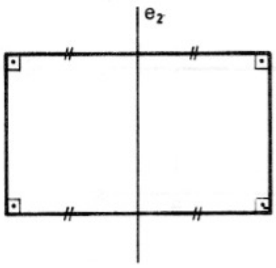
Um retângulo admite dois eixos de simetria: qualquer uma das retas que passa pelos pontos médios de dois lados opostos.

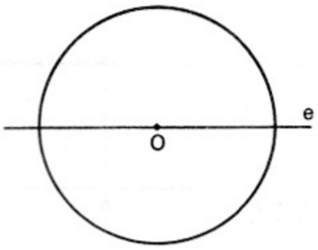
Exemplo 2

Uma circunferência admite infinitos eixos de simetria: qualquer reta que passa pelo centro.

Para melhor enxergar o eixo de simetria de uma figura, convém sempre imaginar a folha de papel dobrando-se de modo que o vinco caia exatamente sobre o eixo. As duas partes em que a figura fica dividida pelo eixo sobrepõem-se após a dobradura.



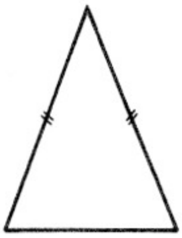




Exercícios

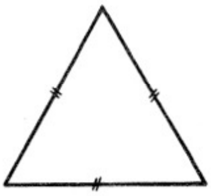
E2.1 Identifique os eixos de simetria que possuem as seguintes figuras.

a)



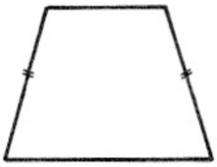
Triângulo isósceles

b)



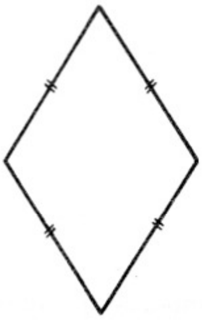
Triângulo eqüilátero

c)



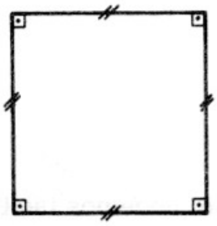
Trapézio isósceles

d)



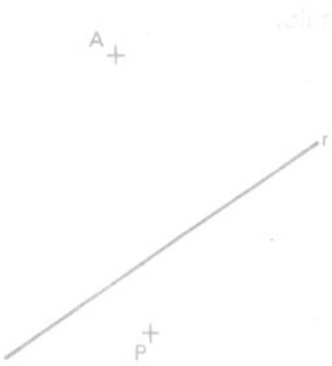
Losango

e)

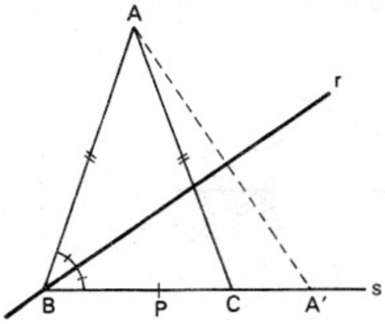


Quadrado

E2.2 Construa um triângulo ABC isósceles de base $\overline{BC}$, dados o vértice A, um ponto P do lado $\overline{BC}$ e a reta **r** que contém a bissetriz do ângulo $\hat{B}$.



Suposto resolvido

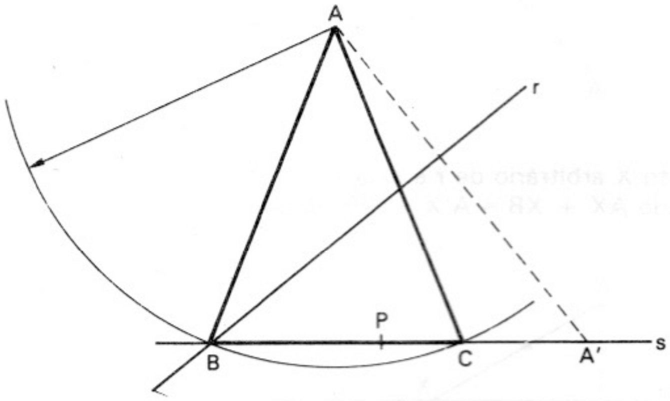


Resolução: Na figura onde se supõe o problema já resolvido, observemos que o ponto A′, simétrico de A em relação à bissetriz do ângulo $\hat{B}$, pertence à reta **s**, que contém o lado $\overline{BC}$. Então, procedemos a construção, como segue:

1.º) construímos A′ (simétrico de A em relação a **r**);

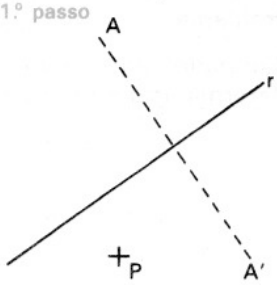
2.º) por A′ conduzimos a reta **s** determinando B em **r**;

3.º) com centro em A e raio AB, descrevemos um arco de circunferência determinando C em **s**.

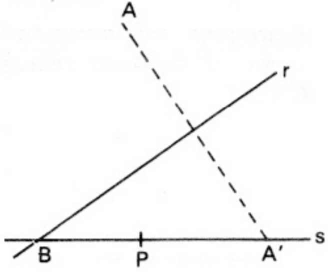


Evolução do traçado

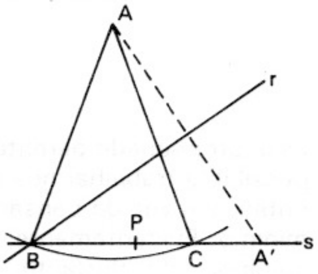
1.º passo



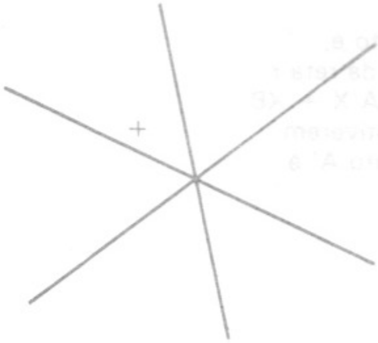
2.º passo



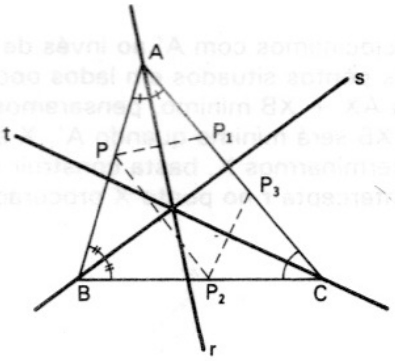
3.º passo



E2.3 Construa um triângulo ABC, dadas as retas **r**, **s** e **t**, que contêm as bissetrizes internas dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente, e dado também um ponto P do lado $\overline{AB}$.



Suposto resolvido



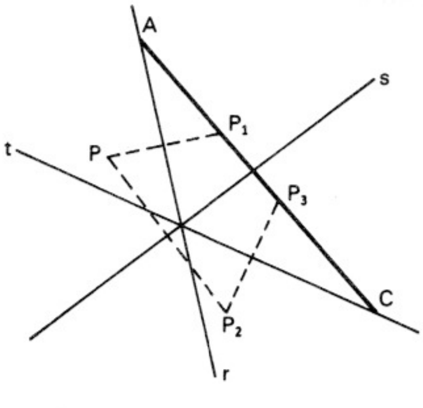
Resolução: Observemos na figura, onde se supõe o problema já resolvido, que:

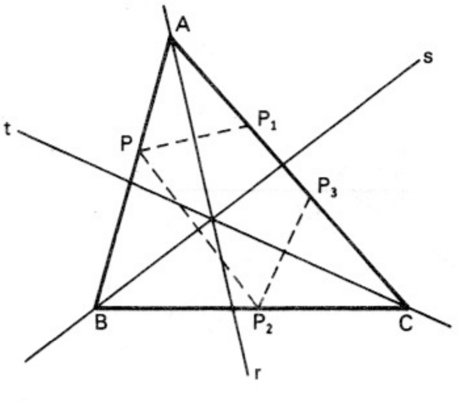
1.º) P_1, simétrico de P em relação a **r**, pertence ao lado $\overline{AC}$;

2.º) P_2, simétrico de P em relação a **s**, pertence ao lado $\overline{BC}$;

3.º) P_3, simétrico de P_2 em relação a **t**, pertence ao lado $\overline{AC}$.

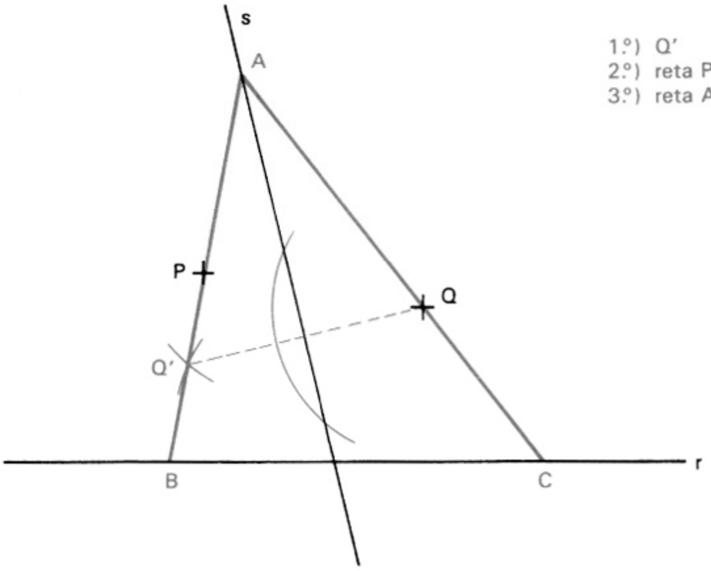
Construindo os pontos P_1, P_2 e P_3: por P_1 e P_3 traçamos a reta que corta **r** e **t** nos vértices A e C, e por A e P a reta que corta **s** em B.





Resolva os exercícios de 13 a 15 do caderno de atividades.

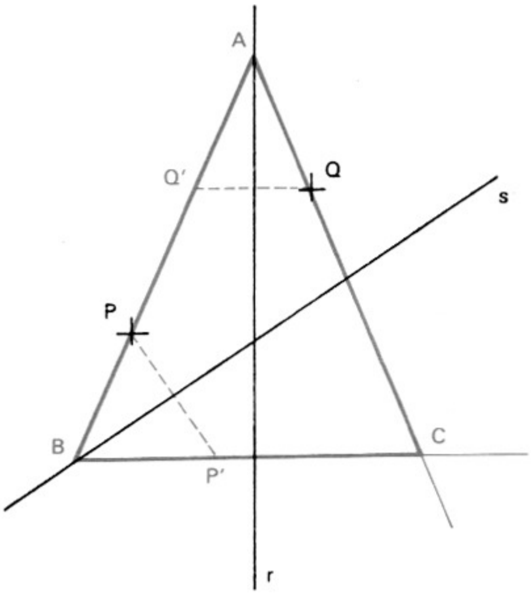
13 Construa um triângulo ABC, sendo dados um ponto P do lado $\overline{AB}$, um ponto Q do lado $\overline{AC}$, a reta **r** suporte do lado $\overline{BC}$ e a reta **s** que contém a bissetriz do ângulo $\hat{A}$.



1.º) Q'
2.º) reta PQ'
3.º) reta AQ

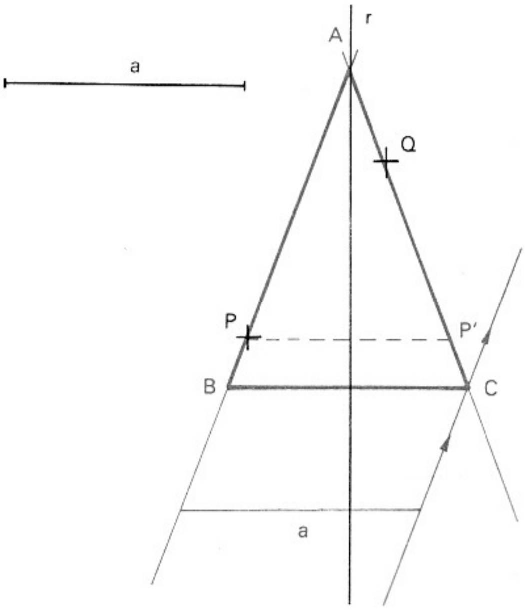
14 Construa um triângulo ABC, dados os pontos P e Q dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, e as retas **r** e **s** que contêm as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, respectivamente.

1.º) Q' e P'
2.º) reta PQ'
3.º) reta AQ
4.º) reta BP'



Simetria axial

15 Construa um triângulo ABC isósceles de base $\overline{BC}$, dados os pontos P e Q dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, a reta **r** mediatriz de $\overline{BC}$ e o lado **a**.
Sugestão: Após as construções das retas suportes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, pode-se introduzir o lado **a** por translação.



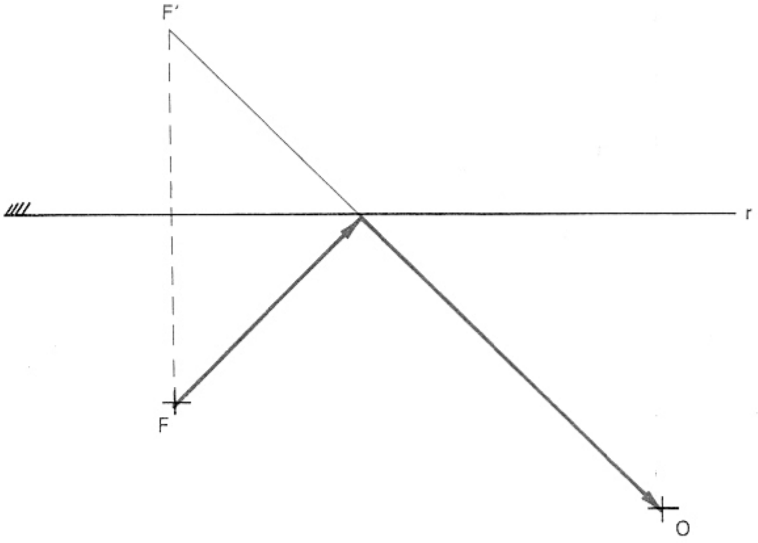
1.º) P'
2.º) reta QP'
3.º) reta AP
4.º) coloca-se **a** por translação

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Aproveite para reforçar a definição de simetria axial: "Se P e P' são simétricos em relação a uma reta **r**, então **r** é a mediatriz do segmento PP'."

Sugestão:
Proponha: "Dados P, **r** e **a**, construir o triângulo eqüilátero de lado **a**." (Depois de determinar P', usar arco capaz.)

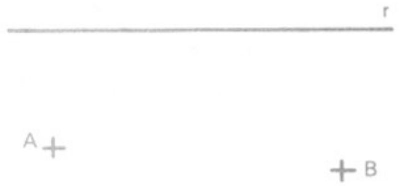
16 Na figura, F é uma fonte de luz, **r** um espelho plano e O um objeto. Determine a trajetória de um raio de luz que, emitido de F, se reflete em **r** e atinge O.

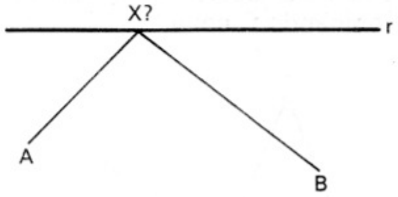


Um problema importante

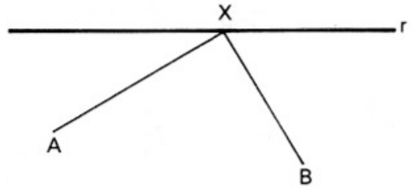
Problema

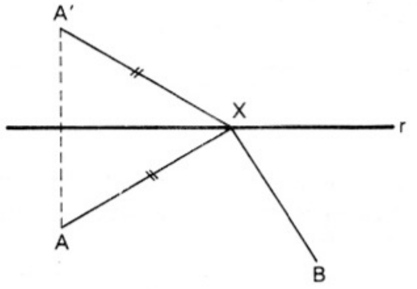
São dados uma reta **r** e dois pontos A e B situados de um mesmo lado de **r**. Determinar um ponto X dessa reta para que se tenha AX + XB mínimo.



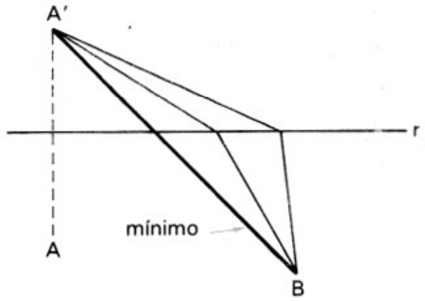


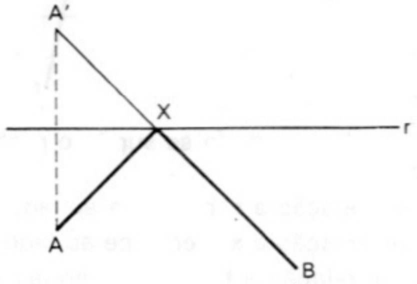
Resolução: Inicialmente tomemos um ponto X arbitrário de **r** e seja A' o simétrico de A em relação a **r**. Notemos que AX + XB = A'X + XB, já que AX = A'X.



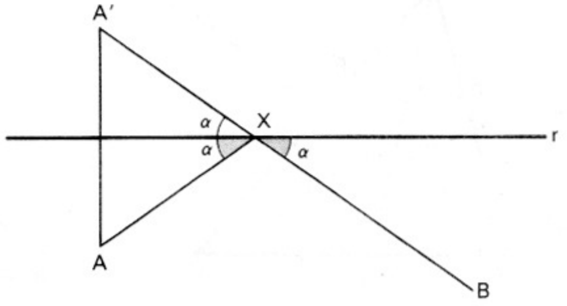


Essa propriedade permite que raciocinemos com A' ao invés de A, isto é, possibilita trabalharmos com dois pontos situados em lados opostos da reta **r**. Então, em vez de pensarmos em AX + XB mínimo, pensaremos em A'X + XB mínimo. Evidentemente, A'X + XB será mínimo quando A', X e B estiverem em linha reta. Portanto, para determinarmos X, basta construir o ponto A' e traçar a reta por A' e B, a qual intercepta **r** no ponto X procurado.





Observação: Nesse problema, note que **r** contém a bissetriz do ângulo $A\hat{X}A'$. Daí se conclui imediatamente que $\overline{AX}$ e $\overline{BX}$ formam ângulos congruentes com a reta **r**.



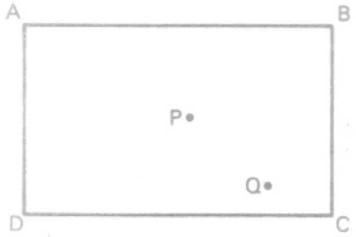
Assim, supondo que A seja uma fonte de luz e **r** a secção de um espelho plano, a trajetória AXB é a que segue um raio de luz emitido de A que, refletindo-se em **r**, atinge B (pois, como a Física ensina, o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão).

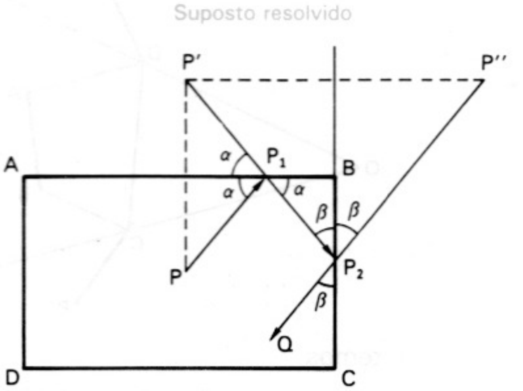
O mesmo ocorre com uma bola de bilhar que, lançada de A, faz uma tabela em **r** e atinge uma outra bola situada em B.

Esses exemplos mostram que a natureza é regida por uma espécie de "**lei de economia**", pois o raio de luz ou a bola de bilhar deslocam-se segundo **trajetórias mínimas**.

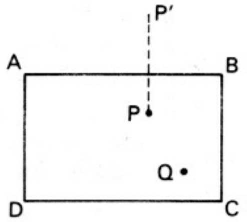
Exercícios

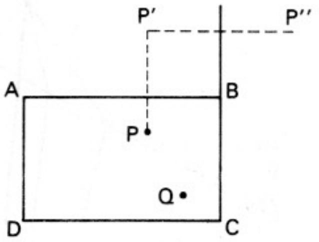
E2.**4** Numa mesa de bilhar ABCD há duas bolas, uma situada num ponto P e a outra num ponto Q. Determine a trajetória que deve seguir a bola situada em P, para que, após ter feito tabelas em $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente, atinja a bola situada em Q.

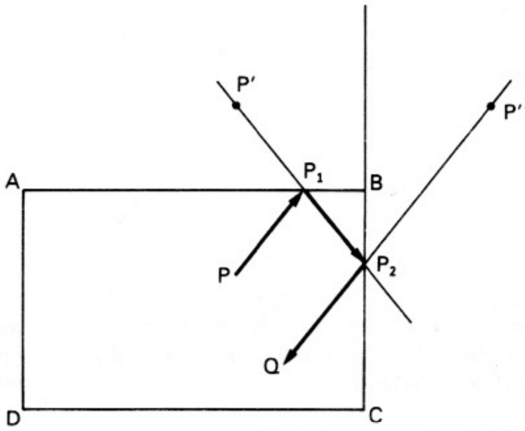




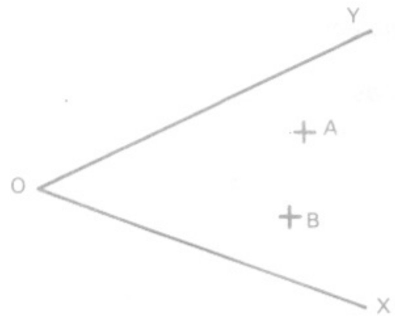
Resolução: Seja PP_1P_2Q a trajetória procurada e suponhamos o problema já resolvido. Como o ângulo com que a bola incide em $\overline{AB}$ é igual ao ângulo com que ela se reflete, o prolongamento de $\overline{P_2P_1}$ passa pelo ponto P', simétrico de P em relação a $\overline{AB}$. Pela mesma razão, o prolongamento de $\overline{QP_2}$ passa pelo ponto P'' simétrico de P' em relação a $\overline{BC}$. Assim, construindo os pontos P' e depois P'', a reta conduzida por Q e P'' corta $\overline{BC}$ em P_2, e a reta conduzida por P_2 e P' corta $\overline{AB}$ em P_1.

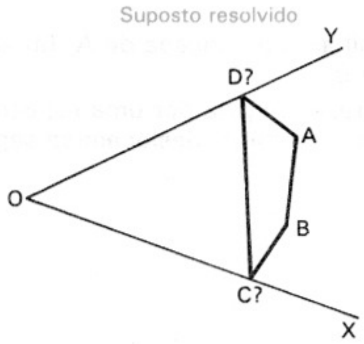




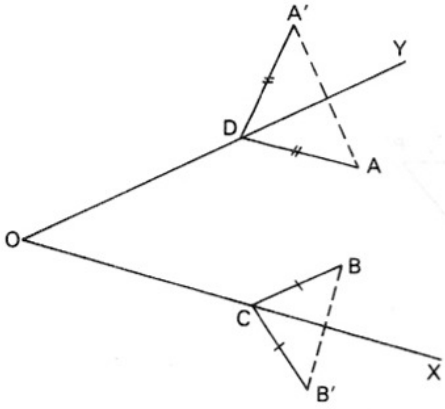


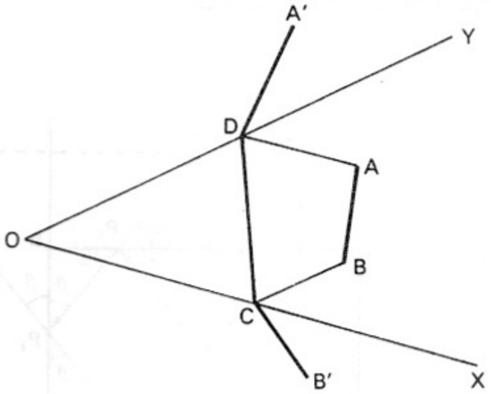
E2.5 São dados um ângulo XÔY e dois pontos A e B no seu interior. Determine em $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ os pontos C e D, respectivamente, de modo que o perímetro do quadrilátero ABCD seja mínimo.





Resolução: Sejam A′ o simétrico de A em relação a $\overrightarrow{OY}$ e B′ o simétrico de B em relação a $\overrightarrow{OX}$. Sendo C um ponto qualquer de $\overrightarrow{OX}$, e D um ponto qualquer de $\overrightarrow{OY}$, notemos, inicialmente, que A′D = AD e B′C = BC.



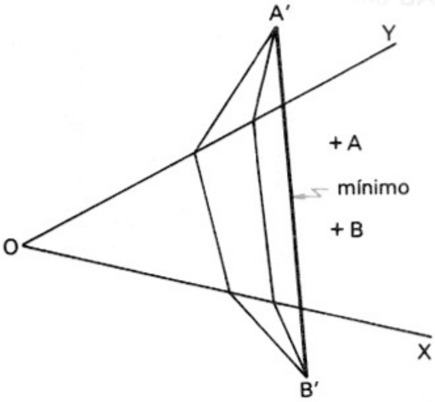


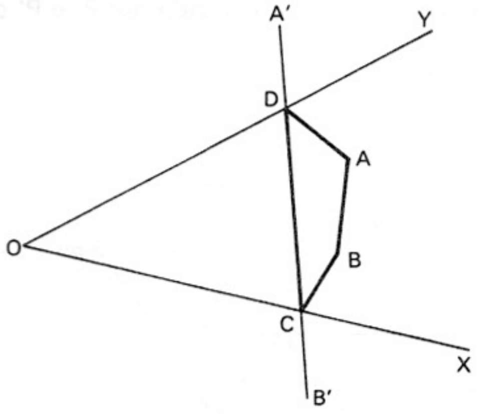
Desse modo, para o perímetro, temos:

$$AB + BC + CD + DA = AB + B'C + CD + DA'$$

E como AB é constante (uma vez que A e B são pontos fixos), o perímetro será mínimo quando B′C + CD + DA′ for mínimo. Ora, essa soma será mínima quando A′, D, C e B′ estiverem em linha reta.

Assim, para resolver o problema, construímos os pontos A′ e B′ e traçamos a reta passando por esses pontos. Essa reta intercepta os lados do ângulo nos pontos C e D procurados.





E2.6 Seja ABC um triângulo de lados a = 60 mm, b = 65 mm e c = 50 mm. Sobre o lado $\overline{BC}$ toma-se o ponto D distante 20 mm de B. Determine os pontos E e F sobre $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, de modo que o perímetro do triângulo DEF seja mínimo. Qual é o perímetro desse triângulo?

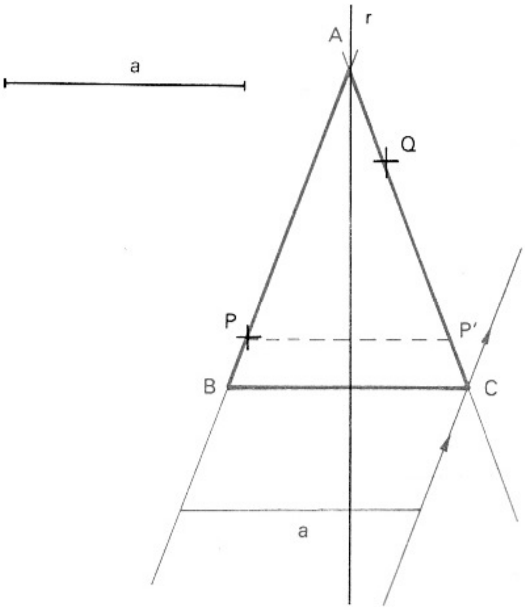
Sugestão: Tome os simétricos de D em relação a $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Resolva os exercícios de 16 a 21 do caderno de atividades.

Simetria axial

15 Construa um triângulo ABC isósceles de base $\overline{BC}$, dados os pontos P e Q dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, a reta **r** mediatriz de $\overline{BC}$ e o lado **a**.

Sugestão: Após as construções das retas suportes dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, pode-se introduzir o lado **a** por translação.



1.º) P'
2.º) reta QP'
3.º) reta AP
4.º) coloca-se **a** por translação

16 Na figura, F é uma fonte de luz, **r** um espelho plano e O um objeto. Determine a trajetória de um raio de luz que, emitido de F, se reflete em **r** e atinge O.

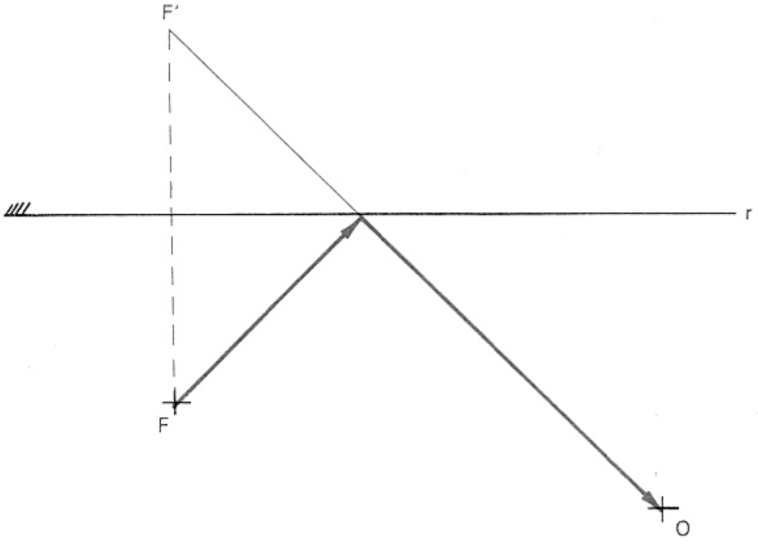


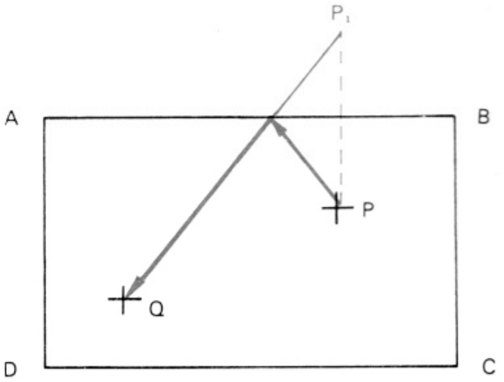
Figura auxiliar e anotações

Observação:
Aproveite para reforçar a definição de simetria axial: "Se P e P' são simétricos em relação a uma reta **r**, então **r** é a mediatriz do segmento PP'."

Sugestão:
Proponha: "Dados P, **r** e **a**, construir o triângulo eqüilátero de lado **a**." (Depois de determinar P', usar arco capaz.)

Nos exercícios de 17 a 19, o retângulo ABCD representa uma mesa de bilhar onde estão situadas duas bolas em P e Q. Determine a trajetória a ser percorrida pela bola em P, para que, após ter feito as tabelas indicadas, atinja a bola em Q.

17 Tabela em $\overline{AB}$.



18 Tabelas em $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$, respectivamente.

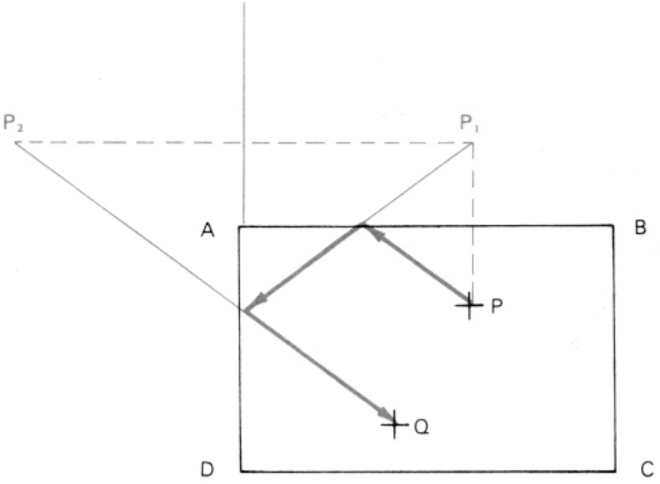
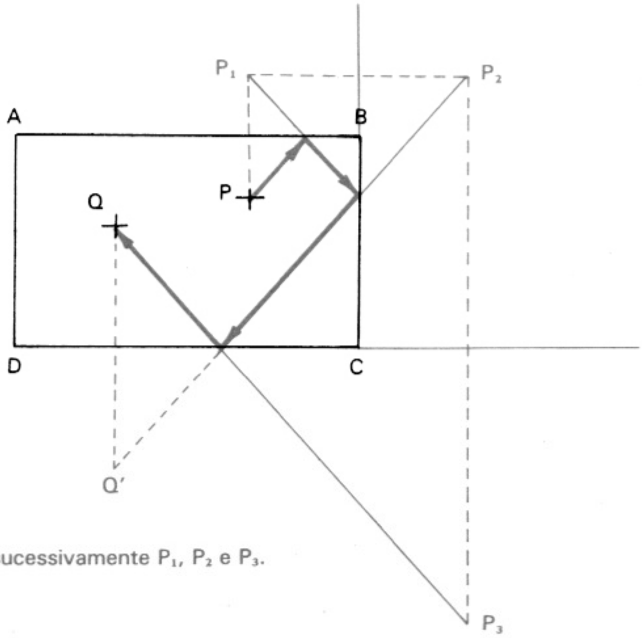


Figura auxiliar e anotações

19 Tabelas em $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.

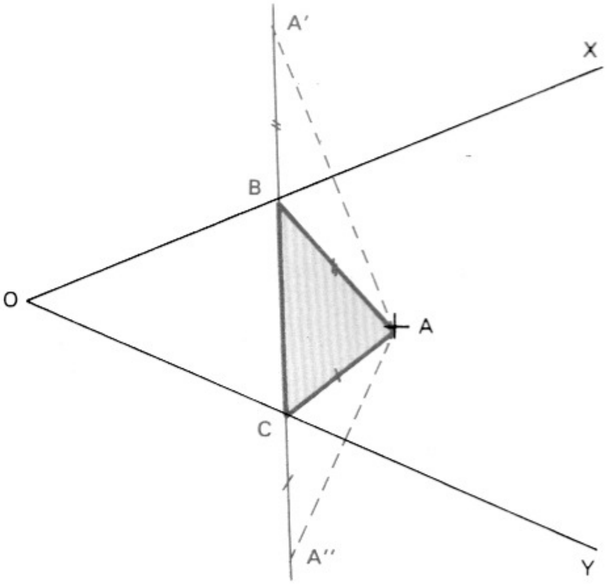
Observação:
Mostre ao aluno que, por problemas de espaço, seria mais conveniente obter P_1, P_2 e Q′.



Obtêm-se sucessivamente P_1, P_2 e P_3.

20 São dados um ângulo XÔY e um ponto A no seu interior. Determine os pontos B e C, em cada um dos lados do ângulo, de modo que o triângulo ABC tenha perímetro mínimo.

Sugestão:
Pergunte onde deveria estar situado o ponto A para que o triângulo ABC resultasse isósceles de base $\overline{BC}$.

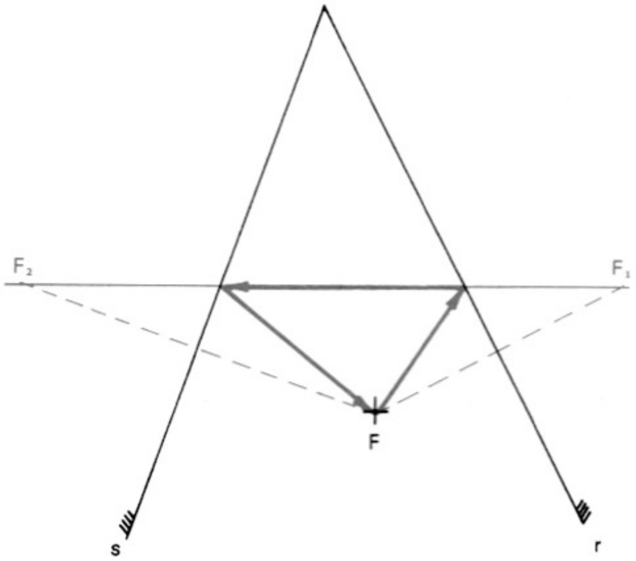


Simetria axial — Homotetia: multiplicação do ponto

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Insista no fato de que a luz caminha sempre por trajetórias mínimas.

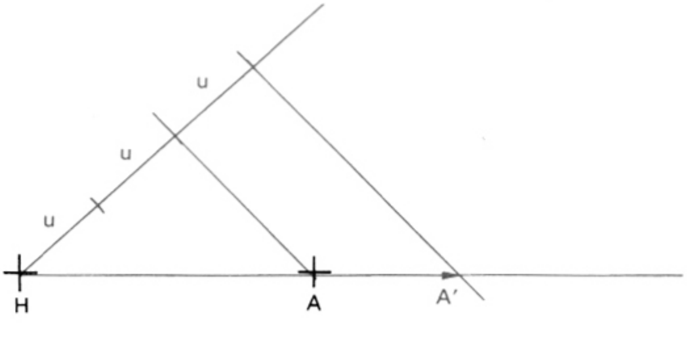
21 Na figura dada, **r** e **s** são dois espelhos planos e F é uma fonte de luz. Determine a trajetória que deve seguir um raio de luz emitido de F, de modo que ele se reflita em **r**, depois em **s**, e volte a atingir F.



Nos exercícios de 22 a 26, multiplique A por α com centro em H.

Observações:
1) É muito importante que o aluno domine completamente a multiplicação de um ponto, pois boa parte da homotetia depende quase que exclusivamente dessa operação.
2) Insista com o aluno que ele deve sempre se perguntar se o ponto A′, antes de ser obtido, ficará mais próximo ou mais afastado de H do que A.

22 $\alpha = \frac{3}{2}$



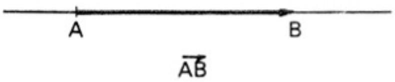
3

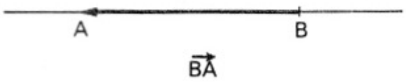
Homotetia

Multiplicação do ponto

No estudo da homotetia será importante a noção de **segmento orientado**. Assim, convém notar que um segmento AB pode ser orientado em dois sentidos opostos: de A para B ou de B para A. Um segmento de extremos A e B, orientado de A para B, será denotado pelo símbolo $\overrightarrow{AB}$.

Embora as notações de segmento orientado e semi-reta sejam as mesmas ($\overrightarrow{AB}$), isso não causará nenhum problema, pois fica claro quando nos referimos a uma e a outra.

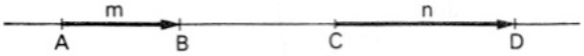




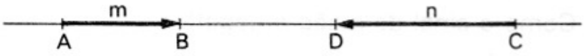
Os segmentos orientados permitem uma interpretação gráfica dos sinais algébricos da Matemática, isto é, sinal positivo e sinal negativo. Assim, **se numa mesma reta** forem dados dois segmentos AB e CD de comprimentos **m** e **n**, respectivamente, a razão entre os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ será:

- $+\frac{m}{n}$ se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ estiverem orientados no mesmo sentido;
- $-\frac{m}{n}$ se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ estiverem orientados em sentidos opostos.

Observe que só tem significado dizer que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm o mesmo sentido, ou têm sentidos contrários, quando $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm a mesma direção, isto é, estão contidos numa mesma reta ou em retas paralelas. Para as nossas necessidades, vamos considerá-las sempre numa mesma reta.



$$\boxed{\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = +\frac{m}{n}}$$



$$\boxed{\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}} = -\frac{m}{n}}$$

Dessa forma, observe que a razão sendo positiva significa apenas que os segmentos têm o mesmo sentido, e sendo a razão negativa, que eles têm sentidos contrários. Essa idéia simples será importante na definição seguinte.

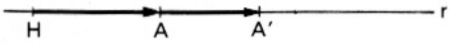
Definição

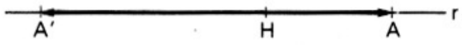
Sejam dados dois pontos distintos A e H sobre uma reta **r** e um número real $\alpha \neq 0$. **Multiplicar** o ponto A por α, **com centro em** H, é obter um ponto A' sobre **r**, tal que os segmentos orientados $\overrightarrow{HA}$ e $\overrightarrow{HA'}$ satisfaçam a condição:

$$\frac{\overrightarrow{HA'}}{\overrightarrow{HA}} = \alpha, \text{ ou ainda, } \overrightarrow{HA'} = \alpha \cdot \overrightarrow{HA}$$

O nome "multiplicação" justifica-se de forma mais destacada quando se usa a forma $\overrightarrow{HA'} = \alpha \cdot \overrightarrow{HA}$. Porém, geometricamente falando, será melhor escrever na forma $\frac{\overrightarrow{HA'}}{\overrightarrow{HA}} = \alpha$. Evidentemente, as duas formas traduzem a mesma idéia, mas estamos mais habituados a trabalhar geometricamente a forma de razão de segmentos.

Da definição decorre que, se $\alpha > 0$, $\overrightarrow{HA}$ e $\overrightarrow{HA'}$ têm o mesmo sentido e se $\alpha < 0$, têm sentidos opostos.





$\overrightarrow{HA'} = \alpha \cdot \overrightarrow{HA}\ (\alpha > 0)$

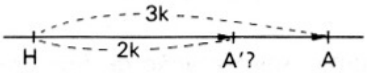
$\overrightarrow{HA'} = \alpha \cdot \overrightarrow{HA}\ (\alpha < 0)$

Exercícios

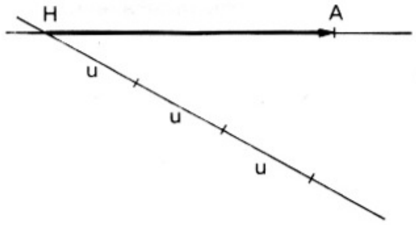
E3.1 Dados os pontos A e H, multiplicar A por α nos seguintes casos, com centro em H:

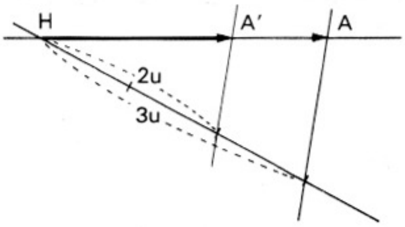
Suposto resolvido

a) $\alpha = \frac{2}{3}$



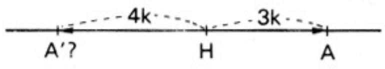
Resolução: Queremos $\frac{\overrightarrow{HA'}}{\overrightarrow{HA}} = \frac{2}{3}$. Como o sinal da razão é positivo, os segmentos terão o mesmo sentido. A multiplicação se faz facilmente com o auxílio do teorema de Tales.



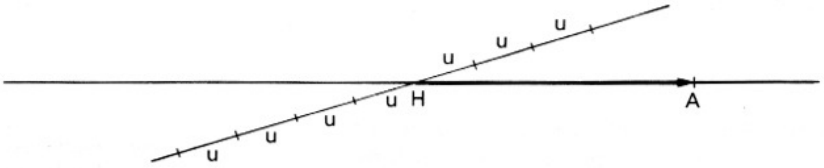


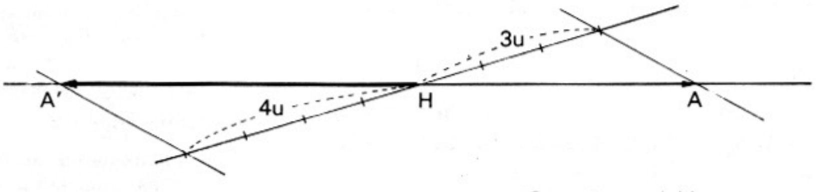
Suposto resolvido

b) $\alpha = -\frac{4}{3}$



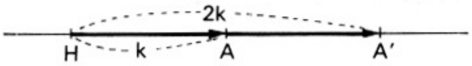
Resolução: Queremos $\frac{\overrightarrow{HA'}}{\overrightarrow{HA}} = -\frac{4}{3}$. Como o sinal da razão é negativo, os segmentos terão sentidos contrários.



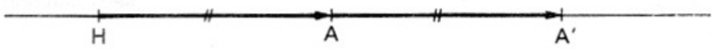


Suposto resolvido

c) $\alpha = 2$



Resolução: Queremos $\frac{\overrightarrow{HA'}}{\overrightarrow{HA}} = 2$. (O caso da multiplicação por um número inteiro é menos trabalhoso, já que dispensa a utilização do teorema de Tales. Nesse exercício, nota-se que HA' é o dobro de HA.)



Observação: Para não haver enganos quando se pede para multiplicar um ponto A, com centro em H, por um número α, convém observar sempre que:

1.º) $\frac{\overrightarrow{HA'}}{\overrightarrow{HA}} = \alpha$, isto é, $\overrightarrow{HA'}$ está no numerador;

2.º) se $|\alpha| > 1$, então A' estará mais afastado de H do que está A de H;

3.º) Se $|\alpha| < 1$, então A' estará mais próximo de H do que está A de H.

2 Suponha que sejam dados dois pontos distintos A e H, e que se queira multiplicar A por α com centro em H para obter A'. Dizer, nos seguintes casos, se A' ficará mais afastado ou mais próximo do centro H do que A está de H.

a) $\alpha = \frac{3}{7}$

b) $\alpha = \frac{5}{2}$

c) $\alpha = \frac{-7}{4}$

d) $\alpha = 2$

e) $\alpha = -2$

f) $\alpha = \frac{-1}{5}$

Resolva os exercícios de 22 a 26 do caderno de atividades.

3 Dados dois pontos A e H distintos, multiplica-se A por $\alpha = -1$ com centro em H, obtendo-se A'. O que é H no segmento AA'?

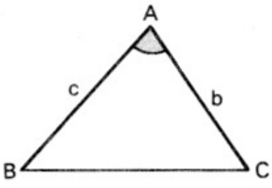
Uma propriedade importante

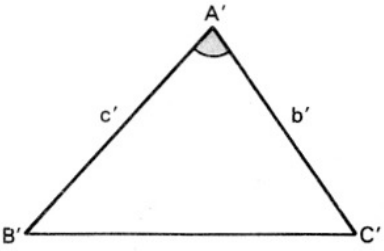
Já vimos anteriormente, no volume 1, que para dois triângulos serem semelhantes é suficiente que dois ângulos de um sejam, respectivamente, congruentes a dois ângulos do outro. É o critério AA de semelhança. Pois bem, para compreendermos a propriedade que será estudada, vamos primeiramente apresentar um outro critério de semelhança de triângulos.

Critério LAL

LAL deve ser lido: "lado, ângulo, lado". (Não confundir com o critério LAL de congruência.)

Se dois lados de um triângulo são proporcionais a dois lados de outro e, além disso, os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.





Se $\begin{cases} \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \\ \text{e} \\ \measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{A}' \end{cases}$ Então $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Observe que quando se conclui que os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes, fica também determinado que:

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

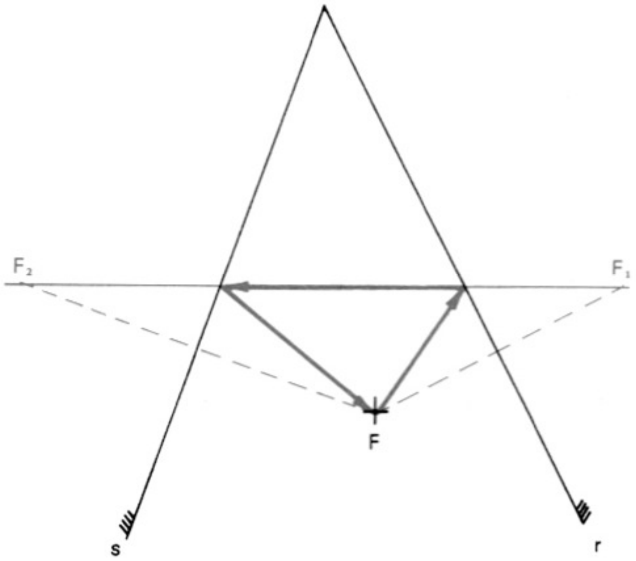
$\measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{B}'$ e $\measuredangle \hat{C} \equiv \measuredangle \hat{C}'$

Simetria axial — Homotetia: multiplicação do ponto

Figura auxiliar e anotações

21 Na figura dada, **r** e **s** são dois espelhos planos e F é uma fonte de luz. Determine a trajetória que deve seguir um raio de luz emitido de F, de modo que ele se reflita em **r**, depois em **s**, e volte a atingir F.

Observação:
Insista no fato de que a luz caminha sempre por trajetórias mínimas.

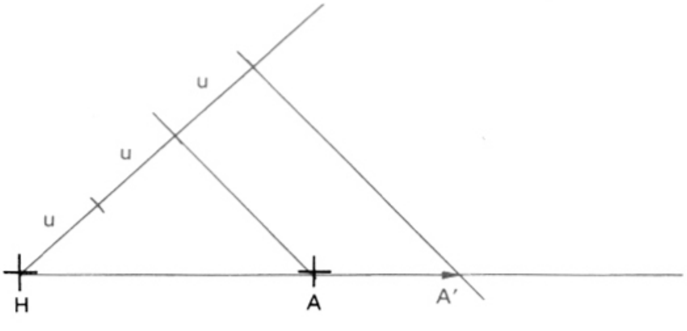


Nos exercícios de 22 a 26, multiplique A por α com centro em H.

Observações:

1) É muito importante que o aluno domine completamente a multiplicação de um ponto, pois boa parte da homotetia depende quase que exclusivamente dessa operação.
2) Insista com o aluno que ele deve sempre se perguntar se o ponto A′, antes de ser obtido, ficará mais próximo ou mais afastado de H do que A.

22 $\alpha = \dfrac{3}{2}$

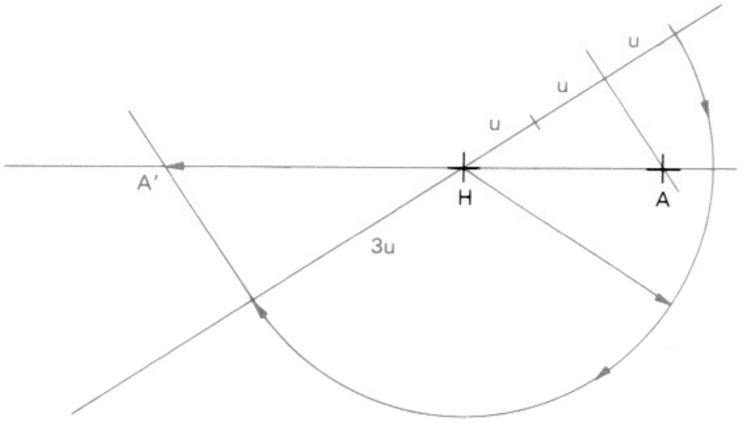


Homotetia: multiplicação do ponto

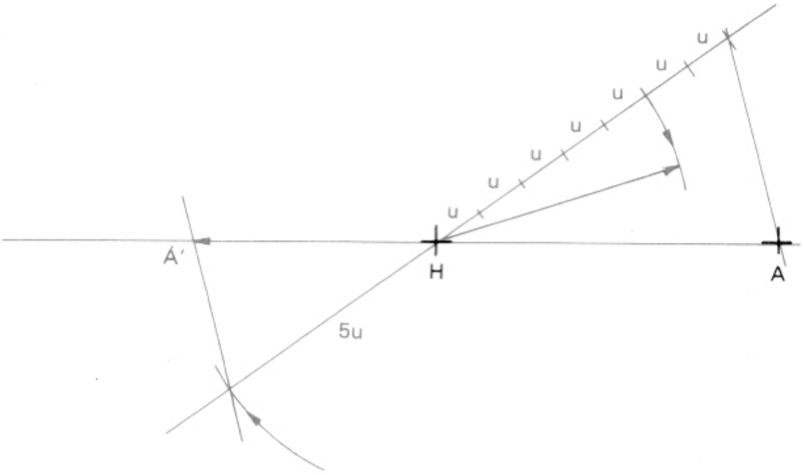
Figura auxiliar e anotações

Observação:
Insista que o sinal negativo indica apenas que os segmentos HA e HA′ terão sentidos contrários.

23 $\alpha = -\frac{3}{2}$



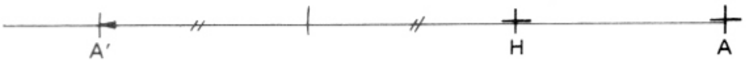
24 $\alpha = -\frac{5}{7}$


u
u
u
u
u
u
u
A′
H
A
5u

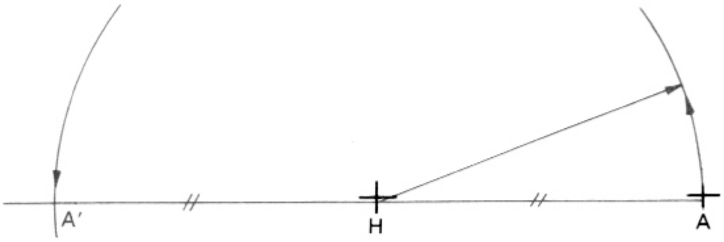
Homotetia: multiplicação do ponto

Figura auxiliar e anotações

25 $\alpha = -2$

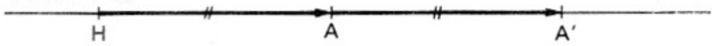


26 $\alpha = -1$



Observação:
Convém ir preparando o aluno para que ele identifique bem a multiplicação por -1, já que essa situação aparecerá com freqüência mais adiante. Assim, vale a pena ele olhar para um segmento de reta e "enxergar" no ponto médio o centro de homotetia dos extremos, com razão $k = -1$.

Resolução: Queremos $\frac{\overrightarrow{HA'}}{\overrightarrow{HA}} = 2$. (O caso da multiplicação por um número inteiro é menos trabalhoso, já que dispensa a utilização do teorema de Tales. Nesse exercício, nota-se que HA' é o dobro de HA.)



Observação: Para não haver enganos quando se pede para multiplicar um ponto A, com centro em H, por um número α, convém observar sempre que:

1.º) $\frac{\overrightarrow{HA'}}{\overrightarrow{HA}} = \alpha$, isto é, $\overrightarrow{HA'}$ está no numerador;

2.º) se $|\alpha| > 1$, então A' estará mais afastado de H do que está A de H;

3.º) Se $|\alpha| < 1$, então A' estará mais próximo de H do que está A de H.

E3.**2** Suponha que sejam dados dois pontos distintos A e H, e que se queira multiplicar A por α com centro em H para obter A'. Dizer, nos seguintes casos, se A' ficará mais afastado ou mais próximo do centro H do que A está de H.

a) $\alpha = \frac{3}{7}$
b) $\alpha = \frac{5}{2}$
c) $\alpha = \frac{-7}{4}$
d) $\alpha = 2$
e) $\alpha = -2$
f) $\alpha = \frac{-1}{5}$

Resolva os exercícios de 22 a 26 do caderno de atividades.

E3.**3** Dados dois pontos A e H distintos, multiplica-se A por $\alpha = -1$ com centro em H, obtendo-se A'. O que é H no segmento AA'?

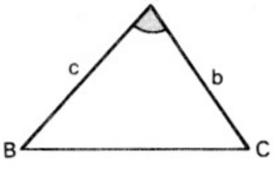
Uma propriedade importante

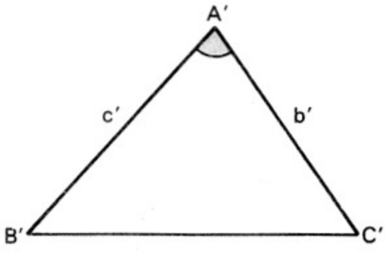
Já vimos anteriormente, no volume 1, que para dois triângulos serem semelhantes é suficiente que dois ângulos de um sejam, respectivamente, congruentes a dois ângulos do outro. É o critério AA de semelhança. Pois bem, para compreendermos a propriedade que será estudada, vamos primeiramente apresentar um outro critério de semelhança de triângulos.

Critério LAL

Se dois lados de um triângulo são proporcionais a dois lados de outro e, além disso, os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

LAL deve ser lido: "lado, ângulo, lado". (Não confundir com o critério LAL de congruência.)





$$\text{Se} \begin{cases} \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \\ \text{e} \\ \measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{A}' \end{cases} \quad \text{Então } \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Observe que quando se conclui que os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes, fica também determinado que:

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

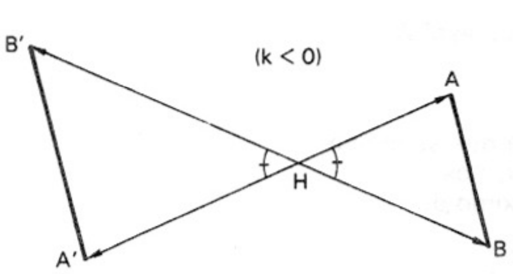
$\measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{B}'$ e $\measuredangle \hat{C} \equiv \measuredangle \hat{C}'$

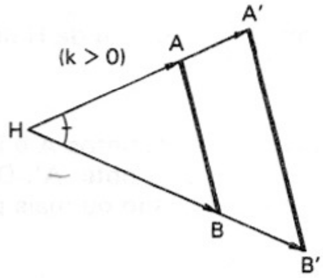
Esse critério de semelhança justiça a propriedade seguinte:

Propriedade

Multiplicando dois pontos A e B por um mesmo número real $k \neq 0$ e com o mesmo centro H, obtêm-se dois pontos A' e B', tais que $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ e $\frac{A'B'}{AB} = |k|$.

Vamos trabalhar com o módulo de k pois não nos interessam, agora, os sinais algébricos das razões entre os segmentos orientados, mas sim as razões entre os seus comprimentos.





Tanto para k < 0 quanto para k > 0 os triângulos HAB e HA'B' são semelhantes (pelo critério LAL), pois:

$$\frac{HA'}{HA} = \frac{HB'}{HB} = |k| \text{ e } \sphericalangle A\hat{H}B \equiv \sphericalangle A'\hat{H}B'$$

Dessa semelhança, já se conclui que

$$\frac{A'B'}{AB} = |k|$$

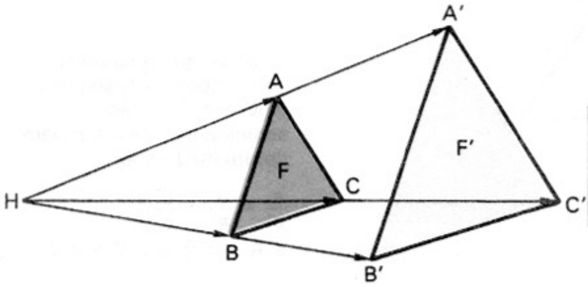
Como nesses triângulos os ângulos A e A' são congruentes, deduz-se que $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$.

Figuras homotéticas

Definição

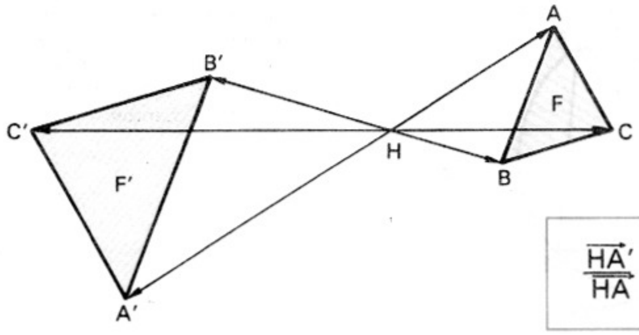
Sejam dados um ponto H e uma **figura F**. Os pontos resultantes das multiplicações de todos os pontos de F por um mesmo número $k \neq 0$, com centro em H, constituem uma figura F'. Dizemos, nesse caso, que F e F' são **figuras homotéticas**.

Homotetia direta (k > 0)



$$\frac{\overrightarrow{HA'}}{\overrightarrow{HA}} = \frac{\overrightarrow{HB'}}{\overrightarrow{HB}} = \frac{\overrightarrow{HC'}}{\overrightarrow{HC}} = \ldots = k$$

Homotetia inversa ($k < 0$)



$$\frac{\overrightarrow{HA'}}{\overrightarrow{HA}} = \frac{\overrightarrow{HB'}}{\overrightarrow{HB}} = \frac{\overrightarrow{HC'}}{\overrightarrow{HC}} = \ldots = k$$

Observações:

- Dizemos que a figura F' é uma **transformação** da figura F **por homotetia.**
- O centro H é denominado **centro de homotetia.**
- O número **k** é chamado **razão de homotetia** da figura F' para figura F.
- Se $k > 0$, a homotetia é chamada **direta** e se $k < 0$, a homotetia é chamada **inversa.**
- Se um ponto A de F transforma-se no ponto A' de F', então A e A' são chamados **pontos homólogos.**
- Sendo A e A' pontos homólogos de F e F', os segmentos orientados $\overrightarrow{HA}$ e $\overrightarrow{HA'}$ são chamados **raios homólogos de homotetia.**

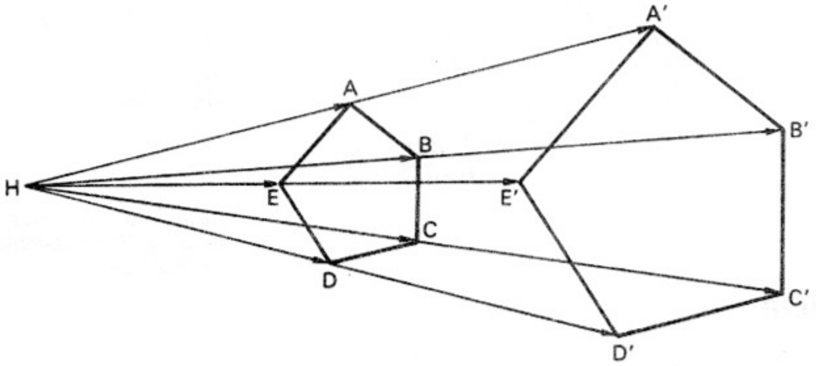
Do **critério LAL**, já examinado, decorre que se os pontos A, B e C transformam-se nos pontos A', B' e C' numa homotetia de razão **k**, então:

1.º) $\begin{cases} \overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \\ \overline{BC} \parallel \overline{B'C'} \\ \overline{AC} \parallel \overline{A'C'} \end{cases}$ 2.º) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} = |k|$

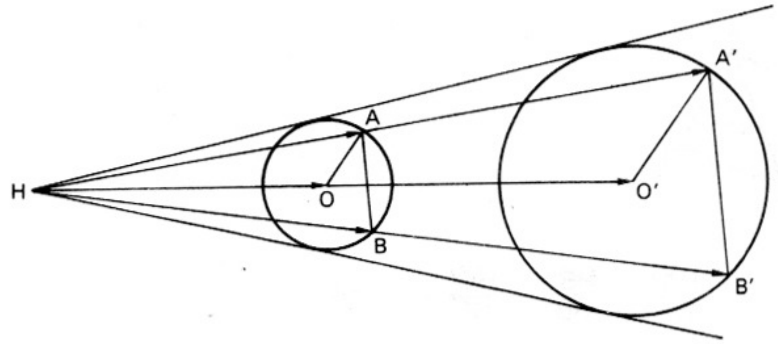
Isto é, ABC e A'B'C' são triângulos semelhantes e estão dispostos de modo que os seus lados homólogos são paralelos. Assim, podemos concluir que a homotetia é uma transformação que mantém congruentes os ângulos homólogos e mantém proporcionais os elementos lineares homólogos, quaisquer que sejam as figuras homotéticas. Disso tudo podemos enunciar que:

Propriedade

Duas figuras homotéticas são semelhantes e apresentam seus elementos lineares homólogos paralelos.



$ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ e $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$, $\overline{CD} \parallel \overline{C'D'}$ ...



$\overline{OA} \parallel \overline{O'A'}$, $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ ...

Por essa razão, até praticamente o início desse século, as figuras homotéticas eram chamadas, por alguns autores, de **figuras semelhantes semelhantemente dispostas**.

As figuras homotéticas que interessam aos nossos estudos são aquelas constituídas de retas (ou segmento de retas) e de circunferências (ou arcos de circunferências).

Quando construímos uma homotética de uma figura dada, dizemos que estamos multiplicando a figura dada. Vamos então estudar, particularmente, como multiplicar a reta e a circunferência.

Nota histórica: Um primeiro estudo das figuras semelhantes é comumente atribuído a Tales de Mileto (±600 a.C.). A consideração das figuras não somente semelhantes mas também semelhantemente colocadas foi feita, pela primeira vez, por Poncelet, em 1822. Enfim, a denominação de figuras homotéticas para estas últimas foi dada por Chasles, em 1827.

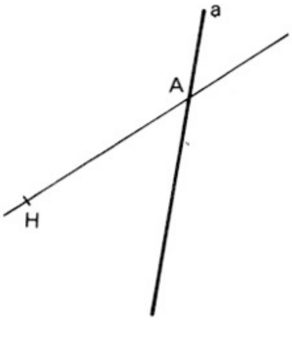
Multiplicação da reta

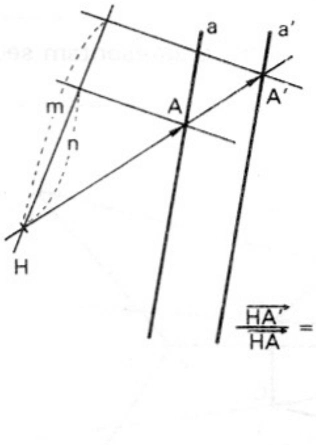
Sejam dados um ponto H, uma reta **a** e os segmentos **m** e **n**. Para multiplicar a reta **a** por $\frac{m}{n}$, com centro de homotetia em H, basta fazer o seguinte:

1.º) traça-se uma reta qualquer por H interceptando a reta **a** no ponto A;

2.º) multiplica-se A, com centro em H, por $\frac{m}{n}$, obtendo o ponto A';

3.º) por A' traça-se a reta a' paralela à reta **a**.

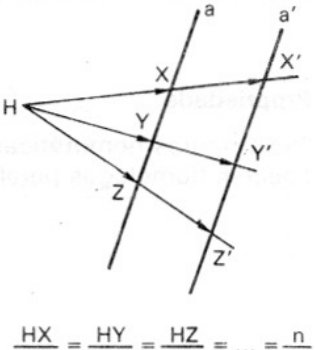




$$\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}} = \frac{m}{n}$$

É muito importante notar que uma vez obtida a reta a', qualquer reta conduzida por H, interceptando **a** e a' nos pontos X e X', determina os segmentos HX e HX' tais que:

$$\frac{HX}{HX'} = \frac{n}{m}$$



$$\frac{HX}{HX'} = \frac{HY}{HY'} = \frac{HZ}{HZ'} = \dots = \frac{n}{m}$$

Resolva os exercícios de 27 a 30 do caderno de atividades.

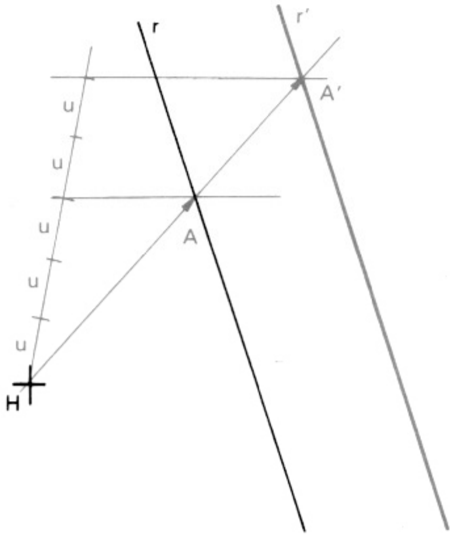
Multiplicação da circunferência

Sejam dados um ponto H, uma circunferência λ e os segmentos **m** e **n**. Para multiplicar a circunferência λ por $\frac{m}{n}$ com centro em H, fazemos o seguinte:

Homotetia: multiplicação da reta

Para os exercícios de 27 a 30. Com centro de homotetia em H, multiplique a reta **r** por **k** nos seguintes casos.

27 $k = \frac{5}{3}$



28 $k = \frac{3}{5}$

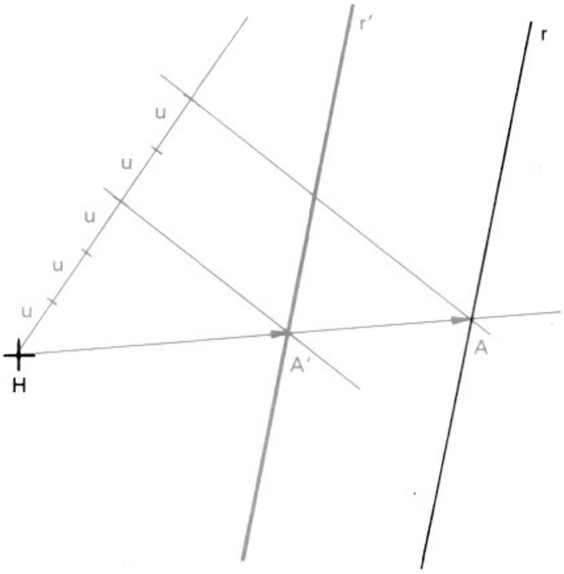


Figura auxiliar e anotações

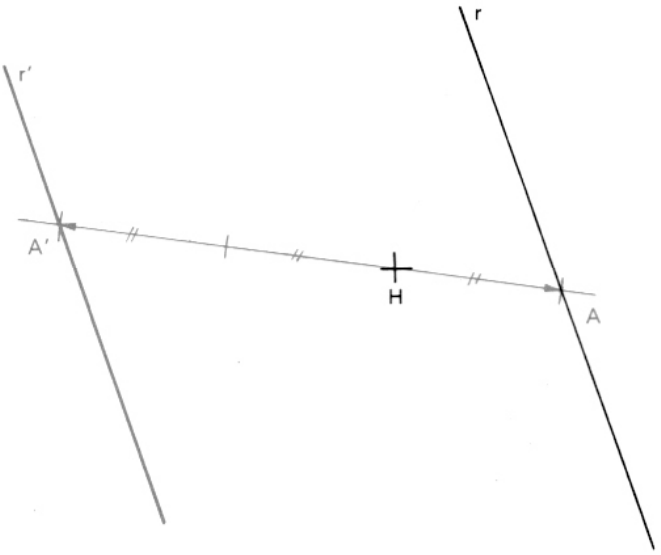
Observação:
Conscientize o aluno de que essa série de exercícios tem a finalidade de deixá-lo bem familiarizado com a parte operacional da homotetia, para que mais adiante ele possa se preocupar apenas com as teorias que serão estudadas.

Observação:
Insista bastante que a homotetia mantém os elementos lineares homólogos paralelos.

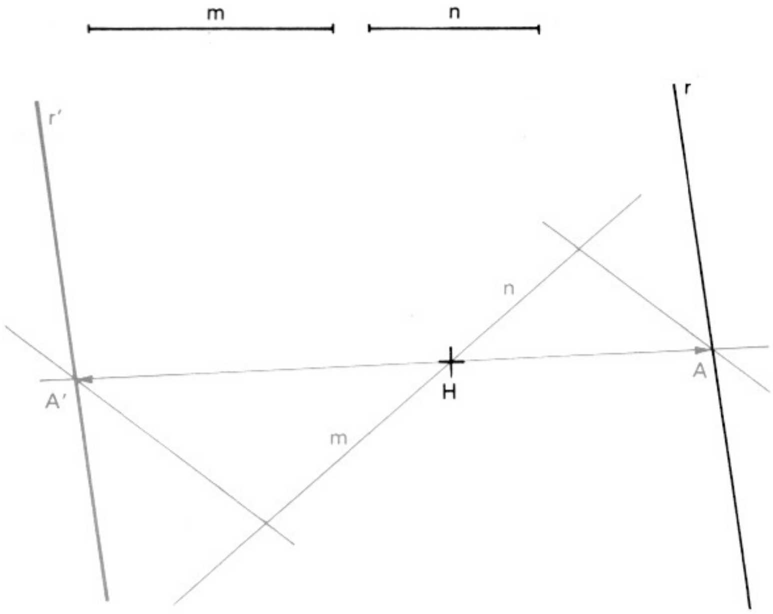
Homotetia: multiplicação da reta

Figura auxiliar e anotações

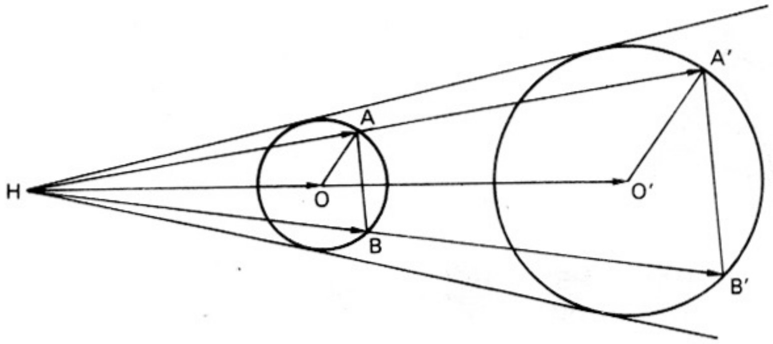
29 $k = -2$



30 $k = -\frac{m}{n}$



Sugestão:
Antes de o aluno ter feito a multiplicação pedida, pergunte-lhe se a nova reta ficará mais próxima ou mais afastada de H do que a reta dada.



$\overline{OA} \parallel \overline{O'A'}$, $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ ...

Por essa razão, até praticamente o início desse século, as figuras homotéticas eram chamadas, por alguns autores, de **figuras semelhantes semelhantemente dispostas**.

As figuras homotéticas que interessam aos nossos estudos são aquelas constituídas de retas (ou segmento de retas) e de circunferências (ou arcos de circunferências).

Quando construímos uma homotética de uma figura dada, dizemos que estamos multiplicando a figura dada. Vamos então estudar, particularmente, como multiplicar a reta e a circunferência.

Nota histórica: Um primeiro estudo das figuras semelhantes é comumente atribuído a Tales de Mileto (±600 a.C.). A consideração das figuras não somente semelhantes mas também semelhantemente colocadas foi feita, pela primeira vez, por Poncelet, em 1822. Enfim, a denominação de figuras homotéticas para estas últimas foi dada por Chasles, em 1827.

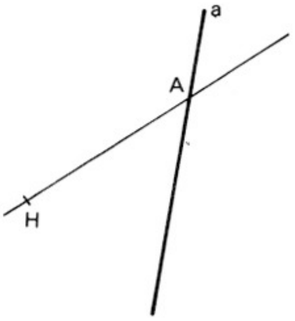
Multiplicação da reta

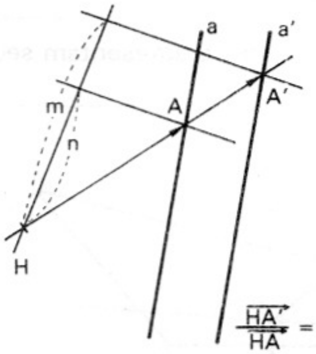
Sejam dados um ponto H, uma reta **a** e os segmentos **m** e **n**. Para multiplicar a reta **a** por $\frac{m}{n}$, com centro de homotetia em H, basta fazer o seguinte:

1.º) traça-se uma reta qualquer por H interceptando a reta **a** no ponto A;

2.º) multiplica-se A, com centro em H, por $\frac{m}{n}$, obtendo o ponto A';

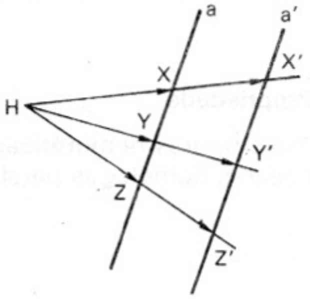
3.º) por A' traça-se a reta a' paralela à reta **a**.





$\frac{\overline{HA'}}{\overline{HA}} = \frac{m}{n}$

É muito importante notar que uma vez obtida a reta a', qualquer reta conduzida por H, interceptando **a** e a' nos pontos X e X', determina os segmentos HX e HX' tais que: $\frac{HX}{HX'} = \frac{n}{m}$



$\frac{HX}{HX'} = \frac{HY}{HY'} = \frac{HZ}{HZ'} = \ldots = \frac{n}{m}$

Resolva os exercícios de 27 a 30 do caderno de atividades.

Multiplicação da circunferência

Sejam dados um ponto H, uma circunferência λ e os segmentos **m** e **n**. Para multiplicar a circunferência λ por $\frac{m}{n}$ com centro em H, fazemos o seguinte:

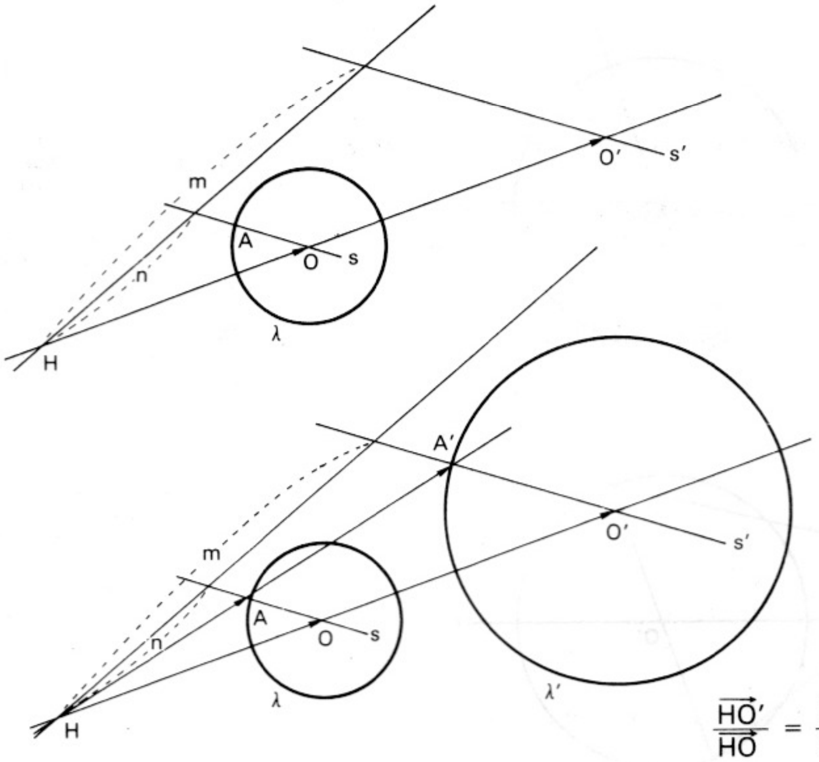
1.º) multiplica-se o centro O de λ por $\frac{m}{n}$, obtendo O';

2.º) multiplica-se um ponto A qualquer de λ por $\frac{m}{n}$, obtendo A';

3.º) descreve-se a circunferência λ com centro O passando por A'.

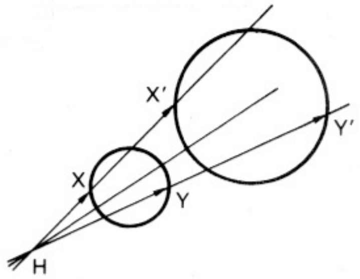
A circunferência λ' é a homotética que se procurava.

Observação: Para multiplicar o centro por $\frac{m}{n}$ somos obrigados a traçar as retas **s** e **s'** das figuras seguintes. Já que podemos, em seguida, escolher um ponto A qualquer de λ para multiplicar por $\frac{m}{n}$, é extremamente conveniente escolher A na intersecção de **s** com λ, pois a reta que passa por H e A, nesse caso, encontra s' no ponto A', homólogo de A.



$$\frac{\overrightarrow{HO'}}{\overrightarrow{HO}} = \frac{\overrightarrow{HA'}}{\overrightarrow{HA}} = \frac{m}{n}$$

É válida a mesma observação feita para as retas.

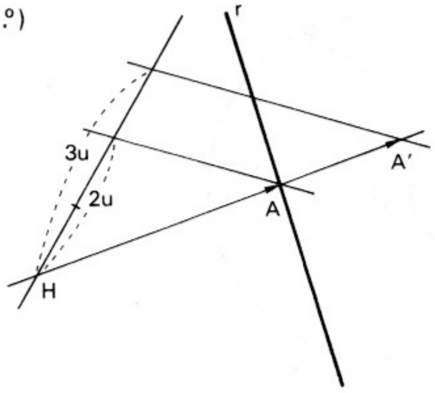


$$\frac{HX}{HX'} = \frac{HY}{HY'} = \ldots = \frac{n}{m}$$

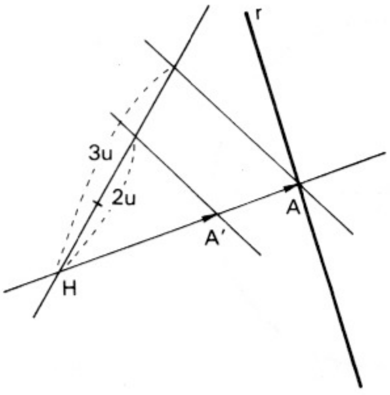
Observação: Antes de multiplicar uma figura é aconselhável analisar se a homotética procurada ficará mais próxima ou mais afastada de H do que está a figura dada. Isso evita enganos.

Exemplo: Multiplicar a reta **r** por $k = \frac{2}{3}$ com centro de homotetia em H. Sabemos que basta multiplicar um ponto A de **r**, obtendo o ponto homólogo A' e traçar por esse último a paralela a **r**. Porém, pode surgir a seguinte dúvida: Qual das formas abaixo deve ser usada para obter A'?

1.º)



2.º)

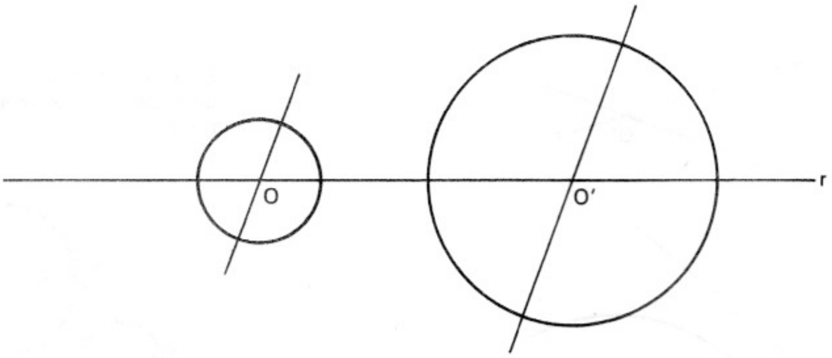


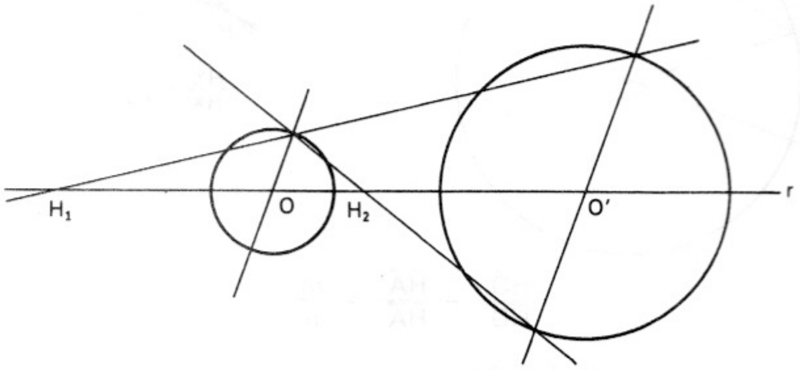
Ora, como a razão $k = \frac{2}{3}$ tem módulo menor do que 1, a homotética procurada deve ficar mais próxima de H do que está a reta **r** dada. Portanto, a segunda forma é a correta. Na primeira, estaríamos multiplicando a reta **r** por $k = \frac{3}{2}$.

Resolva os exercícios de 31 a 35 do caderno de atividades.

Observação: Duas circunferências num plano são sempre homotéticas. Para determinar os centros de homotetia (direta e inversa) de duas circunferências dadas, basta realizar as seguintes construções:

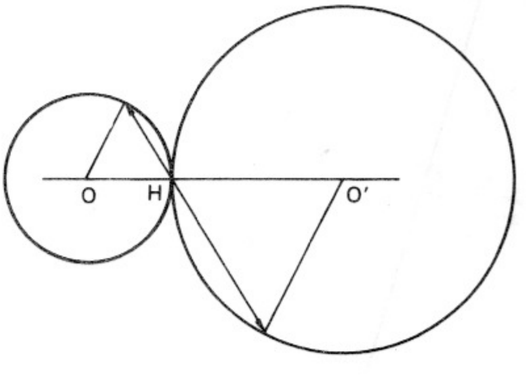
1.º) traça-se a reta **r** pelos centros das circunferências;
2.º) traçam-se dois **diâmetros paralelos** quaisquer (não contidos em **r**), um em cada circunferência;
3.º) as retas conduzidas pelas extremidades desses diâmetros interceptam **r** no centro da homotetia.

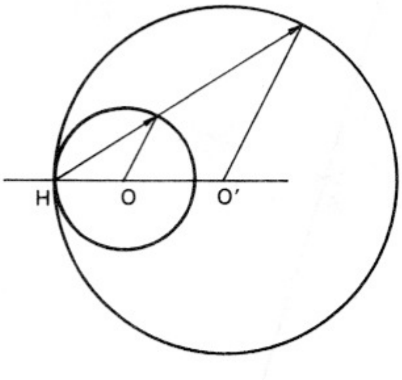




H_1 é o centro de homotetia direta e H_2 o de inversa.

Em particular, se as circunferências são tangentes, o ponto de tangência é um centro de homotetia (inversa se forem tangentes exteriores e direta se forem tangentes interiores).





Homotetia: multiplicação da circunferência

Para os exercícios de 31 a 35. Com centro de homotetia em H, multiplique a circunferência λ por **k** nos seguintes casos:

31 k = $\frac{4}{5}$

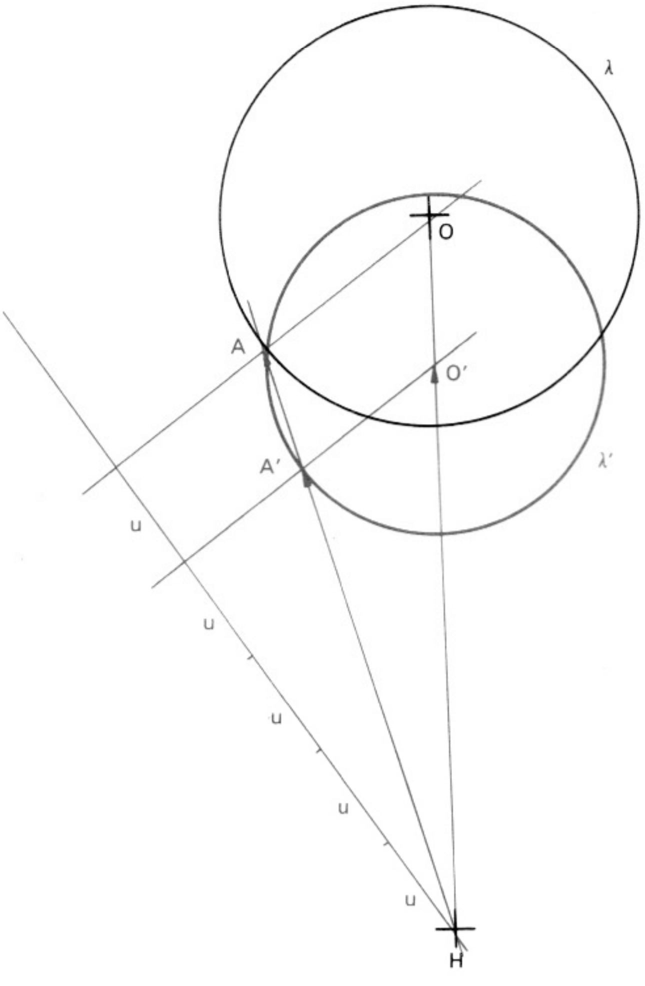
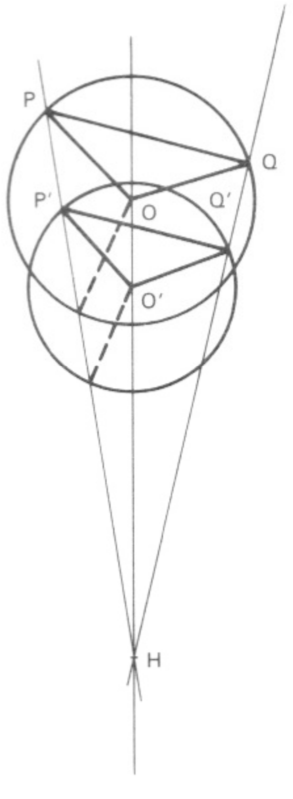


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Após o aluno ter efetuado a multiplicação pedida, insista com ele que se uma reta qualquer for conduzida por H, interceptando as circunferências, ela o fará em pontos homólogos. Além disso, reforce o fato de os elementos lineares homólogos serem paralelos.



Homotetia: multiplicação da circunferência

32 $k = -\frac{3}{2}$

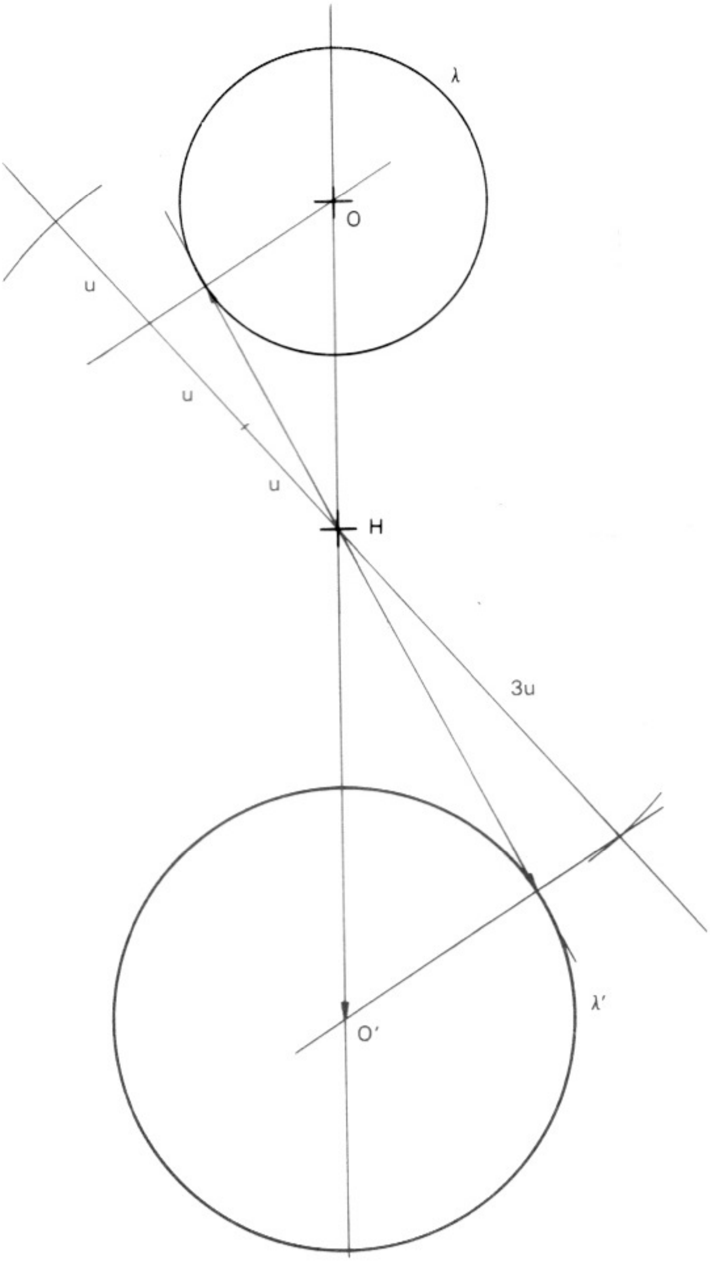
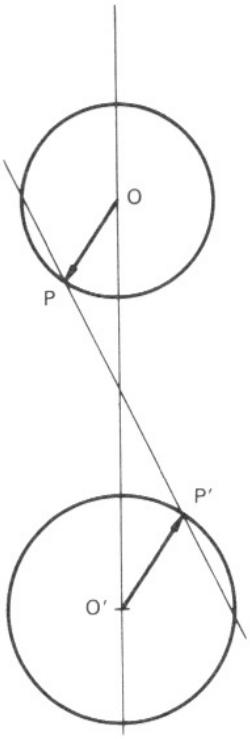


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Faça um comentário análogo ao que foi feito no exercício anterior, mas mostre que os elementos lineares homólogos, embora continuem paralelos, possuem sentidos contrários.

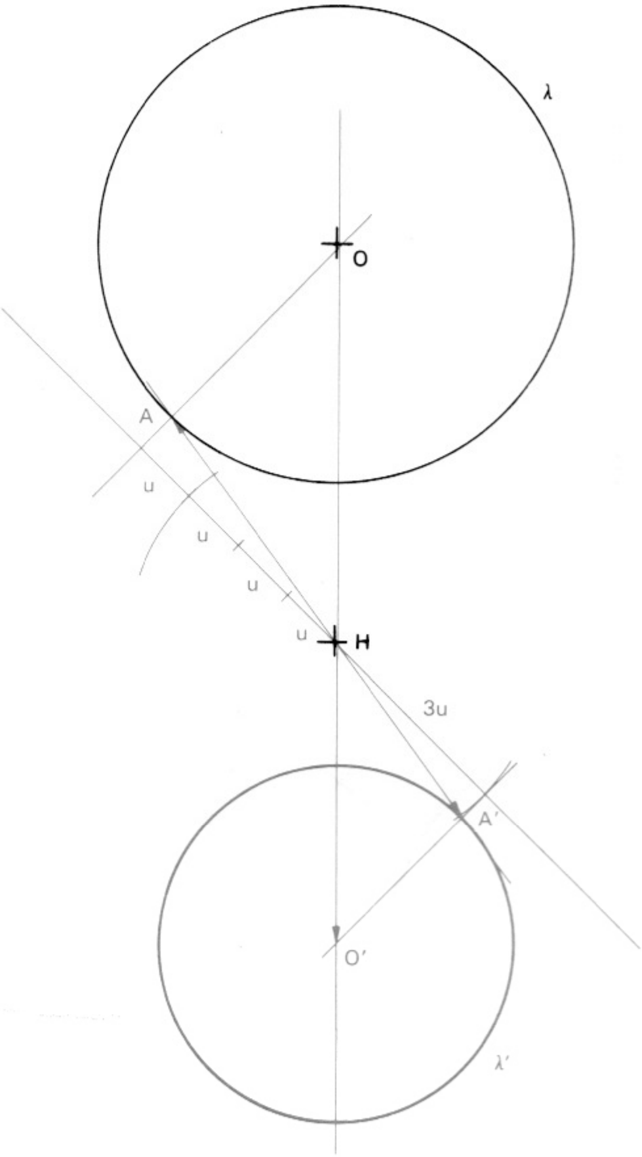


Homotetia: multiplicação da circunferência

33 $k = -\frac{3}{4}$

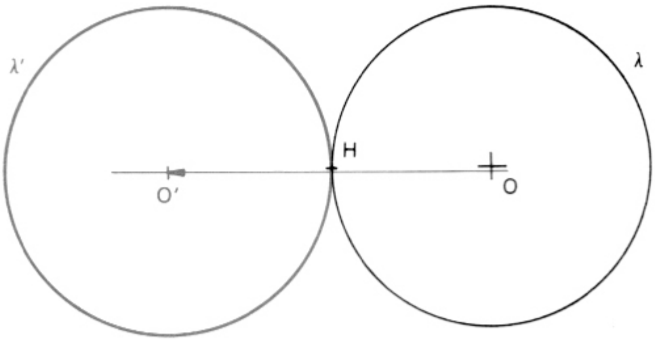
Figura auxiliar e anotações

Sugestão:
Proponha o problema inverso, isto é, dadas duas circunferências, obter os centros de homotetia direta e invers



Homotetia: multiplicação da circunferência

34 k = −1



35 $k = \frac{1}{2}$

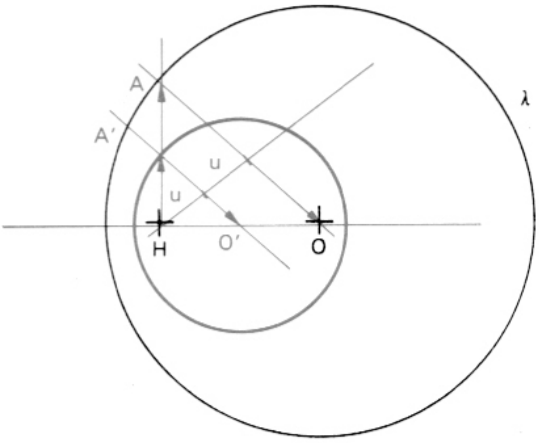


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Comente que, quando H pertence à circunferência, a homotética será sempre tangente a ela em H.

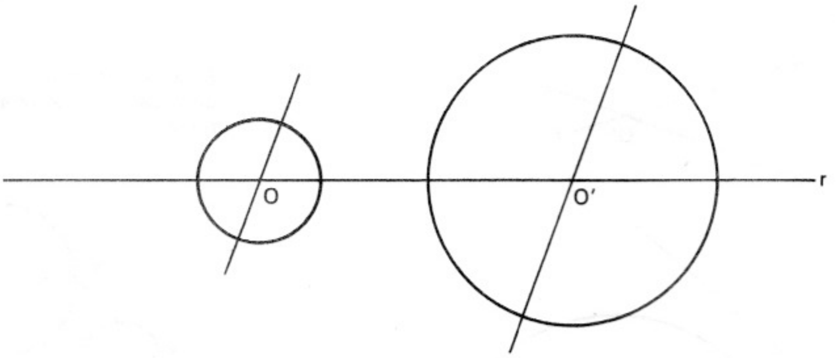
Sugestão:
Proponha o mesmo problema para $k = -\frac{1}{2}$.

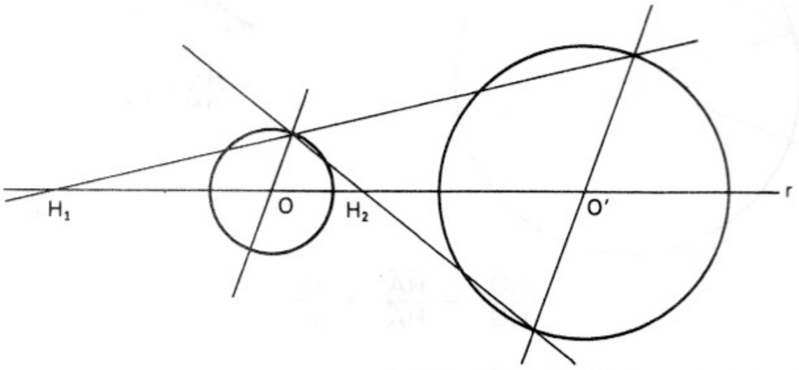
Ora, como a razão $k = \frac{2}{3}$ tem módulo menor do que 1, a homotética procurada deve ficar mais próxima de H do que está a reta **r** dada. Portanto, a segunda forma é a correta. Na primeira, estaríamos multiplicando a reta **r** por $k = \frac{3}{2}$.

Resolva os exercícios de 31 a 35 do caderno de atividades.

Observação: Duas circunferências num plano são sempre homotéticas. Para determinar os centros de homotetia (direta e inversa) de duas circunferências dadas, basta realizar as seguintes construções:

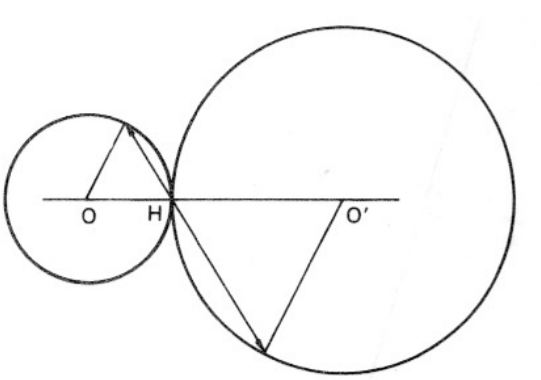
1.º) traça-se a reta **r** pelos centros das circunferências;
2.º) traçam-se dois **diâmetros paralelos** quaisquer (não contidos em **r**), um em cada circunferência;
3.º) as retas conduzidas pelas extremidades desses diâmetros interceptam **r** no centro da homotetia.

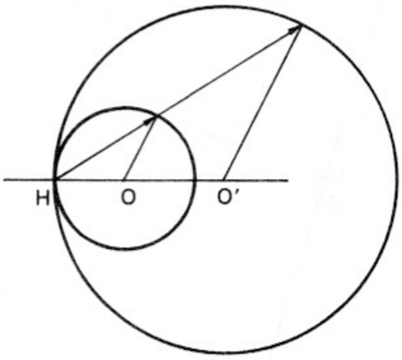




H_1 é o centro de homotetia direta e H_2 o de inversa.

Em particular, se as circunferências são tangentes, o ponto de tangência é um centro de homotetia (inversa se forem tangentes exteriores e direta se forem tangentes interiores).

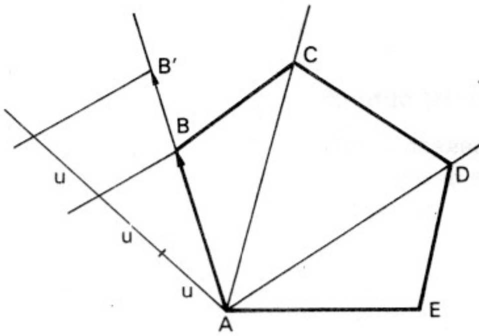


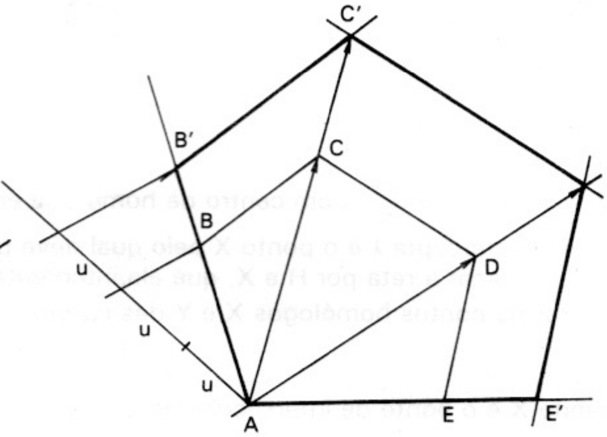


Exercícios

E3.**4** Multiplique um pentágono ABCDE por $k = \frac{3}{2}$.

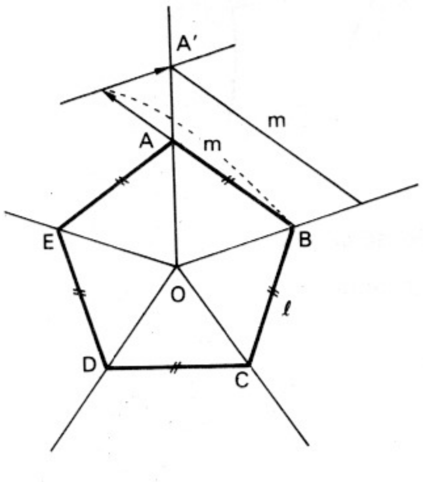
Resolução: Como não foi dado o centro de homotetia, podemos escolher um ponto qualquer para essa função. Porém, é mais cômodo utilizar um vértice do polígono dado, por exemplo A, como centro de homotetia. Então, multiplicamos B por $\frac{3}{2}$, obtendo o seu homólogo B'. Como os lados do polígono procurado são paralelos aos lados homólogos do polígono dado, basta agora traçar $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$, onde C' se encontra na reta que contém a diagonal $\overline{AC}$, depois $\overline{C'D'} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{D'E'} \parallel \overline{DE}$.

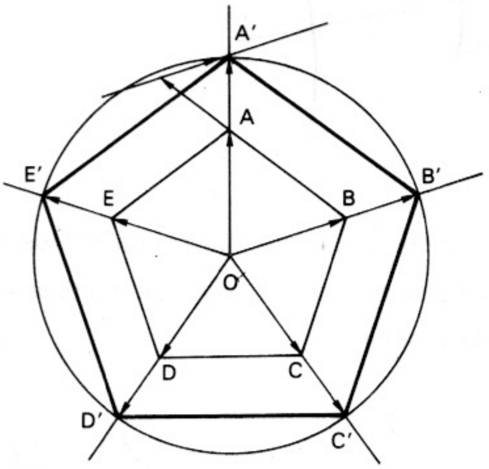




E3.**5** É dado um pentágono regular de lado ℓ e de centro O. Construa um pentágono de lado **m** homotético do pentágono dado.

Resolução: É extremamente conveniente escolher O como centro de homotetia. Traçamos, então, as semi-retas que contêm os raios de homotetia $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, ... Por translação, introduzimos A'B' = m e, com centro O, descrevemos a circunferência passando por A', a qual intercepta as semi-retas nos vértices do polígono procurado.





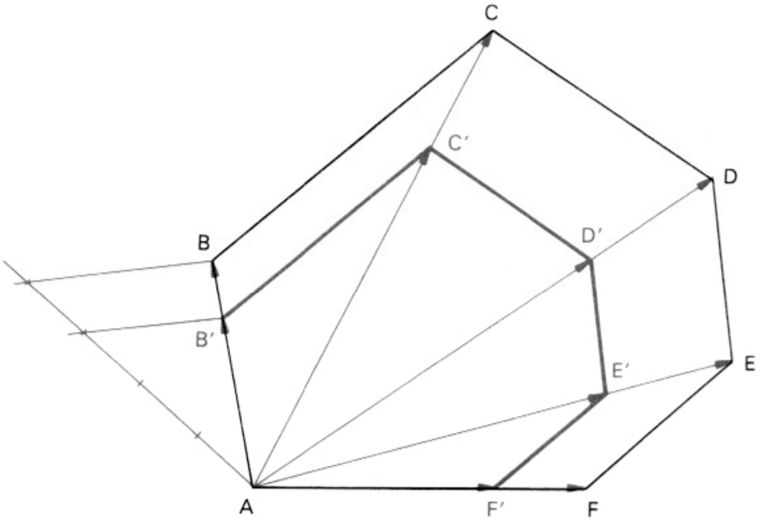
Observação: Como veremos adiante, quando se pede para construir um polígono regular de lado dado, construímos primeiramente um polígono regular, com o mesmo número de lados que possui o procurado, mas de lado arbitrário (isso aprenderemos). Então, por homotetia, damos ao lado o comprimento desejado, conforme o processo que utilizamos para resolver o problema anterior.

Resolva os exercícios 36 e 37 do caderno de atividades.

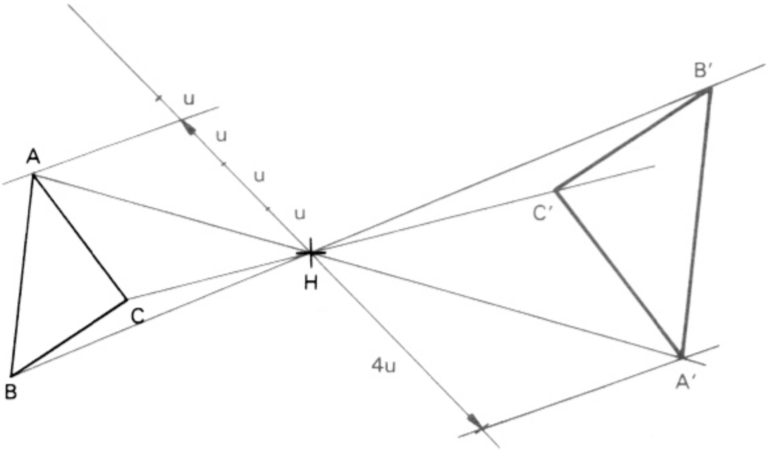
Homotetia

Figura auxiliar
e anotações

36 Multiplique o hexágono ABCDEF por $\frac{3}{4}$


C
C'
D
B
D'
B'
E'
E
A
F'
F

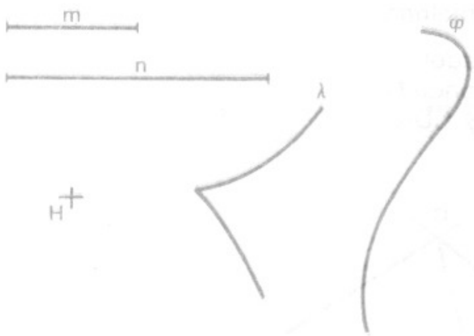
37 Dados um triângulo ABC e um ponto H, multiplique o triângulo ABC por $-\frac{4}{3}$, sendo H o centro de homotetia.

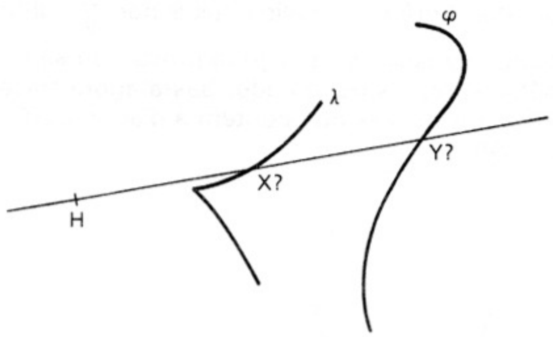

u
u
u
u
A
B'
C'
H
C
4u
A'
B

Um problema geral importante

Problema

São dadas duas curvas λ e φ, um ponto H e os segmentos **m** e **n**. Conduzir uma reta por H que intercepte λ em X, φ em Y e tal que se tenha $\frac{HX}{HY} = \frac{m}{n}$.

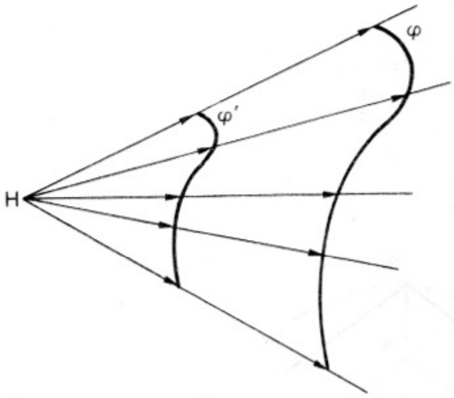


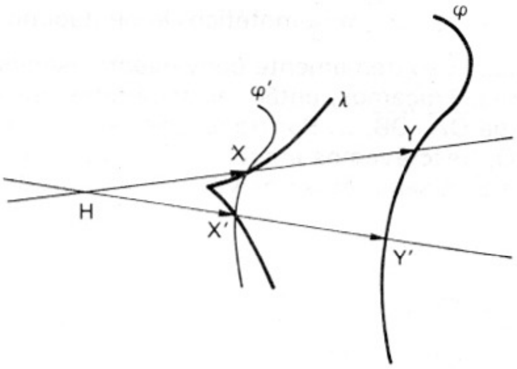

Suposto resolvido

Resolução: Multiplicamos φ por $\frac{m}{n}$, com centro de homotetia em H, obtendo φ'. O ponto em que φ' intercepta λ é o ponto X pelo qual deve passar a reta procurada. Então, é só traçar a reta por H e X, que ela intercepta φ em Y.

De fato, para todo par de pontos homólogos X e Y das curvas φ' e φ, teremos $\frac{HX}{HY} = \frac{m}{n}$.

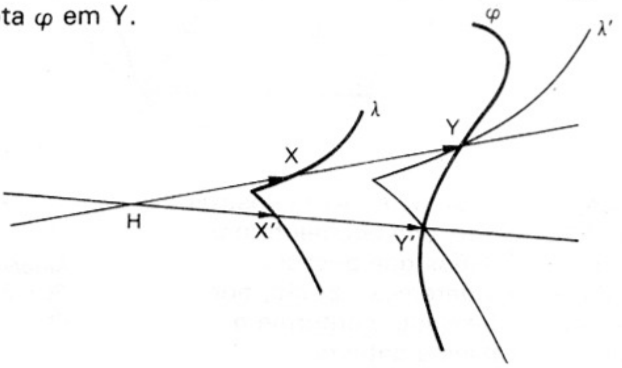
Em particular, quando X é o ponto de intersecção de φ' com λ, também se tem $\frac{HX}{HY} = \frac{m}{n}$.





Observações:

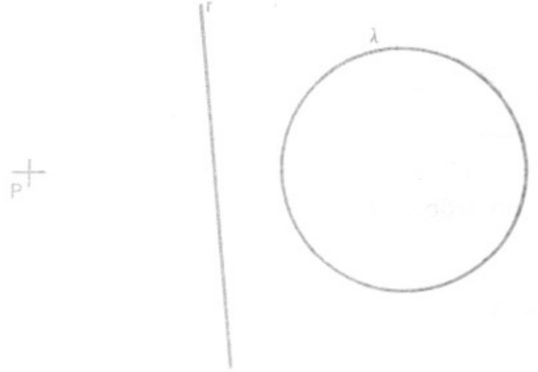
- O número de soluções é igual ao número de pontos de intersecção de φ' e λ.
- Ao invés de multiplicar φ por $\frac{m}{n}$, pode-se multiplicar λ por $\frac{n}{m}$, obtendo λ', a qual intercepta φ em Y.



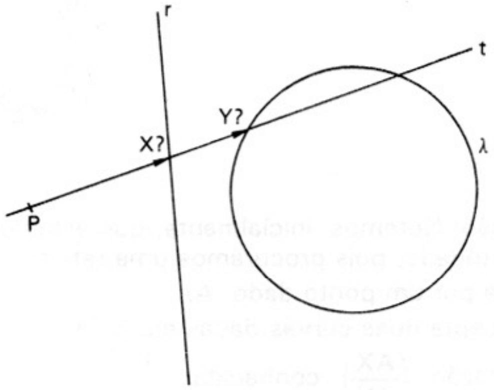
Exercícios

E3.**6** São dados um ponto P, uma reta **r** e uma circunferência λ. Conduza por P uma reta **t** que intercepte **r** em X, λ em Y e tal que se tenha

$$\frac{PX}{PY} = \frac{3}{5}.$$

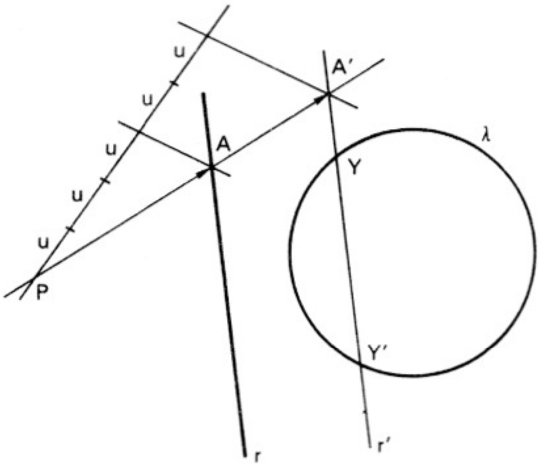


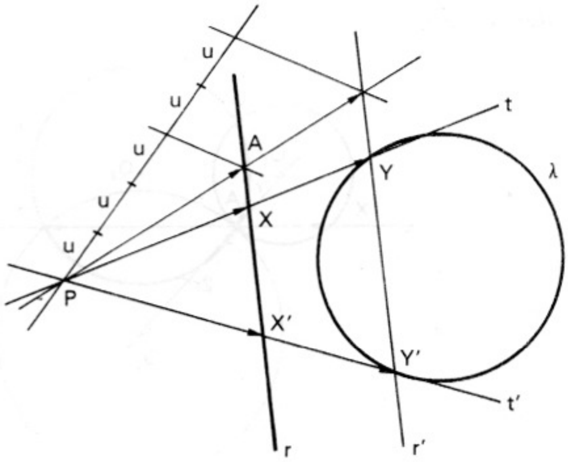
Suposto resolvido



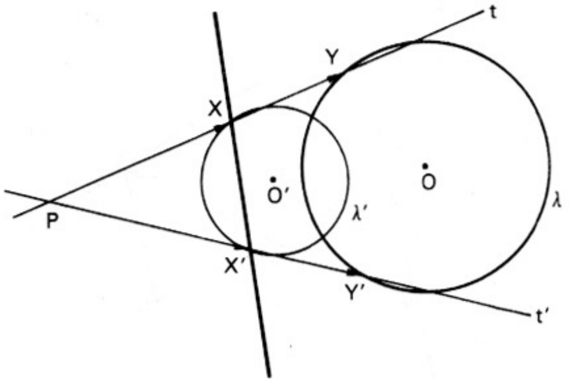
$$\frac{PX}{PY} = \frac{3}{5}$$

Resolução: Com centro de homotetia em P multiplicamos a reta **r** por $\frac{5}{3}$ obtendo **r'**, a qual intercepta λ em Y. Basta, agora, traçar a reta **t** procurada por P e Y que ela intercepta **r** em X.



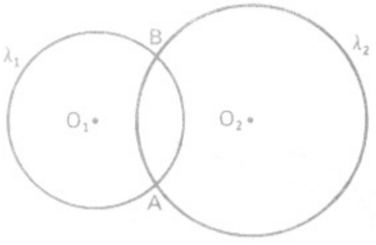


Convém insistir que poderíamos multiplicar a circunferência λ por $\frac{3}{5}$, obtendo λ', a qual interceptaria **r** em X.

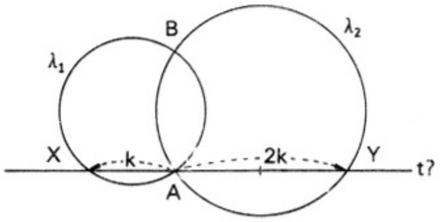


Como, de um modo geral, há duas possibilidades para se multiplicarem as curvas, pode haver dúvida de qual razão de homotetia utilizar. Essa dúvida se desfaz com uma simples análise que indique se a curva deve se afastar ou se aproximar do centro de homotetia. Como já vínhamos insistindo, isso decide se a razão de homotetia tem módulo maior ou menor do que 1.

E3.7 São dadas duas circunferências, λ_1 e λ_2, secantes nos pontos A e B. Trace por A uma reta **t** que intercepte λ em X, λ_2 em Y e tal que $\frac{AX}{AY} = \frac{1}{2}$.


λ_1
B
λ_2
O_1
O_2
A

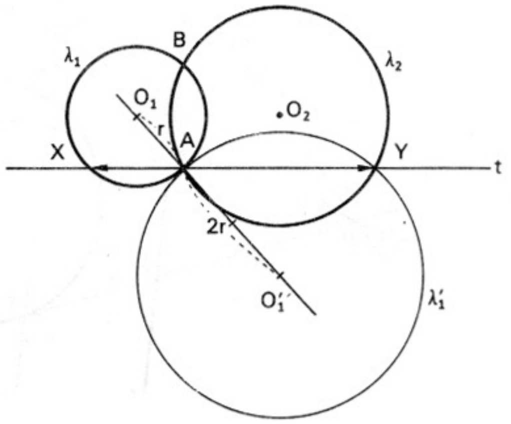
Suposto resolvido


B
λ_2
λ_1
X
k
2k
Y
t?
A

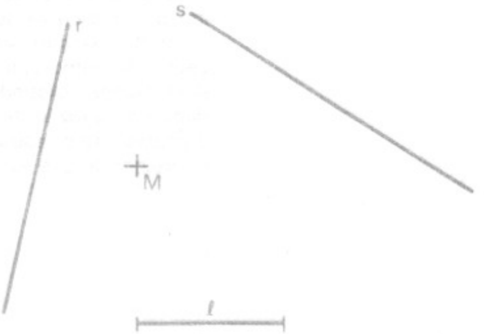
Resolução: Notemos, inicialmente, que estamos diante do problema geral estudado, pois procuramos uma reta **t** que:

- passa por um ponto dado (A);
- intercepta duas curvas dadas em pontos procurados (X e Y);
- tem razão $\left(\frac{AX}{AY}\right)$ conhecida $\left(\frac{1}{2}\right)$.

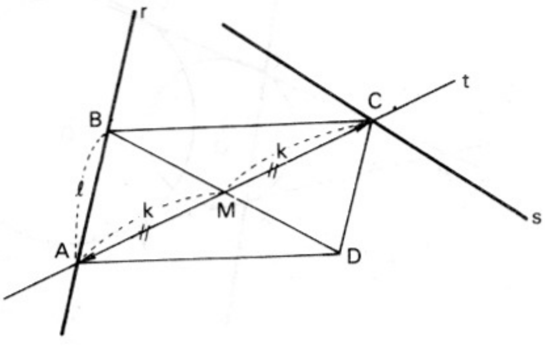
Porém, para efeito de determinar a razão de homotetia, convém notar que $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{AY}$ têm sentidos contrários, isto é, $\frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{AY}} = -\frac{1}{2}$, ou, ainda, $\frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{AX}} = -2$. Podemos, então, multiplicar λ_1 por -2, obtendo λ_1', a qual intercepta λ_2 em Y.


λ_1
B
λ_2
O_1
O_2
r
A
X
Y
t
2r
O_1'
λ_1'

E3.8 São dados um ponto M, um segmento ℓ e duas retas **r** e **s**. Construa um paralelogramo ABCD, sabendo que **r** é a reta suporte do lado $\overline{AB}$, $AB = \ell$, que C pertence à reta **s** e que M é o ponto de encontro das diagonais.



Suposto resolvido

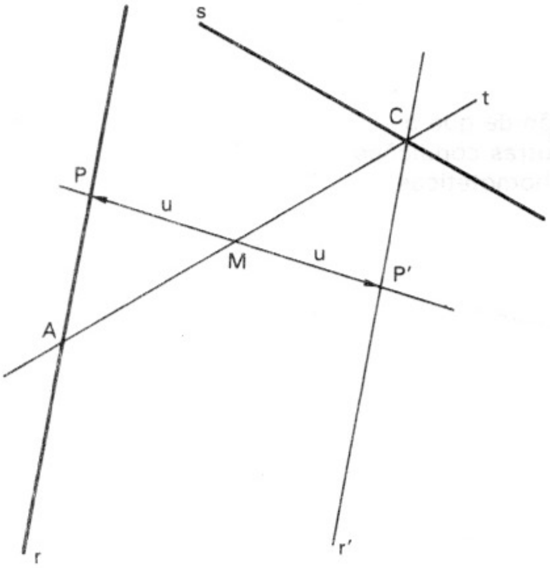

r
t
C
B
k
ℓ
M
k
A
D
s

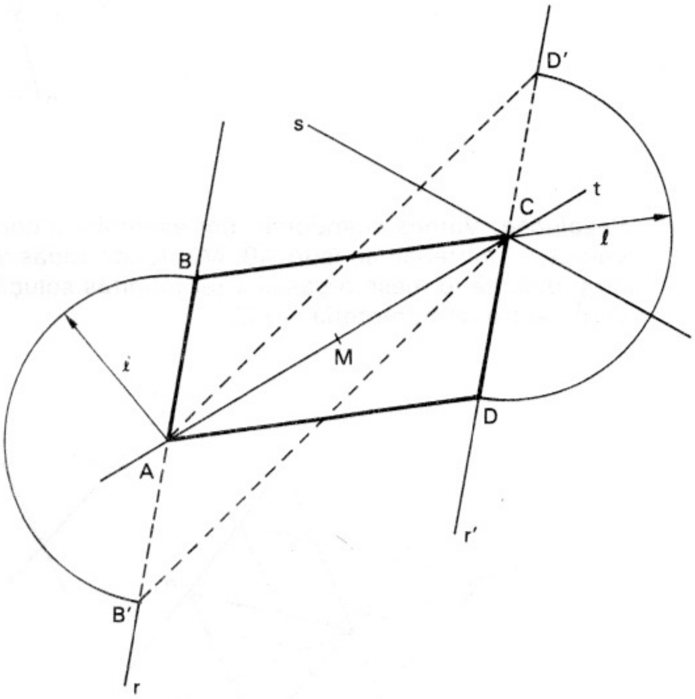
Resolução: Na figura onde se supõe o problema resolvido, seja **t** a reta que passa por A e C. A construção da reta **t** recai no problema geral, pois dela sabemos que:

- passa por um ponto dado (M);
- intercepta duas linhas dadas em pontos procurados (A e C);
- tem razão $\left(\frac{MA}{MC}\right)$ conhecida.

Porém, como $\overrightarrow{MA}$ e $\overrightarrow{MB}$ têm sentidos contrários, temos $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MC}} = -1$.

Então, com centro de homotetia em M, multiplicamos **r** por −1,obtendo r', a qual intercepta **s** em C. Por C e M traçamos **t**, determinando A em **r**. Por fim, como $\overline{AB}$ tem o comprimento ℓ conhecido, determinamos B em **r** e D em r' (note que C' é a reta suporte do lado $\overline{CD}$).





Observação: O problema admitiu duas soluções: paralelogramos ABCD e AB'CD'.

Resolva os exercícios de 38 a 43 do caderno de atividades.

O emprego da homotetia em problemas de posição

Há uma classe de problemas que propõem a construção de uma figura cuja posição está vinculada a linhas ou pontos dados. Nesses casos, abandonando uma das condições impostas à figura procurada, podemos construir uma figura homotética à mesma e em seguida "levá-la" à posição desejada através da homotetia.

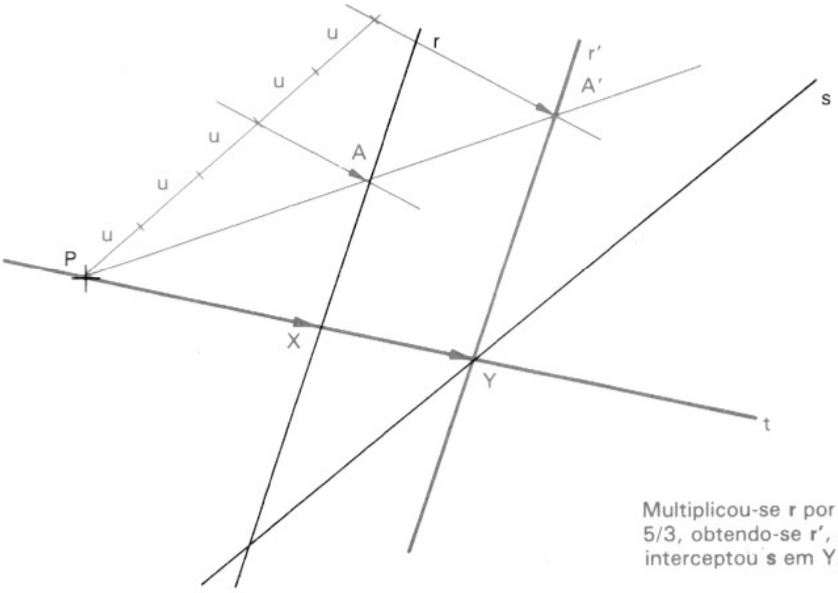
Vamos estudar alguns exemplos para compreender esse método.

Homotetia

Figura auxiliar e anotações

38 São dados um ponto P e as retas **r** e **s**. Conduza por P uma reta **t** que intercepte **r** em X e **s** em Y, tal que se tenha $\frac{PX}{PY} = \frac{3}{5}$.

Sugestão: Com centro de homotetia em P, basta multiplicar **r** ou **s** por $\frac{3}{5}$.



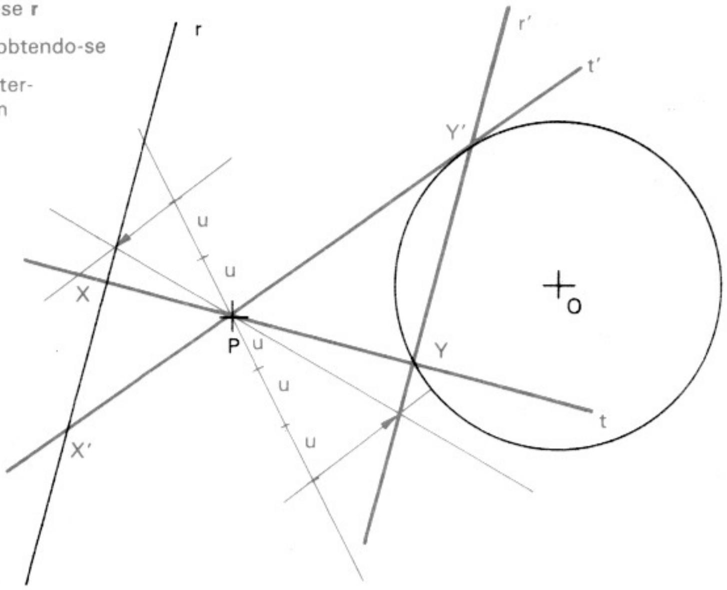
Multiplicou-se **r** por 5/3, obtendo-se **r′**, a qual interceptou **s** em Y.

Observação:
Esse problema geral tem um grau de abstração alto, o que faz com que o aluno sinta alguma dificuldade. Normalmente, é necessário resolver alguns exercícios com o aluno para que ele venha a compreendê-los. Convém, em cada um dos exercícios em que o problema geral se apresenta, mostrar que os dados e o que se pede se enquadram perfeitamente no enunciado geral.

39 São dados um ponto P, uma reta **r** e uma circunferência λ. Conduza por P uma reta **t** que intercepte **r** em X e λ em Y, tal que se tenha

$\frac{PX}{PY} = -\frac{2}{3}$.

Multiplicou-se **r** por $-\frac{3}{2}$, obtendo-se **r′**, a qual interceptou λ em Y e Y′.



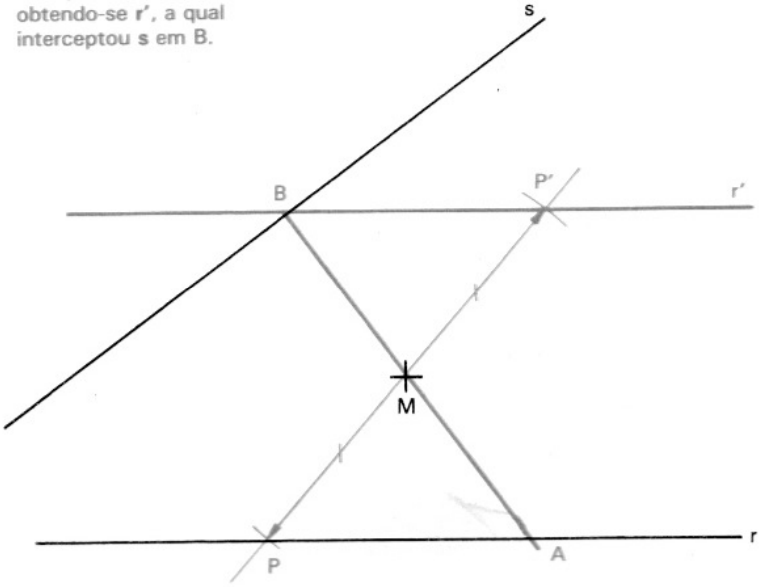
Observação:
Conscientize o aluno de que é ele quem deve descobrir o sinal da razão de homotetia. Para isso, peça que ele faça a figura onde se supõe o problema resolvido e destaque que $\overrightarrow{PX}$ e $\overrightarrow{PY}$ têm sentidos contrários, logo

$\frac{\overrightarrow{PX}}{\overrightarrow{PY}} = -\frac{2}{3}$.

Homotetia

40 São dados um ponto M e duas retas **r** e **s**. Determine os pontos A em **r** e B em **s**, de modo que M seja o ponto médio do segmento AB.

Sugestão: Com centro de homotetia em M, basta multiplicar **r** ou **s** por − 1.


Multiplicou-se r por − 1, obtendo-se r', a qual interceptou s em B.

41 São dados um ponto O e duas retas **a** e **b**. Construa uma circunferência de centro O, sabendo que esta possui um diâmetro $\overline{AB}$, com A em **a** e B em **b**.

Sugestão: Para determinar A e B, procede-se exatamente do mesmo modo que foi feito no problema anterior.

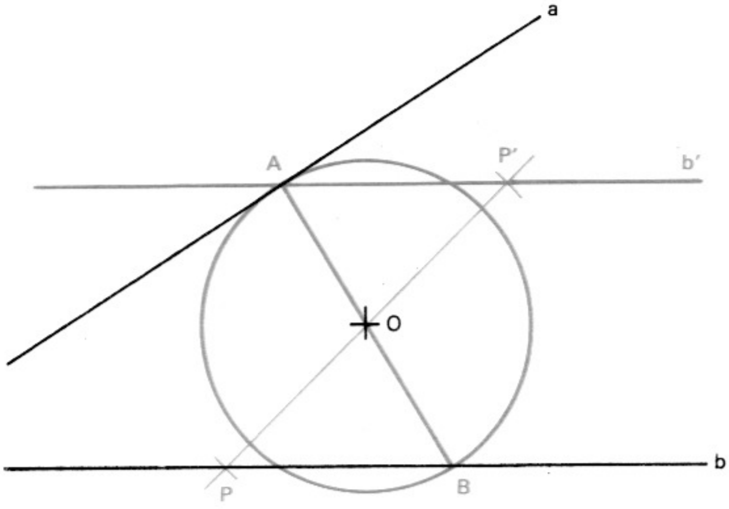


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Continue insistindo na figura em que o problema está supostamente resolvido, e mostre ao aluno que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -1.$

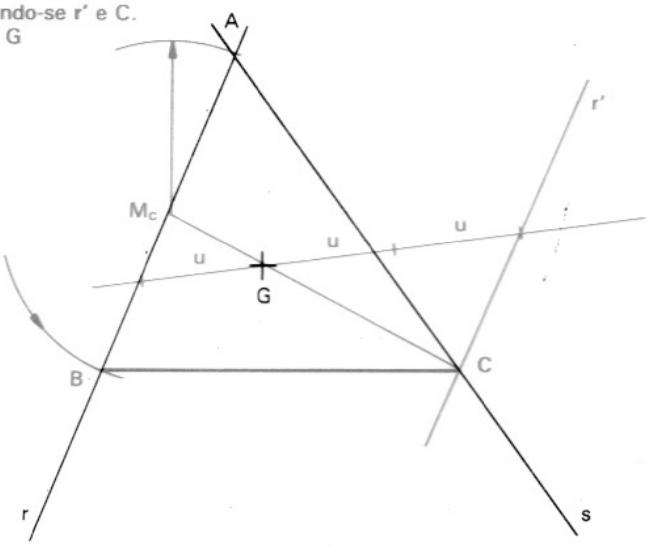
Sugestão:
Proponha o mesmo problema, pedindo que $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -2.$

42 São dados um ponto G e duas retas **r** e **s** concorrentes no ponto A. Construa um triângulo ABC sabendo que B pertence a **r**, C pertence a **s** e que G é o seu baricentro.

Sugestão: Observe que a mediana $\overline{CM_c}$ é tal que $\dfrac{\overrightarrow{GC}}{\overrightarrow{GM_c}} = -2$.

Observações:
1) Verifique se o aluno compreende a sugestão dada.
2) Comente que poder-se-ia multiplicar **s**, ao invés de **r**, e obter o vértice B.

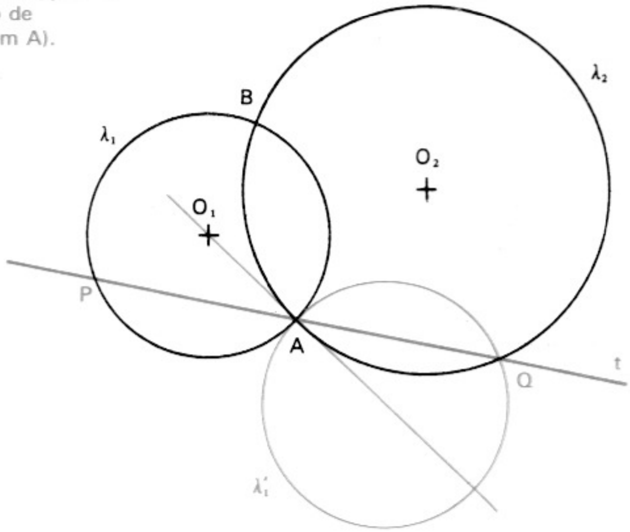
1.º) Multiplicou-se **r** por −2, obtendo-se **r'** e C.
2.º) Reta por C e G
3.º) Ponto B



43 São dadas duas circunferências λ_1 e λ_2 secantes nos pontos A e B. Trace por A uma reta **t** (distinta da reta AB) que determine cordas de comprimentos iguais nas duas circunferências.

Observação:
Continue insistindo com o aluno para que ele faça a figura onde se supõe o problema resolvido, e faça-o perceber que $\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AQ}} = -1$.

Multiplicou-se λ_1 por −1 (com centro de homotetia em A).

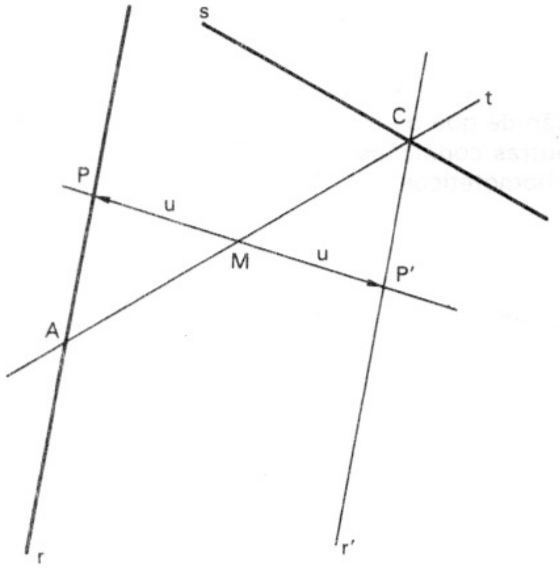


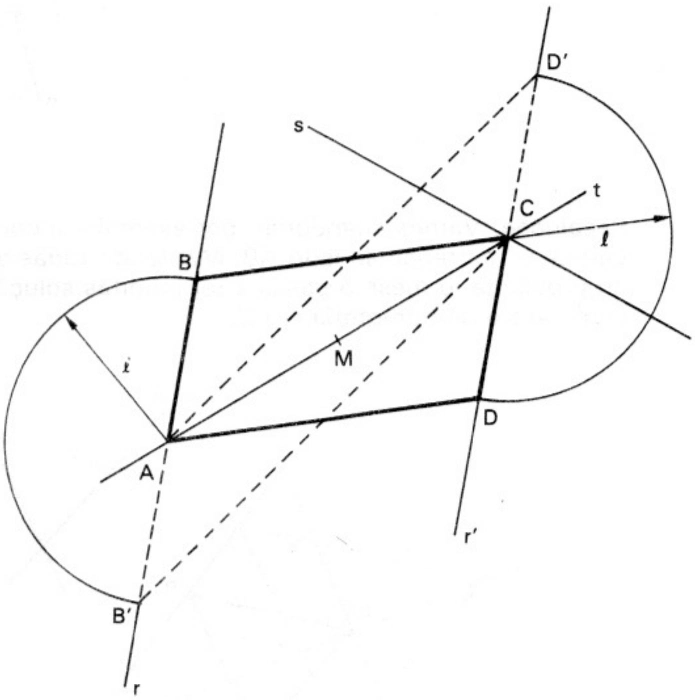
Resolução: Na figura onde se supõe o problema resolvido, seja **t** a reta que passa por A e C. A construção da reta **t** recai no problema geral, pois dela sabemos que:

- passa por um ponto dado (M);
- intercepta duas linhas dadas em pontos procurados (A e C);
- tem razão $\left(\frac{MA}{MC}\right)$ conhecida.

Porém, como $\overrightarrow{MA}$ e $\overrightarrow{MB}$ têm sentidos contrários, temos $\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MC}} = -1$.

Então, com centro de homotetia em M, multiplicamos **r** por −1, obtendo r', a qual intercepta **s** em C. Por C e M traçamos **t**, determinando A em **r**. Por fim, como $\overline{AB}$ tem o comprimento ℓ conhecido, determinamos B em **r** e D em r' (note que C' é a reta suporte do lado $\overline{CD}$).





Observação: O problema admitiu duas soluções: paralelogramos ABCD e AB'CD'.

Resolva os exercícios de 38 a 43 do caderno de atividades.

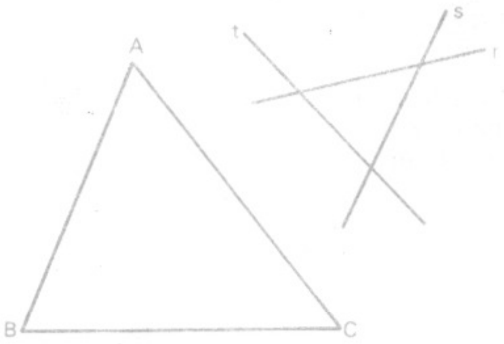
O emprego da homotetia em problemas de posição

Há uma classe de problemas que propõem a construção de uma figura cuja posição está vinculada a linhas ou pontos dados. Nesses casos, abandonando uma das condições impostas à figura procurada, podemos construir uma figura homotética à mesma e em seguida "levá-la" à posição desejada através da homotetia.

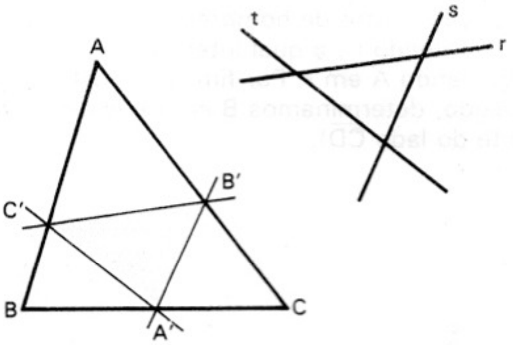
Vamos estudar alguns exemplos para compreender esse método.

Exercícios

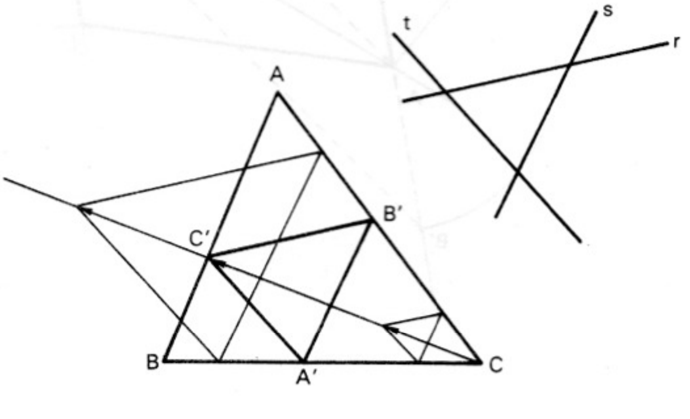
E3.9 São dados um triângulo ABC e três retas **r**, **s** e **t**. Inscreva um triângulo A'B'C' no triângulo ABC de modo que cada um dos seus lados seja paralelo a uma das retas dadas.



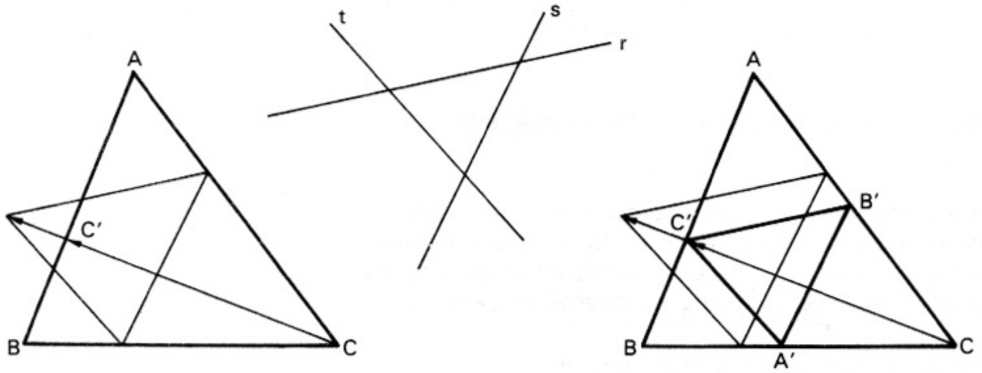
Suposto resolvido



Resolução: Vamos abandonar, por exemplo, a condição de que o vértice C' pertença ao lado $\overline{AB}$. Mantendo todas as outras condições do problema, o mesmo passa a ter infinitas soluções homotéticas, com centro de homotetia em C.

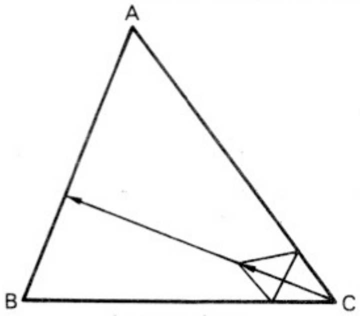


Ora, construindo qualquer um desses triângulos homotéticos, o raio de homotetia do vértice livre encontrará $\overline{AB}$ em C'. A partir de C', conduzimos paralelas às retas **r** e **t**, e determinamos A' e B'.

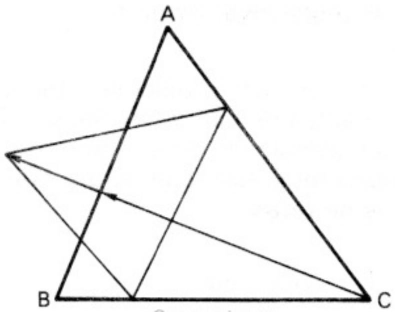


Observações:

- Para que fique bem determinado o raio vetor que determina a posição da figura procurada (no problema anterior, $\overrightarrow{CC'}$), convém construir a figura homotética auxiliar convenientemente afastada do centro de homotetia.

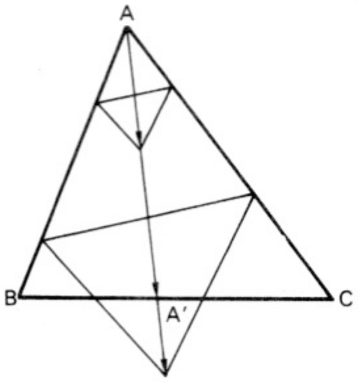


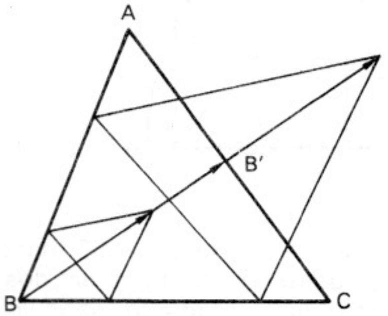
Inconveniente



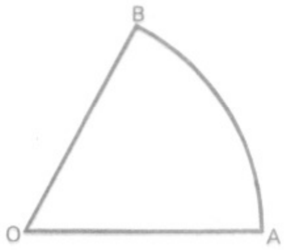
Conveniente

- Ao invés de abandonarmos a condição de C′ estar em $\overline{AB}$, poderíamos deixar outro vértice livre, A′ ou B′, o que apenas mudaria o centro de homotetia.

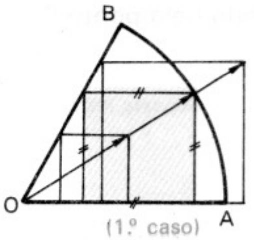




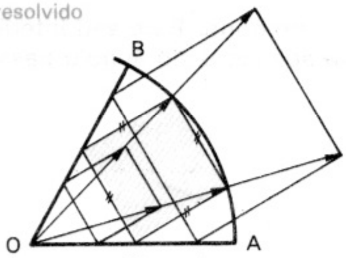
E3.10 Inscreva um quadrado num setor circular dado.



Suposto resolvido



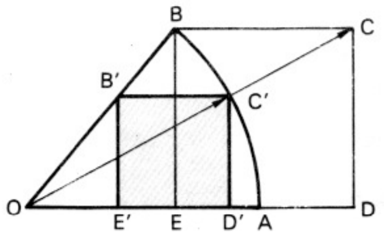
(1.º caso)



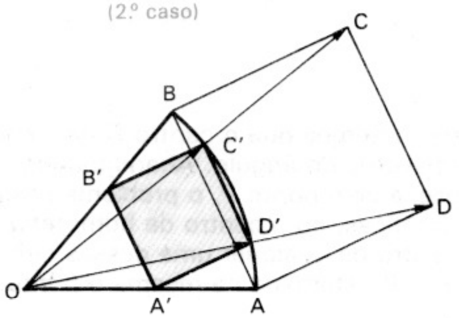
(2.º caso)

Resolução: Inicialmente, é importante notar que pode-se inscrever um quadrado num setor circular de duas maneiras distintas. Em qualquer uma das duas, o centro de homotetia é o centro do setor circular. No segundo caso, convém observar que o quadrado está posicionado de modo que dois lados opostos são paralelos à corda $\overline{AB}$.

(1.º caso)



(2.º caso)

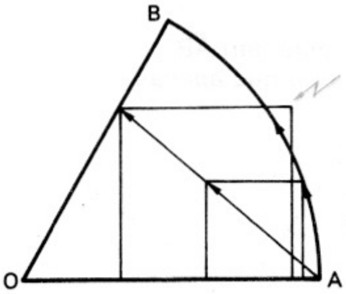


1.º caso: Construímos o quadrado BCDE. Então, o raio de homotetia $\overrightarrow{OC}$ intercepta o arco AB no vértice C′ do quadrado procurado. Por C′ traçamos as paralelas a $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ determinando B′ e D′.

2.º caso: Construímos o quadrado ABCD. Então, os raios de homotetia $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ interceptam o arco AB nos vértices C′ e D′ do quadrado procurado. Por C′ e D′, respectivamente, traçamos as paralelas a $\overline{BC}$, determinando A′ e B′.

Observação: Um erro comum, em problemas que apresentam figuras nas quais comparecem arcos de circunferências, é imaginar como centro de homotetia a extremidade de um arco, o que induz a fazer de um arco um raio de homotetia. Isso é absurdo, pois raios de homotetia são sempre segmentos de retas.

Erro comum

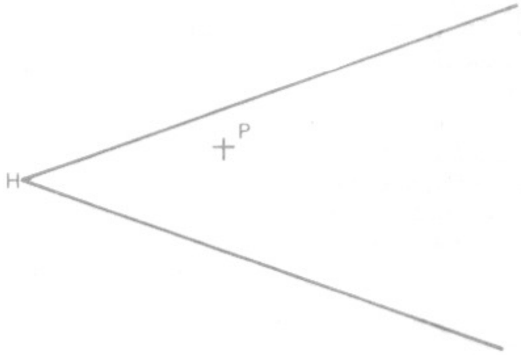


E3.**11** Num triângulo ABC, em que a = 70 mm, b = 60 mm e c = 75 mm, inscreva um triângulo eqüilátero de modo que um dos lados seja paralelo ao lado $\overline{BC}$. Quanto mede o lado do triângulo eqüilátero?

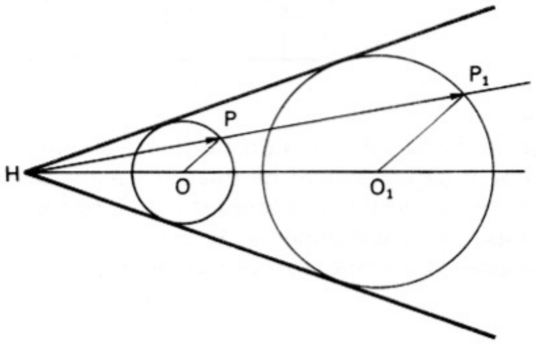
E3.**12** Num triângulo ABC, de lados a = 58 mm, b = 63 mm e c = 50 mm, inscreva um quadrado de modo que um de seus lados esteja contido em $\overline{BC}$. Quanto mede o lado desse quadrado?

E3.**13** São dados um ângulo e um ponto P no seu interior. Construa uma circunferência tangente aos lados do ângulo passando pelo ponto P.

◁ IMPORTANTE



Suposto resolvido



Resolução: Inicialmente, notemos que o centro O da circunferência procurada pertence à bissetriz do ângulo. Abandonando a condição de que a circunferência passa pelo ponto P, o problema passa a admitir infinitas soluções homotéticas, com centro de homotetia no vértice H do ângulo. Seja O_1 o centro de qualquer uma dessas circunferências. A reta conduzida por H e P determina na mesma o ponto P_1, homólogo de P.

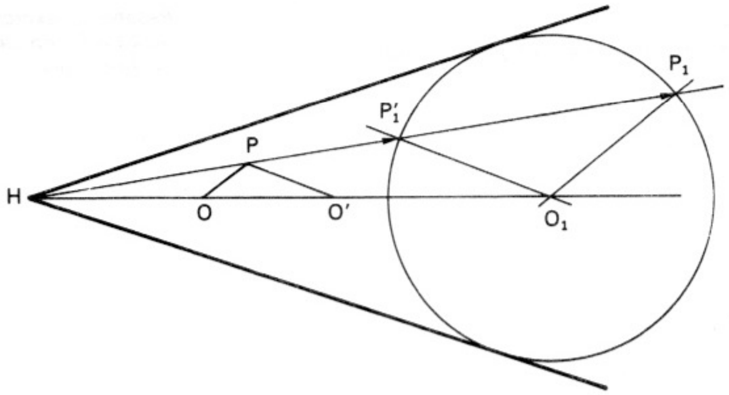
Então, o raio $\overline{O_1P_1}$ é paralelo ao raio $\overline{OP}$ da circunferência procurada (propriedade fundamental da homotetia). A partir dessa propriedade, a construção abaixo se justifica.

1.º) Construímos uma circunferência de centro O_1 qualquer, tangente aos lados do ângulo, convenientemente afastada do centro de homotetia.

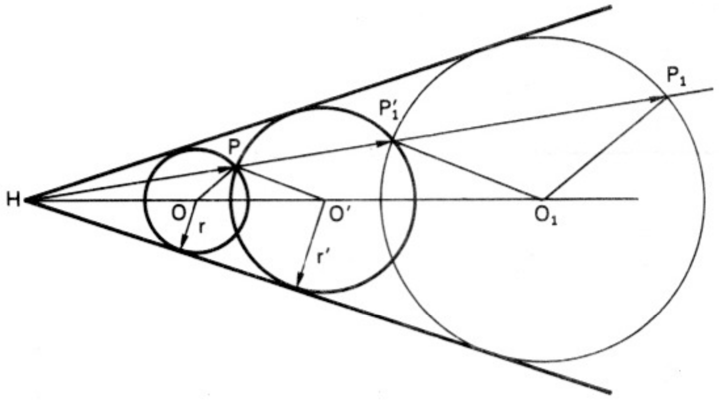
2.º) Traçamos a reta por H e P, determinando os pontos P_1 e P'_1 na circunferência.

3.º) Por P, traçamos as paralelas a $\overline{O_1P_1}$ e a $\overline{O_1P'_1}$, determinando os centros O e O′ das circunferências procuradas, sobre a bissetriz.

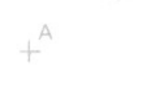
4.º) Por O e O′, traçamos as perpendiculares a um dos lados do ângulo para determinar os raios das circunferências.



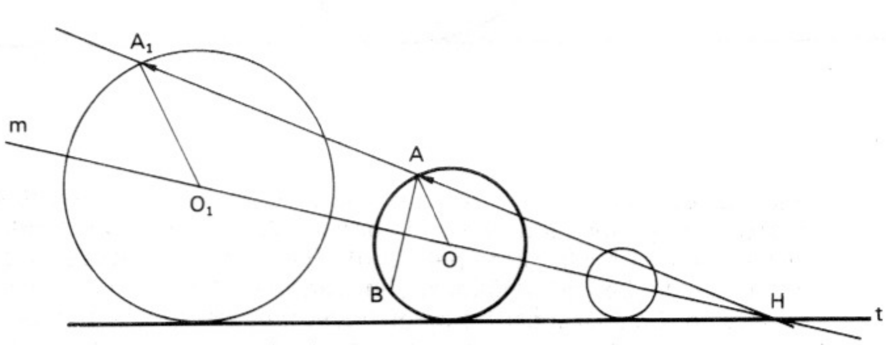
Mesmo que não tivessem sido antevistas duas soluções para o problema, já que a reta por H e P intercepta a circunferência auxiliar em dois pontos, P_1 e P'_1, temos que pensar em fazer em P'_1 aquilo que vamos fazer com P_1, ainda que no final se possa verificar que P'_1 não gere uma segunda solução.



E3. **14** São dados dois pontos A e B e uma reta **t**. Construa uma circunferência que passa pelos pontos A e B e que seja tangente à reta **t**.



Suposto resolvido



Resolução: De início, sabemos que o centro O da circunferência procurada pertence à mediatriz **m** do segmento AB. Abandonando a condição de que a circunferência procurada passe por A e B, mas mantendo o seu centro sobre **m**, o problema passa a admitir infinitas soluções homotéticas. O centro de homotetia é o ponto H de intersecção entre **m** e **t**. Seja O_1 o centro de qualquer uma dessas circunferências. Então, a reta conduzida por H e A intercepta essa circunferência no ponto A_1 tal que $\overline{O_1A_1} \parallel \overline{OA}$ (propriedade fundamental da homotetia). Assim, a construção seguinte se justifica.

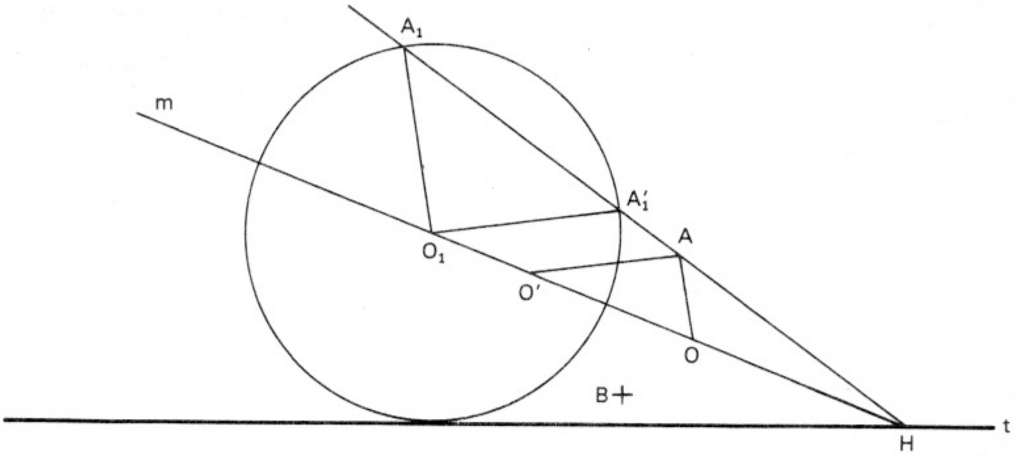
1.º) Construímos uma circunferência qualquer tangente à reta **t** e de centro O_1 sobre a mediatriz **m** de $\overline{AB}$.

2.º) Traçamos a reta por H e A, a qual intercepta a circunferência nos pontos A_1 e A_1'.

3.º) Por A, traçamos as paralelas a $\overline{O_1A_1}$ e a $\overline{O_1A_1'}$, determinando os centros O e O'.

4.º) Com centros em O e O', construímos as circunferências tangentes à reta **t** procuradas.

Resolva os exercícios de 44 a 50 do caderno de atividades.



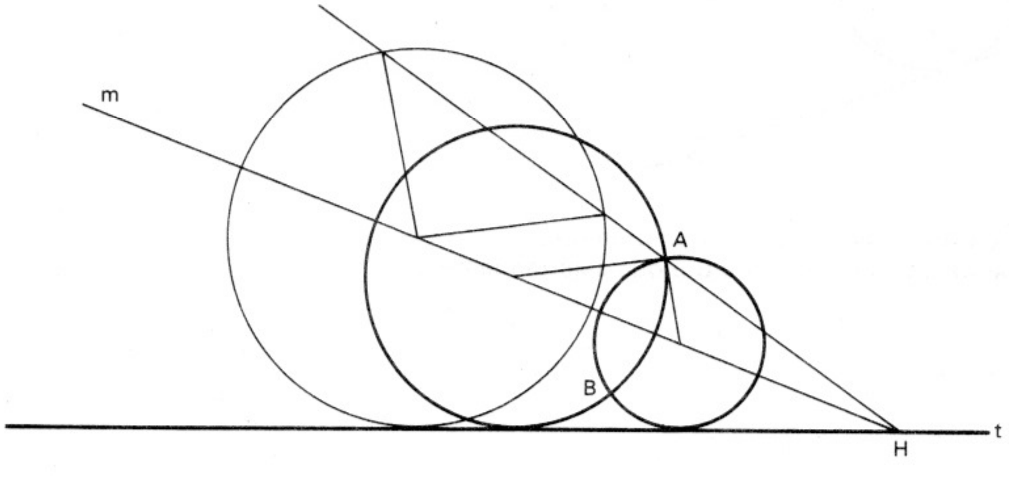
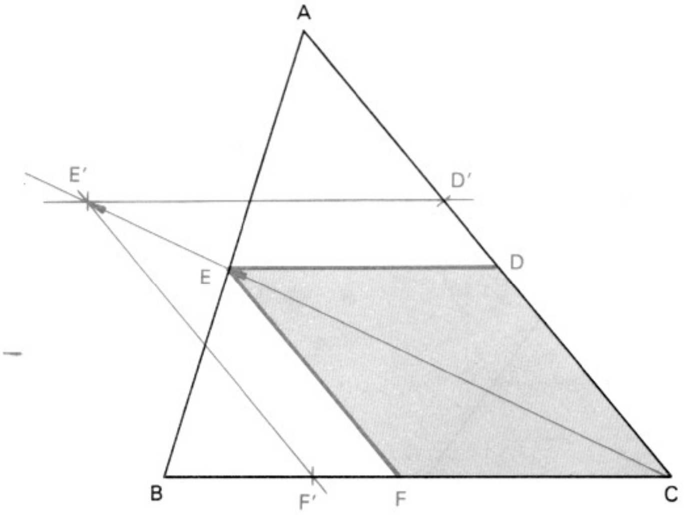


Figura auxiliar e anotações

44 Inscreva um losango no triângulo ABC, de modo que ele tenha o ângulo Ĉ em comum com o triângulo.

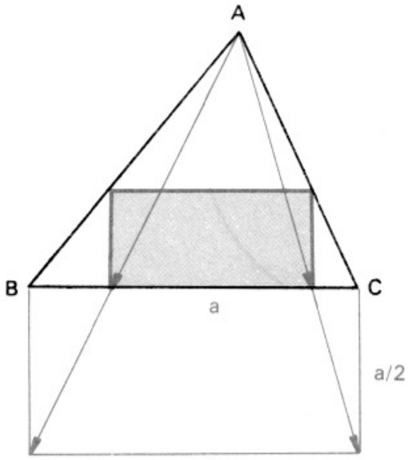
Observação:
Insista com o aluno que, para efeito de raciocínio, é bastante salutar enxergar os losangos homotéticos crescendo a partir do centro de homotetia. Porém, para efeito de precisão dos traçados, não convém desenhar em tamanho pequeno o losango auxiliar CD'E'F'.



45 É dado um triângulo ABC. Inscreva um retângulo no triângulo dado, de modo que a base seja o dobro da altura e fique contida no lado $\overline{BC}$.

Observação: Qualquer retângulo que seja homotético ao procurado tem sua base igual ao dobro da altura.

Observação:
Oriente o aluno no sentido de, sempre que possível, construir a figura homotética da figura procurada aproveitando segmentos já dados no problema ($\overline{BC}$).



Homotetia

46 Inscreva um quadrado no segmento circular dado.
Observação: O centro de homotetia é o ponto médio de $\overline{AB}$.

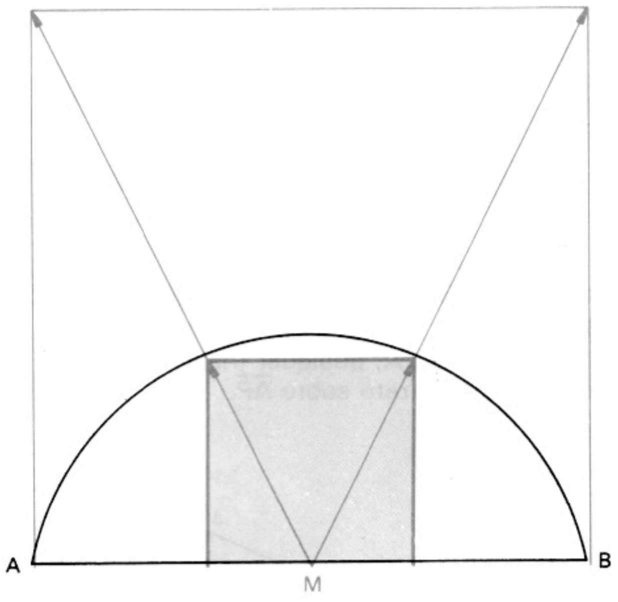
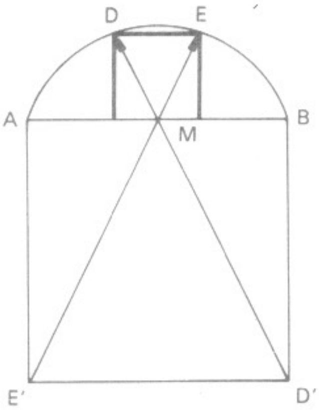


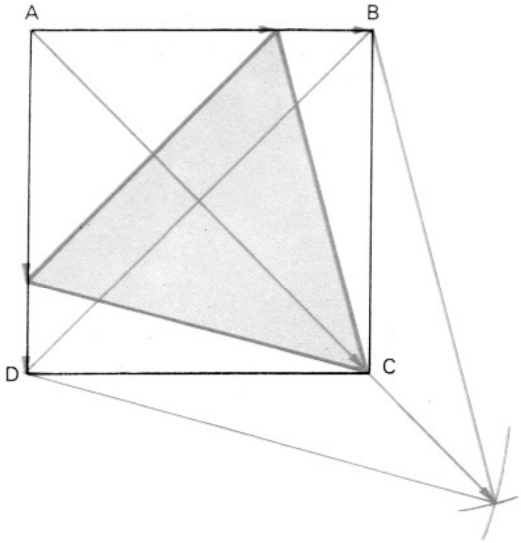
Figura auxiliar e anotações

Observações:

1) Insista com o aluno que é errado escolher A ou B como centro de homotetia, pois, se isso for feito, estar-se-á supondo um arco de circunferência como sendo um raio vetor de homotetia.
2) Comente que poder-se-ia construir o quadrado auxiliar "abaixo" de $\overline{AB}$. Nesse caso, a homotetia seria inversa.



47 Inscreva um triângulo eqüilátero no quadrado ABCD, de modo que C seja um de seus vértices.



48 Inscreva um triângulo retângulo no triângulo ABC conhecendo o vértice P do ângulo reto e a direção Δ da hipotenusa.

Sugestão: Note que, com centro de homotetia em A, qualquer triângulo homotético ao procurado tem o vértice do ângulo reto sobre $\overrightarrow{AP}$.

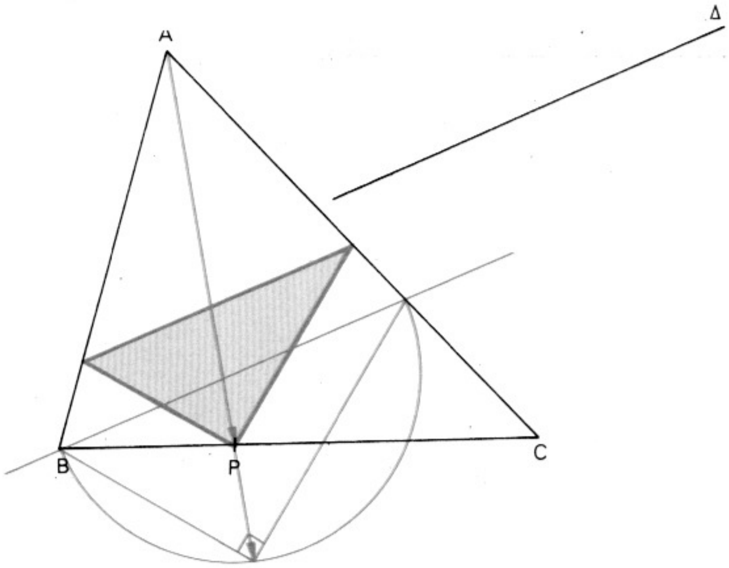
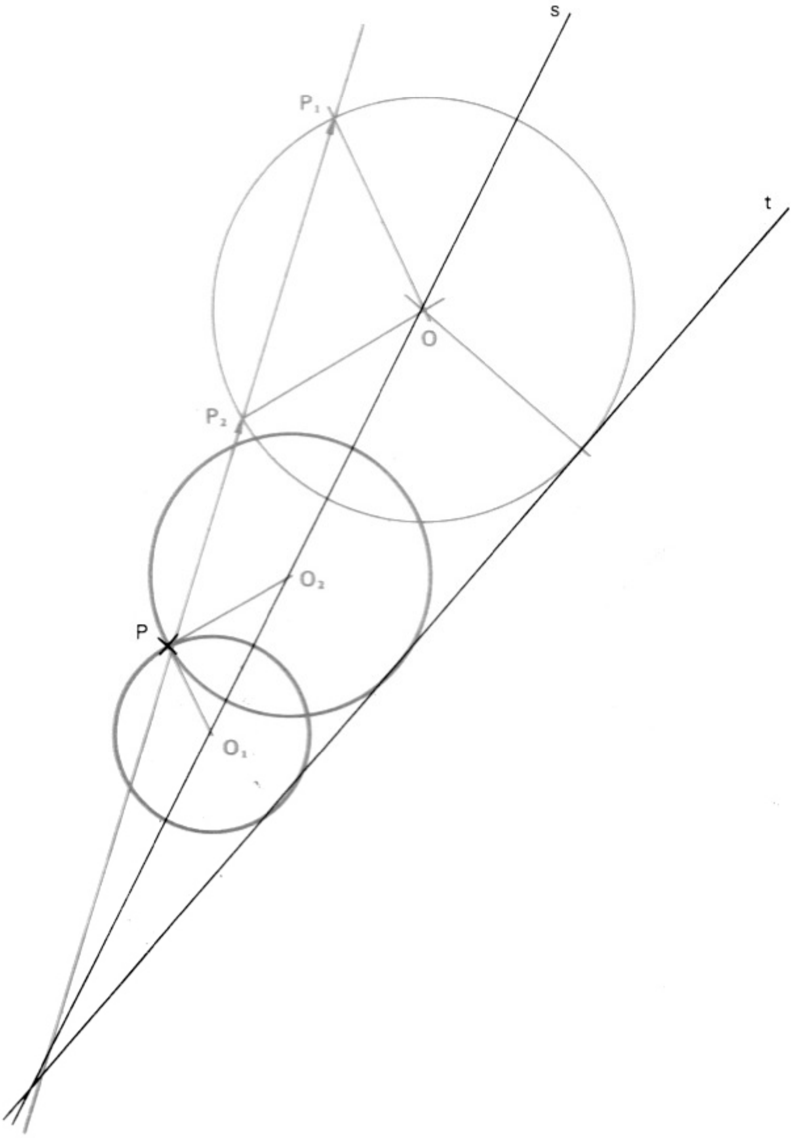


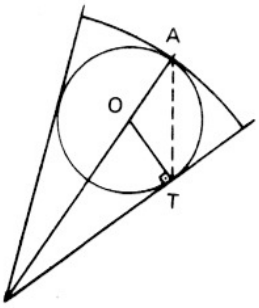
Figura auxiliar e anotações

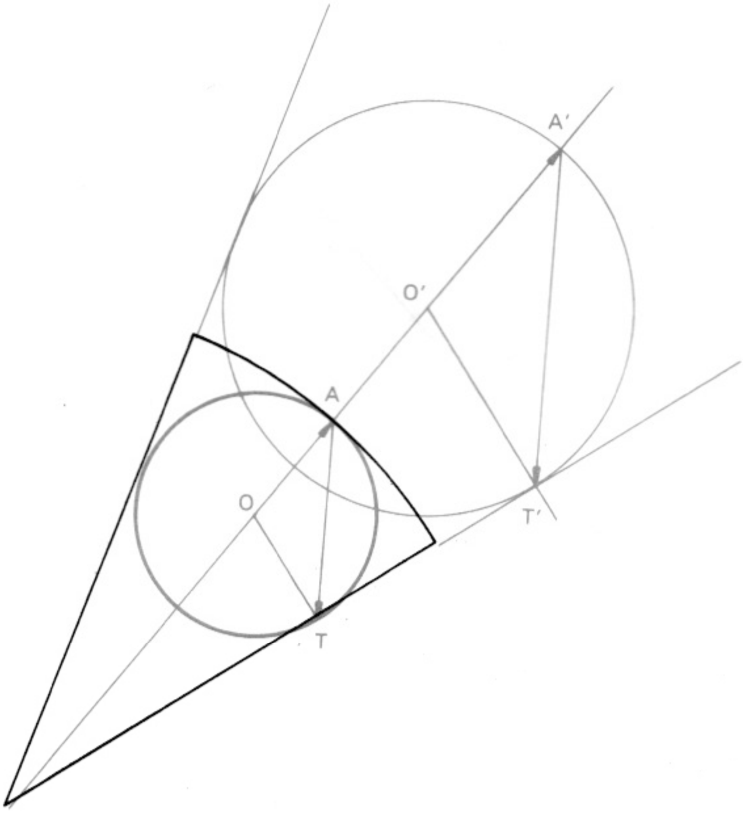
49 São dados um ponto P e duas retas **s** e **t**. Construa uma circunferência de centro O na reta **s**, tangente à reta **t** e passando pelo ponto P.
Sugestão: Análogo ao E3.13 e ao E3.14.

Observação:
Advirta o aluno que essa construção exige grande precisão de traçados. Muito capricho!



50 Inscreva uma circunferência no setor circular dado.
Sugestão: Utilize os pontos homólogos de A e T numa circunferência homotética à procurada.





4

Processos aproximativos

Retificação da circunferência

Talvez o mais célebre problema de toda a história da Matemática seja o da **quadratura do círculo**. O problema consiste em construir o lado ℓ de um quadrado cuja área seja igual à de um círculo de raio **r** dado. Como a área do quadrado é expressa por ℓ^2 e a do círculo por πr^2, deve-se obter ℓ de modo que:

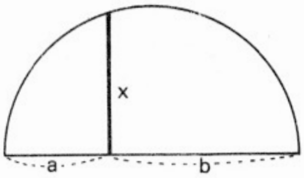
$$\ell^2 = \pi r^2$$

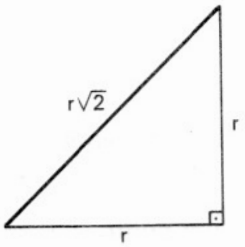
$$\text{ou } \ell^2 = (\pi r) \cdot (r)$$

Nesta última igualdade, percebe-se que ℓ é a média geométrica entre πr e r. Desse modo, o problema se resolveria se fosse possível obter um segmento de comprimento πr.

O fato de π ser número irracional ($\pi = 3{,}14159265....$) não deve, a princípio, desestimular a procura de uma solução, pois $\sqrt{2}$, por exemplo, também é irracional ($\sqrt{2} = 1{,}414213562....$) e podemos obter facilmente o segmento $r\sqrt{2}$.

Lembre-se de que um segmento **x** é a média geométrica dos segmentos **a** e **b** quando $x^2 = a \cdot b$.





Porém, a quadratura do círculo consumiu os esforços de magníficos matemáticos durante séculos, sem que se conseguisse resolvê-la com régua e compasso. Só para se ter uma idéia, desde o século IV a.C. até o final do século passado, praticamente todos os grandes matemáticos da história tentaram, sem sucesso, resolver o problema. Assim, por mais de dois milênios, a obtenção de πr, com régua e compasso, desafiou os matemáticos. Enfim, em 1882, **C. L. F. Lindemann** (1852-1939) demonstrou definitivamente que obter **a quadratura do círculo é impossível** utilizando apenas régua e compasso.

Infelizmente tal demonstração não cabe num texto elementar, mas, em linhas gerais, o procedimento de Lindemann baseou-se no seguinte: para que fosse possível obter a quadratura do círculo com os instrumentos euclidianos, já estava demonstrado que o número π teria que ser raiz de uma equação algébrica, na forma de um número exprimível por raízes quadradas. Tais números pertencem à classe dos números algébricos, isto é, aqueles que podem ser raízes de uma equação algébrica com coeficientes inteiros. Lindemann provou que o número π não é algébrico (π é denominado número transcendente), logo não se pode obter a quadratura do círculo com régua e compasso.

Por outro lado, vários matemáticos desenvolveram processos que dão valores bastante aproximados para a construção do segmento de medida πr.

Antes de passarmos ao estudo de tais processos, convém falarmos brevemente sobre resultados aproximados em problemas de construções geométricas.

Ao desenharmos uma figura, por mais precisos que sejam os traçados, estamos inevitavelmente aproximando resultados pelo simples fato de que uma linha geométrica ideal não tem espessura, enquanto que as que traçamos têm. Além disso, numa sucessão de operações com a régua e o compasso cometemos pequenos erros que acarretam um erro final. Evidentemente, quanto maior for o

Ao lado da quadratura do círculo, dois outros problemas históricos desafiaram o gênio criativo dos matemáticos, por vários séculos, até que se provou ser impossível obtê-los com régua e compasso. São eles:

Trissecção de um ângulo
Dividir um ângulo dado em três ângulos congruentes.

Duplicação do cubo
Dada a aresta de um cubo, construir a aresta de um segundo cubo cujo volume seja o dobro do volume do primeiro.

Exemplos de equações algébricas:

- $x^2 - 12x + 7 = 0$
- $3x^5 - 7x^2 + 2x - 3 = 0$

Genericamente, uma equação é chamada algébrica quando ela pode ser reduzida à forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

com $n \in \mathbb{N}^*$ e $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$.

capricho com que executamos os traçados, menor será esse erro final, de modo que, para efeitos práticos, ele resulta desprezível nas mãos de um desenhista habilidoso. Assim, por exemplo, a construção de um ângulo de 75° é teoricamente exata, porém a execução dos traçados pode acarretar erros (tanto menores quanto maior for o capricho do desenhista). Tais erros, porém, são insignificantes e desprezíveis na prática.

Um processo é chamado aproximativo (ou aproximado) quando existe nele um erro teórico. Um determinado processo é considerado conveniente quando o erro teórico é tão pequeno que pode ser considerado desprezível.

Passaremos a estudar dois bons processos aproximativos para a retificação de uma circunferência. Para isso, convém lembrar inicialmente que o comprimento C de uma circunferência de raio r é dado por:

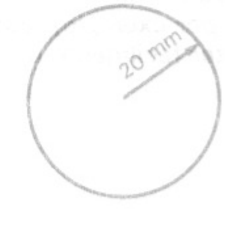
$$\boxed{C = 2\pi r} \quad \text{ou} \quad \boxed{C = d\pi}$$

onde **d** é o diâmetro, isto é, d = 2r.

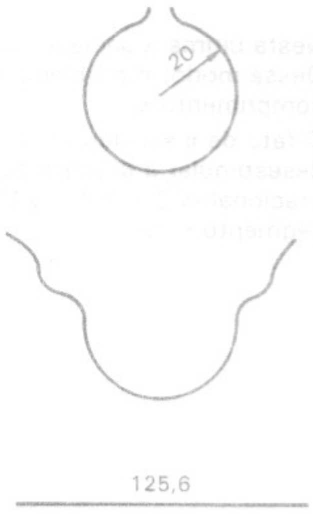
Exemplo

Calcular o comprimento de uma circunferência cujo raio tem 20 mm.

Resolução:



$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$
$$C = 2 \cdot \pi \cdot 20$$
$$C = 40\pi$$



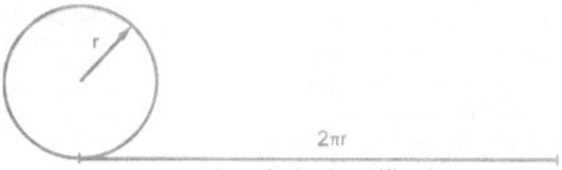
Fazendo $\pi = 3{,}14$, temos para resposta aproximada $C \simeq 40 \cdot 3{,}14$, ou ainda

$$C \simeq 125{,}6 \text{ mm}$$

Isto significa que se pudéssemos cortar essa circunferência em um ponto qualquer e, em seguida, "esticá-la" até torná-la um segmento de reta, esse segmento mediria aproximadamente 125,6 mm.

Processo de Arquimedes

Retificar uma circunferência de raio **r** dado é construir um segmento de reta cujo comprimento é igual ao da circunferência.



circunferência retificada

O processo aproximativo de Arquimedes consiste em atribuir o valor $\frac{22}{7}$ para π.

$$\pi = 3{,}1415926\ldots$$
$$\frac{22}{7} = 3{,}1428571\ldots$$

Esse valor aproxima-se de π, por excesso, na ordem de 0,001, isto é, $\frac{22}{7}$ excede π na ordem de um milésimo. Ele é exato até a segunda casa decimal.

Arquimedes de Siracusa nasceu provavelmente no ano 287 a.C. e foi morto em 212 a.C. na Segunda Guerra Púnica, por um soldado romano, apesar das ordens de se preservar a vida do geômetra. Arquimedes é considerado o maior matemático da Antigüidade (para alguns, **Arquimedes**, **Newton** e **Gauss** foram os três maiores matemáticos de todos os tempos). Sobre ele, Voltaire escreveu:

"Havia mais imaginação na cabeça de Arquimedes que na de Homero".

A obra de Arquimedes é tão extensa que não cabe aqui um comentário, mesmo sucinto.

Para conhecer o grande geômetra leia:

História da Matemática, de Carl B. Boyer, Editora Edgard Blücher.

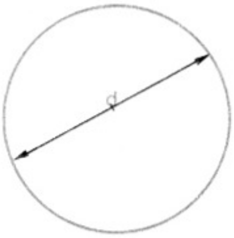
Sendo **d** o diâmetro da circunferência, devemos construir um segmento cujo comprimento ℓ é:

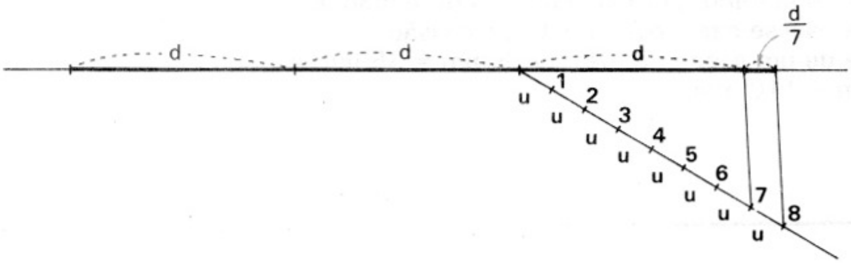
$$\ell = d \cdot \pi \simeq d \cdot \frac{22}{7}$$

$$\therefore \quad \boxed{\ell \simeq 3d + \frac{d}{7}}$$

Assim, para retificar uma circunferência, devemos construir um segmento de reta cujo comprimento seja três vezes o diâmetro mais 1 sétimo do diâmetro.

Só para se ter uma idéia, para uma circunferência de 1 m de diâmetro, o valor $\frac{22}{7}$ para π acarreta um erro por excesso em torno de 1 mm.
Nas dimensões em que trabalhamos, o erro é tão pequeno que não pode ser medido com a régua milimetrada.





O esquema indicado na figura anterior é bastante prático para obter $3d + \frac{d}{7}$.

Exercícios

E4.1 Dada uma circunferência de raio r = 25 mm, pede-se:
- a) Retifique essa circunferência pelo processo de Arquimedes.
- b) Calcule o comprimento da circunferência pela fórmula $C = 2\pi r$ ($\pi = 3{,}14$) e compare com o resultado gráfico para verificar a precisão do seu traçado.

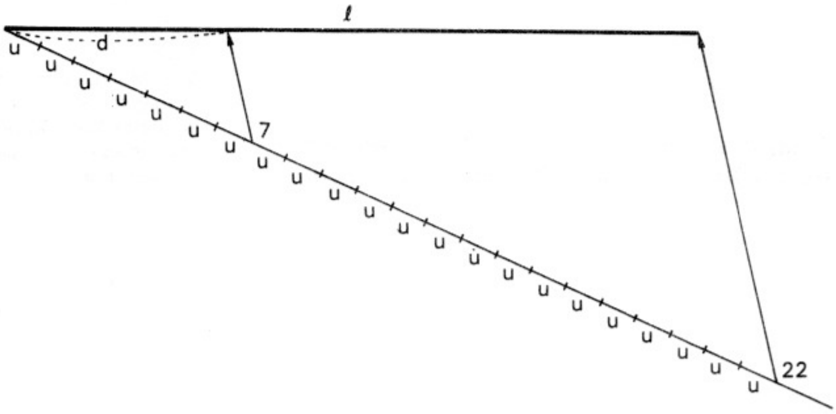
E4.2 Obtenha graficamente o diâmetro de uma circunferência cujo comprimento ℓ é dado.

◁ IMPORTANTE
O E4.2 é problema inverso da retificação. É denominado **desretificação** da circunferência.

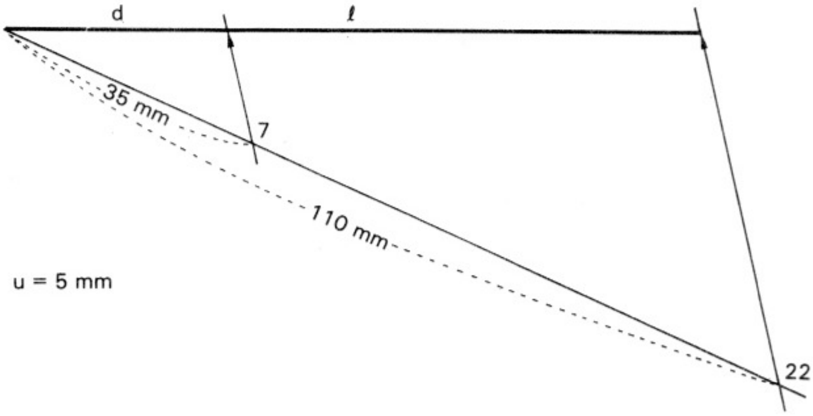
Resolução: Como $\ell = \frac{22d}{7}$, temos:

$$\frac{\ell}{22} = \frac{d}{7}$$

Então, dividindo ℓ em 22 partes iguais e tomando 7 dessas partes, obtemos **d**.



Observação: Para efeitos práticos, como só precisamos do 7.º e do 22.º pontos de divisão para obter o diâmetro, com o auxílio da régua podemos eleger um segmento unitário, por exemplo, 5 mm, e marcar somente esses dois pontos. Nesse caso, o 7.º ponto de divisão corresponde à extremidade de um segmento de 7 × 5 mm = 35 mm e o 22.º a um de 22 × 5 mm = 110 mm.



E4. **3** O comprimento de uma circunferência é 107 mm. Qual a medida do diâmetro? (Resolva graficamente!)

Resolva os exercícios 51 e 52 do caderno de atividades.

Processo de Kochansky

Para retificar uma circunferência de raio **r** dado, podemos utilizar também o processo de **Kochansky**.

1.º) Traça-se um diâmetro $\overline{AB}$ arbitrário e, pela extremidade B, traça-se a reta **t** tangente à circunferência.

2.º) Passando pelo centro O, traça-se a reta **s**, que forma um ângulo de 30° com $\overline{AB}$, a qual intercepta **t** em C.

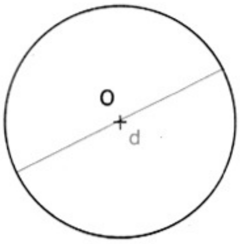
3.º) No sentido de C para B, marca-se CD = 3r sobre **t**.

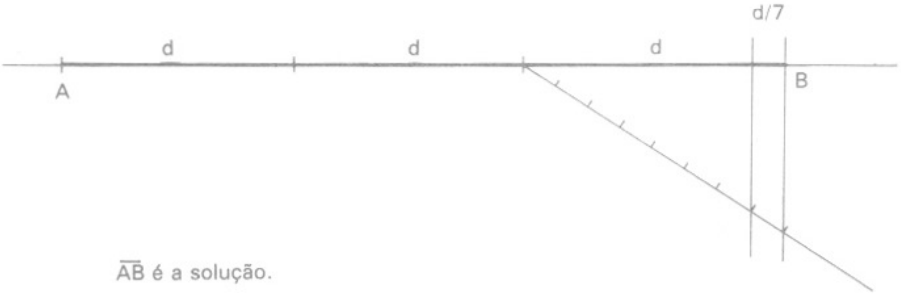
Retificação da circunferência

Figura auxiliar e anotações

51 Retifique a circunferência dada aplicando o processo de Arquimedes.

Sugestão:
Peça ao aluno que meça o diâmetro da circunferência e calcule algebricamente o comprimento da mesma, para em seguida comparar o resultado com a resolução gráfica.

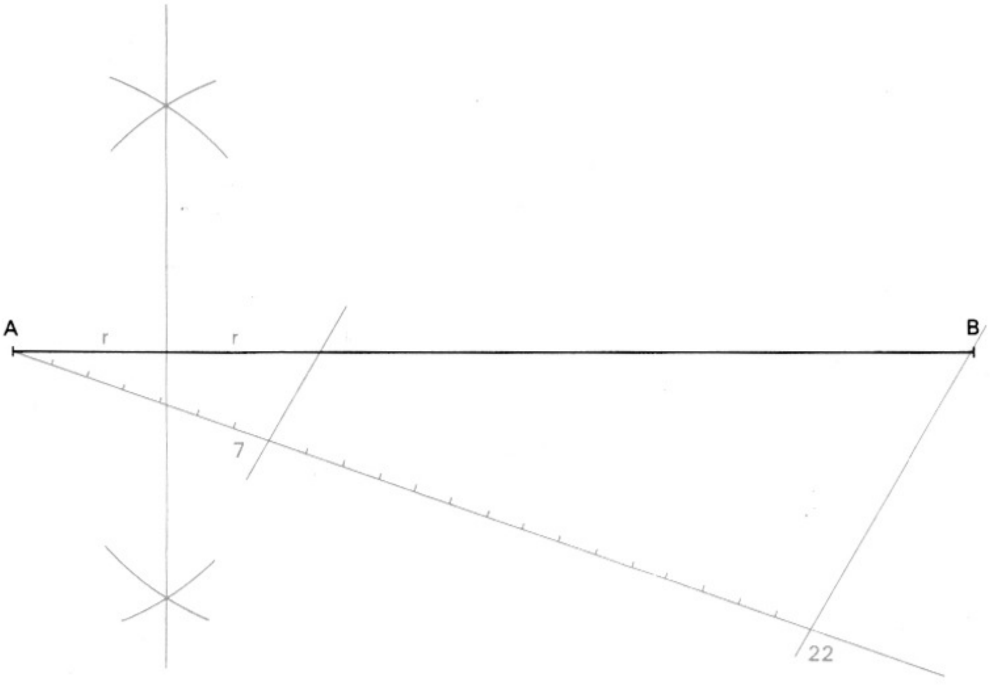




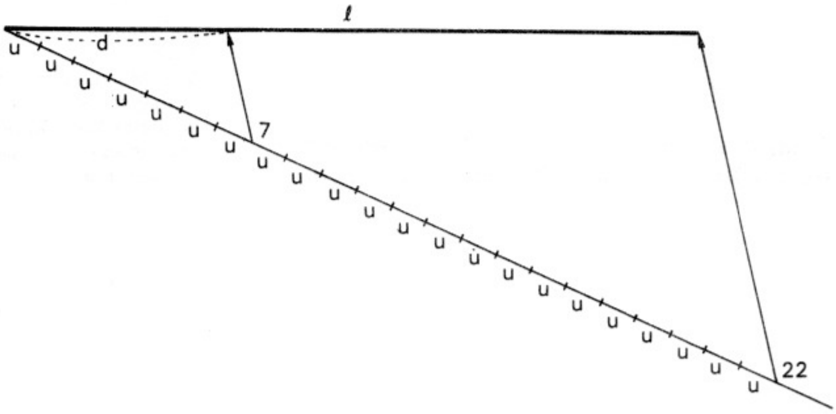
$\overline{AB}$ é a solução.

52 O segmento AB é a retificação de uma circunferência. Obtenha graficamente o raio da mesma.

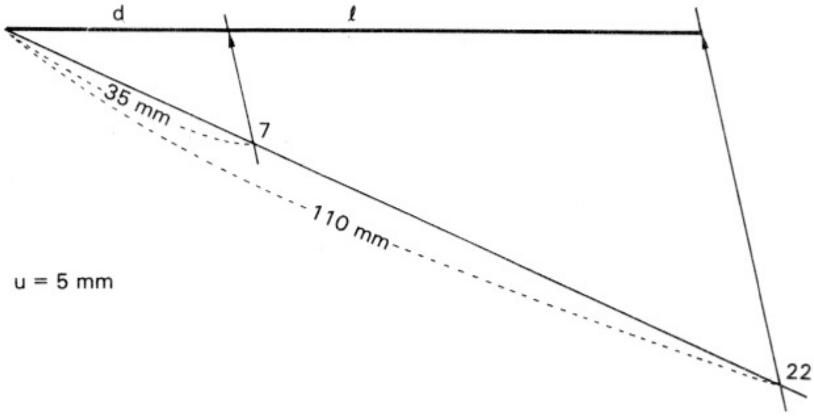
Observação:
Insista que, para a desretificação pelo processo de Arquimedes, são necessários apenas o 7.º e o 22.º pontos de divisão. Assim, na prática, pode-se marcar diretamente apenas esses dois pontos, com o auxílio da escala da régua.



Então, dividindo ℓ em 22 partes iguais e tomando 7 dessas partes, obtemos **d**.



Observação: Para efeitos práticos, como só precisamos do 7.º e do 22.º pontos de divisão para obter o diâmetro, com o auxílio da régua podemos eleger um segmento unitário, por exemplo, 5 mm, e marcar somente esses dois pontos. Nesse caso, o 7.º ponto de divisão corresponde à extremidade de um segmento de 7 × 5 mm = 35 mm e o 22.º a um de 22 × 5 mm = 110 mm.



E4. **3** O comprimento de uma circunferência é 107 mm. Qual a medida do diâmetro? (Resolva graficamente!)

Resolva os exercícios 51 e 52 do caderno de atividades.

Processo de Kochansky

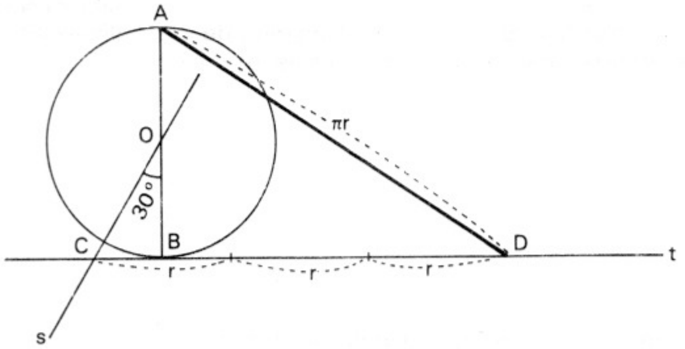
Para retificar uma circunferência de raio **r** dado, podemos utilizar também o processo de **Kochansky**.

1.º) Traça-se um diâmetro $\overline{AB}$ arbitrário e, pela extremidade B, traça-se a reta **t** tangente à circunferência.

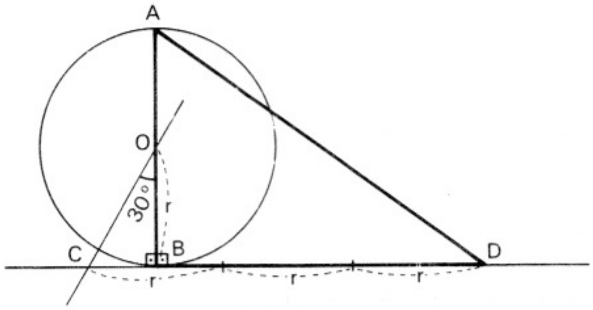
2.º) Passando pelo centro O, traça-se a reta **s**, que forma um ângulo de 30° com $\overline{AB}$, a qual intercepta **t** em C.

3.º) No sentido de C para B, marca-se CD = 3r sobre **t**.

4.º) O segmento $\overline{AD}$ tem comprimento aproximadamente igual a πr, isto é, $\overline{AD}$ é a retificação da semicircunferência.



Justificativa:



Do triângulo retângulo OBC vem:

$$\text{tg } 30° = \frac{BC}{r} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{BC = \frac{r\sqrt{3}}{3}}$$

Como BD = CD − BC, temos:

$$\boxed{BD = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}}$$

Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo ABD temos:

$$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2$$

$$(AD)^2 = (2r)^2 + \left(3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$(AD)^2 = 4r^2 + 9r^2 - \frac{6r^2\sqrt{3}}{3} + \frac{3r^2}{9}$$

Reduzindo os termos do segundo membro, vem:

$$(AD)^2 = r^2\left(\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}\right)$$

$$\therefore\ AD = r \cdot \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}}$$

Efetuando os cálculos, temos finalmente:

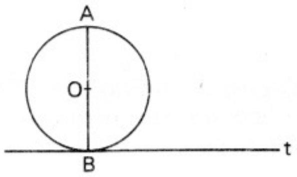
$$\boxed{AD = (3{,}1415333...) \cdot r}$$

Como $\pi = 3{,}1415926...$, vemos que:

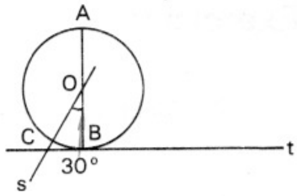
$$\boxed{AD \simeq \pi r}$$

Evolução do traçado

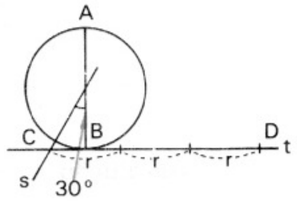
1.º passo



2.º passo



3.º passo



Lembre-se de que se α é um ângulo agudo de um triângulo retângulo, então:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Além disso, $\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Observe que o processo de Kochansky dá o valor exato para π até a quarta casa decimal e somente na quinta casa aparece o erro.

$$\text{(Kochansky)} \rightarrow 3{,}14153\ldots$$
$$\pi = 3{,}14159\ldots$$

O erro cometido é por falta e é da ordem de 0,00006, isto é, seis centésimos de milésimo. Um erro dessa ordem é completamente desprezível para os nossos intentos.

Se pudéssemos aplicar o processo de **Kochansky** para retificar uma circunferência de 10 m de diâmetro, incorreríamos num erro por falta da ordem de seis décimos de milímetros.

Exercícios

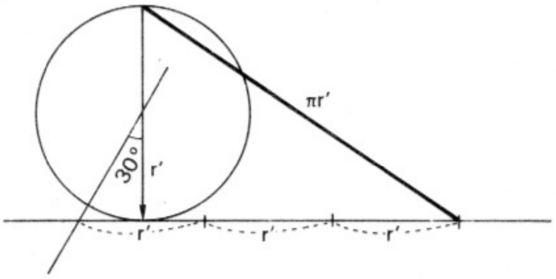
E4.**4** Dada uma circunferência de 32 mm de raio, retifique-a pelo processo de Kochansky. Qual é o comprimento dessa circunferência?

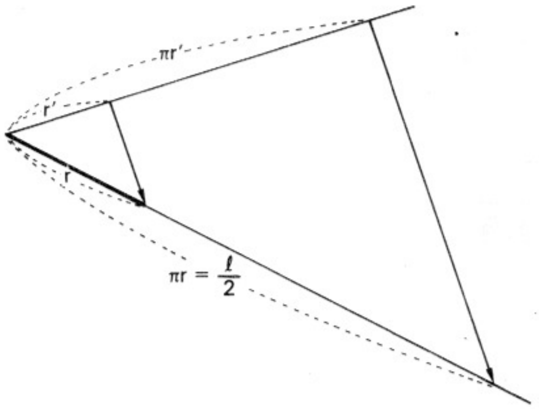
E4.**5** Obtenha o raio de uma circunferência de comprimento ℓ dado, aplicando o processo de Kochansky.

Resolução: Observe que $\ell = 2\pi r$, isto é, $\pi r = \frac{\ell}{2}$.

Construímos uma circunferência auxiliar de raio r′ e obtemos $\pi r'$ pelo processo de Kochansky. Então, obtemos **r** por quarta proporcional, pois:

$$\frac{r}{r'} = \frac{\pi r}{\pi r'}$$





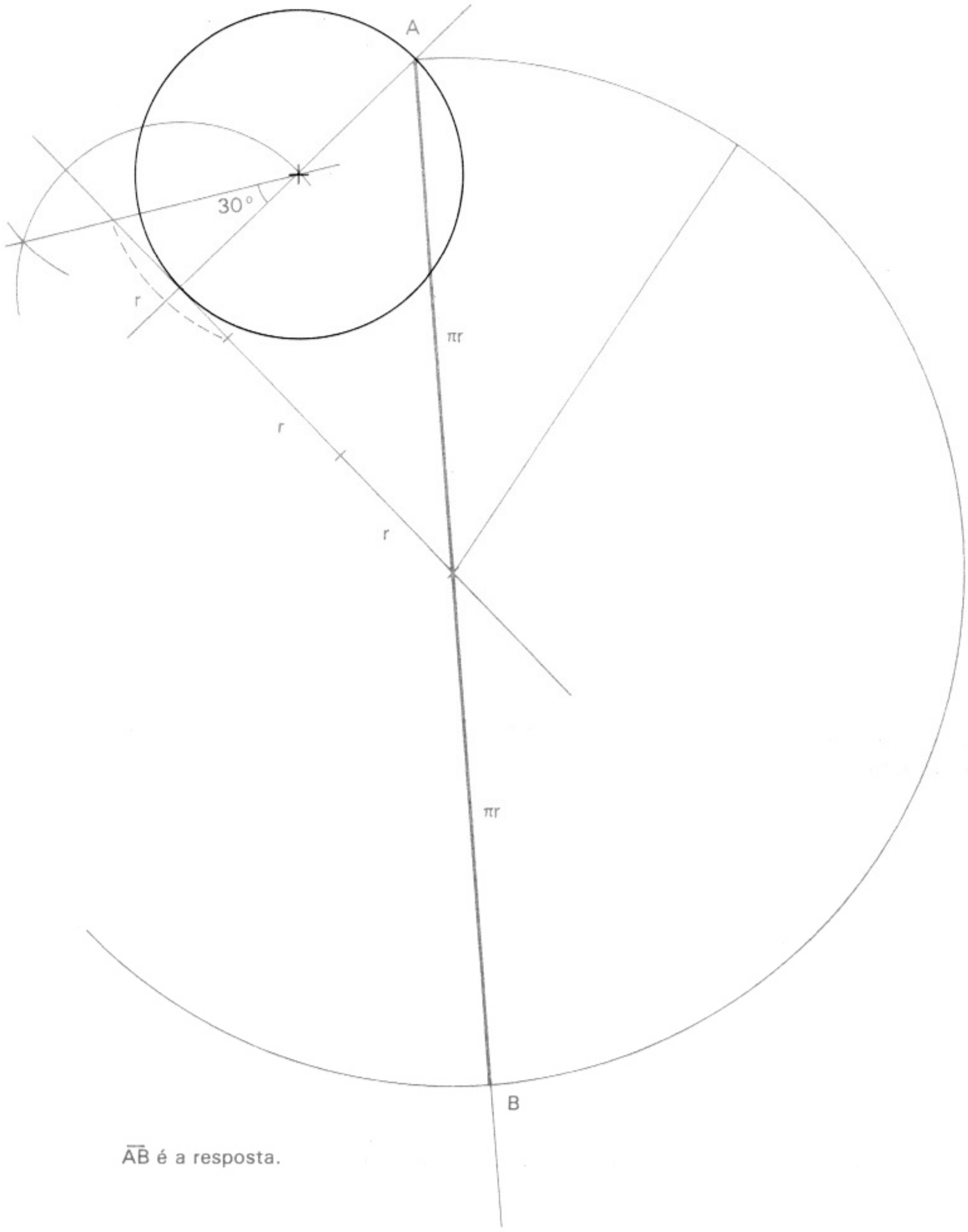
Nota-se que obter a desretificação da circunferência pelo processo de Kochansky é bem mais trabalhoso que pelo processo de Arquimedes. Assim, embora esse processo dê um valor melhor para π, dado o grande número de operações, a tendência é que o erro gráfico final seja maior do que o obtido no processo de Arquimedes. Mas ainda assim convém sabê-lo.

Resolva os exercícios 53 e 54 do caderno de atividades.

E4.**6** Obtenha graficamente, pelo processo de Kochansky, o raio de uma circunferência cujo comprimento é 150 mm.

Retificação da circunferência

53 Retifique a circunferência dada aplicando o processo de Kochansky.
Observação: Não esqueça que a circunferência tem comprimento igual a 2πr.



$\overline{AB}$ é a resposta.

Figura auxiliar e anotações

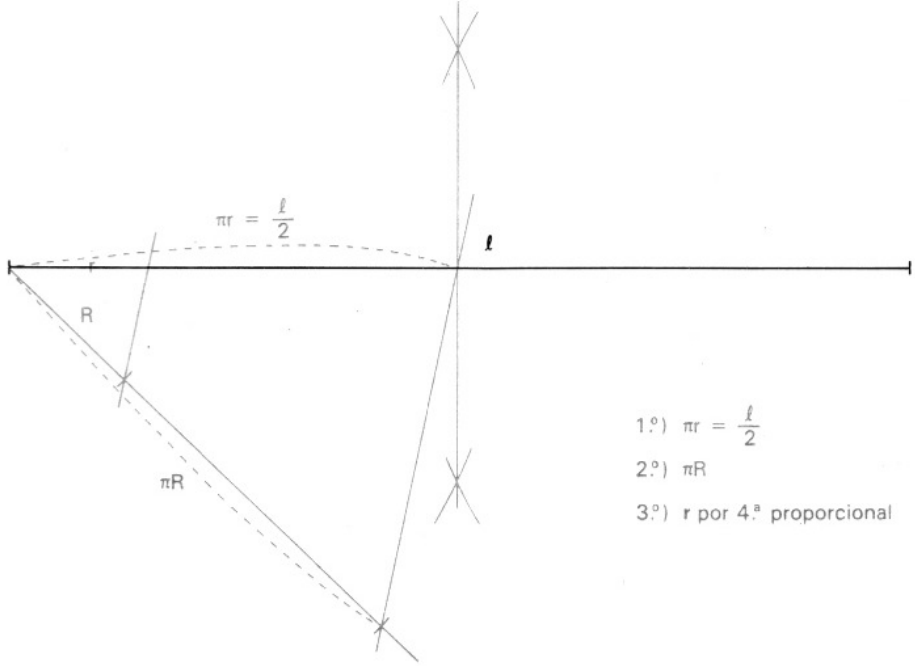
Sugestão:
Proponha as retificações de duas circunferências de raios iguais, cada qual por um dos processos estudados. Então, peça ao aluno que compare os resultados.

Retificação da circunferência

Figura auxiliar e anotações

54 Obtenha graficamente o raio de uma circunferência cujo comprimento **ℓ** é dado, aplicando o processo de Kochansky.

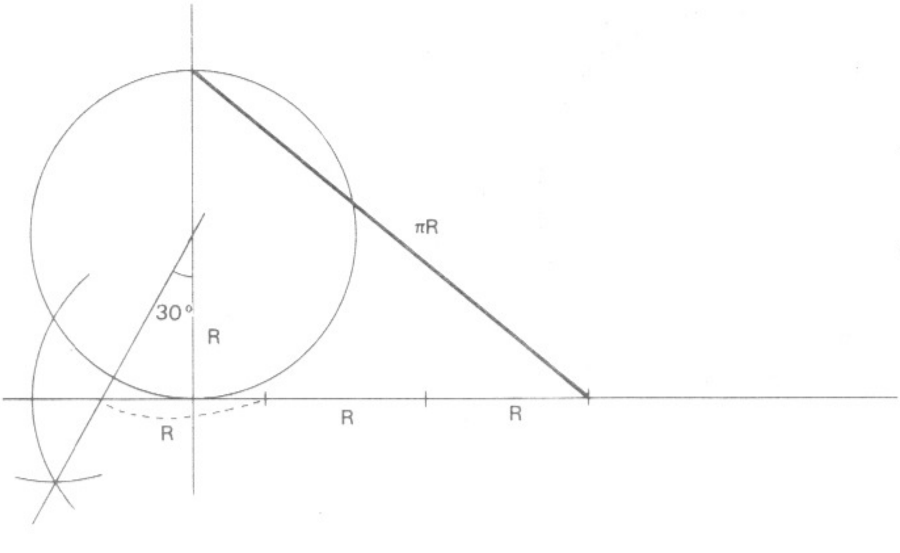
Observação:
Comente que principalmente a desretificação é menos trabalhosa pelo processo de Arquimedes.



1.º) $\pi r = \frac{\ell}{2}$

2.º) πR

3.º) r por 4.ª proporcional



Retificação de arcos de circunferência

A justificativa desse processo de retificação de arcos fundamenta-se em trabalhosas relações trigonométricas. Ela encontra-se no apêndice deste livro.

Retificar um arco de circunferência é construir um segmento de reta cujo comprimento é igual ao comprimento do arco. A exemplo da circunferência, não há processo exato para a retificação de arcos, mas vamos estudar um processo aproximativo de erro teórico desprezível.

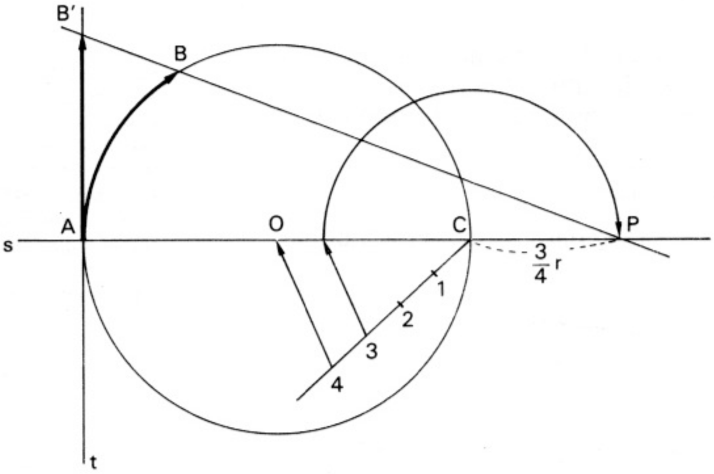
1º Caso: $0° < \widehat{AB} \leqslant 90°$

Seja arc $\widehat{AB}$ um arco de medida não superior a 90°. A sua retificação é realizada como segue:

1º) Traça-se a reta **s**, suporte do diâmetro $\overline{AC}$, e a tangente **t** por A.

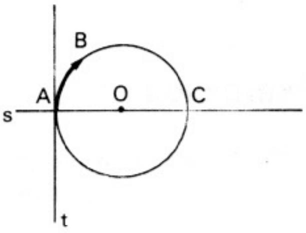
2º) Toma-se o ponto P sobre **s**, externamente à circunferência, de modo que PC seja igual a $\frac{3}{4}$ do raio da circunferência.

3º) A reta conduzida por P e B intercepta **t** no ponto B'. O segmento AB' é o arco retificado.

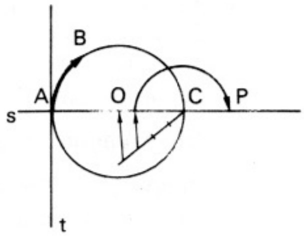


Evolução do traçado

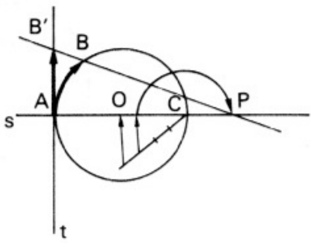
1º passo



2º passo

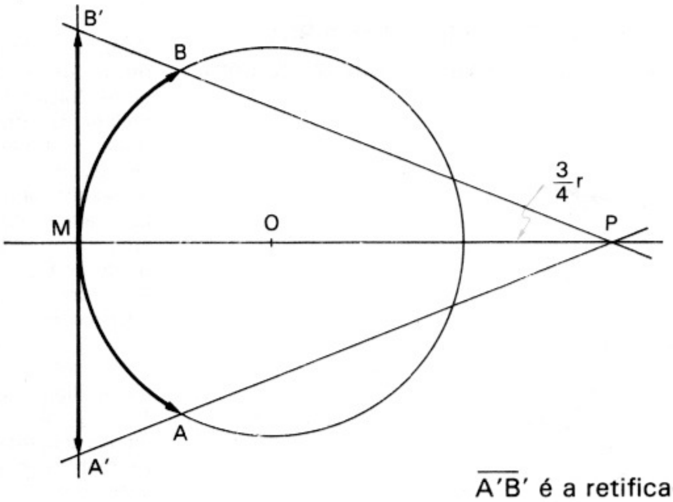


3º passo



2º Caso: $90° < \widehat{AB} < 180°$

Caso o arco a ser retificado tenha a sua medida compreendida entre 90° e 180°, basta tomar um ponto M próximo de seu ponto médio e retificar, pelo caso anterior, simultaneamente, os dois arcos em que ele fica dividido por M.



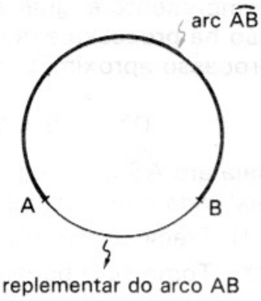
$\overline{A'B'}$ é a retificação do arco AB.

3.º Caso: $180^\circ < \widehat{AB} < 360^\circ$

Caso o arco a ser retificado tenha medida superior a 180°, então procede-se da seguinte forma:

1.º) Retifica-se a circunferência pelo processo de Arquimedes ou de Kochansky.
2.º) Retifica-se o arco replementar daquele cuja retificação se pede.
3.º) Subtrai-se da retificação da circunferência a retificação do replementar. A diferença é a retificação do arco procurado.

O arco replementar de um arco dado é aquele que completa a circunferência do arco dado.



Exercícios

Resolva os exercícios 55 e 56 do caderno de atividades.

E4.7 Retifique um arco de 75° de uma circunferência de raio igual a 35 mm. Qual é o comprimento aproximado desse arco?

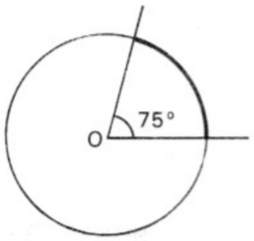
E4.8 Determine graficamente o comprimento de um arco de 120° de uma circunferência de raio igual a 30 mm.

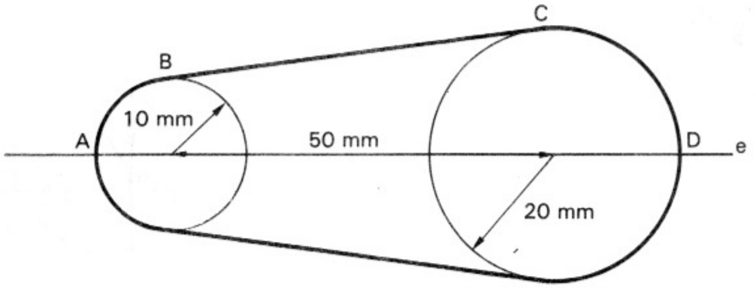
E4.9 No projeto de uma máquina, duas polias, de raios iguais a 150 mm e 300 mm, têm seus centros distantes 750 mm. Determine graficamente o comprimento aproximado de uma correia acoplada a essas polias.

Observação: Resolva na escala de 1 : 15.

Resolução: Primeiramente devemos "imaginar" a figura para poder pensar na resolução.

Lembre-se de que um arco cuja medida em graus é igual a α corresponde a um ângulo central de medida α. Assim, no E4.7, por exemplo, constrói-se um ângulo central de 75° (com régua e compasso) o qual determina um arco de 75° na circunferência.



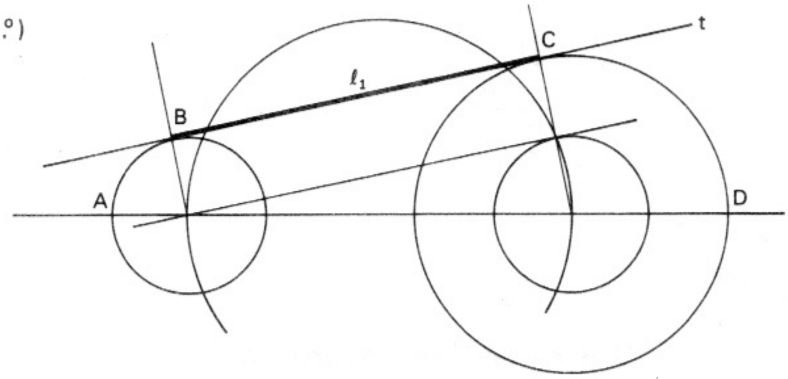


Note que a figura admite o eixo **e** de simetria. Assim, retificando a linha ABCD bastará duplicar o segmento obtido para se ter a resposta.

1.º) Traçamos a tangente **t** comum às duas circunferências, obtendo os pontos B e C de tangência. (A construção da reta **t** encontra-se no 1.º volume.)
2.º) Retificamos arc $\widehat{AB}$ e arc $\widehat{CD}$. (Note que $\widehat{AB} < 90^\circ$ e $\widehat{CD} > 90^\circ$.)
3.º) Ainda graficamente, obtemos a soma das retificações dos arcos com o segmento BC.

Escala de 1 : 15 significa que 1 no desenho vale 15 na realidade, isto é, para fazer o desenho devemos dividir as medidas dadas por 15.

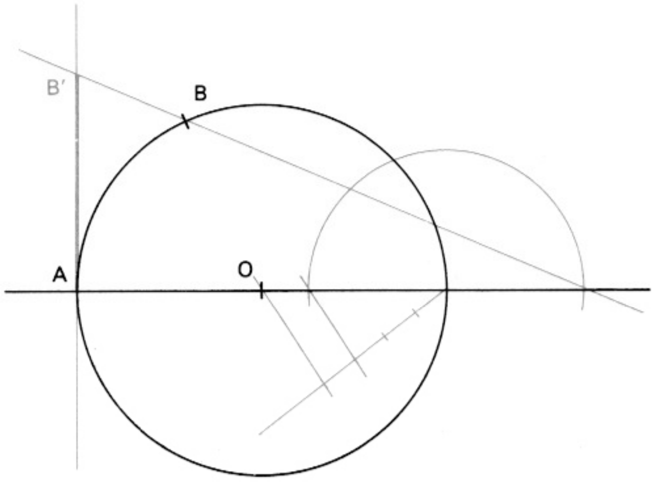
1.º)



Como de costume, a resolução não se apresenta numa única figura, para melhor identificação dos traçados. Porém, tudo deve ser feito numa só figura com o máximo capricho. Observe que para a retificação do arco AB pode-se aproveitar a tangente **t** que fomos obrigados a traçar. Por fim, observe que a soma $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ poderia ser obtida sobre a própria reta **t** (na 2.ª figura) já que $\ell_1 + \ell_2$ = A'C. Quanto menos transportarmos segmentos, maior precisão obteremos.

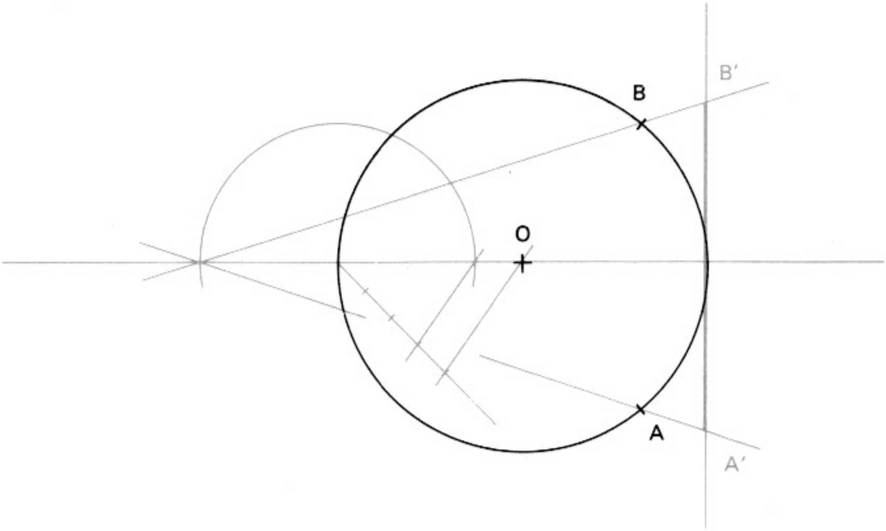
Retificação de arcos de circunferência

55 Retifique o arco AB de sentido horário. ($\widehat{AB} < 90°$)



$\overline{AB'}$ é a resposta.

56 Retifique o arco AB de sentido anti-horário. ($90° < \widehat{AB} < 180°$)



$\overline{A'B'}$ é a resposta.

Figura auxiliar e anotações

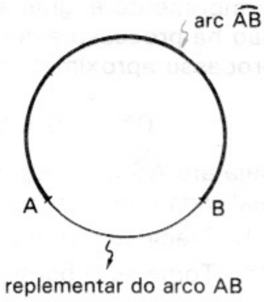
Sugestão:
Aproveite esse problema para dar o conceito de radiano. Graficamente fica bastante fácil mostrar o arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência.

3.º Caso: 180° < $\widehat{AB}$ < 360°

Caso o arco a ser retificado tenha medida superior a 180°, então procede-se da seguinte forma:

1.º) Retifica-se a circunferência pelo processo de Arquimedes ou de Kochansky.
2.º) Retifica-se o arco replementar daquele cuja retificação se pede.
3.º) Subtrai-se da retificação da circunferência a retificação do replementar. A diferença é a retificação do arco procurado.

O arco replementar de um arco dado é aquele que completa a circunferência do arco dado.



Exercícios

E4.7 Retifique um arco de 75° de uma circunferência de raio igual a 35 mm. Qual é o comprimento aproximado desse arco?

Resolva os exercícios 55 e 56 do caderno de atividades.

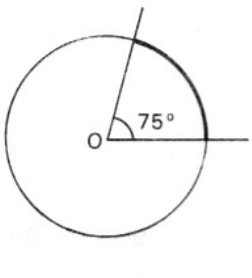
E4.8 Determine graficamente o comprimento de um arco de 120° de uma circunferência de raio igual a 30 mm.

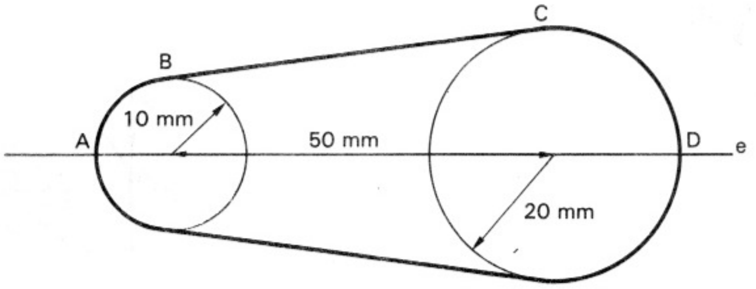
E4.9 No projeto de uma máquina, duas polias, de raios iguais a 150 mm e 300 mm, têm seus centros distantes 750 mm. Determine graficamente o comprimento aproximado de uma correia acoplada a essas polias.

Observação: Resolva na escala de 1 : 15.

Resolução: Primeiramente devemos "imaginar" a figura para poder pensar na resolução.

Lembre-se de que um arco cuja medida em graus é igual a α corresponde a um ângulo central de medida α. Assim, no E4.7, por exemplo, constrói-se um ângulo central de 75° (com régua e compasso) o qual determina um arco de 75° na circunferência.



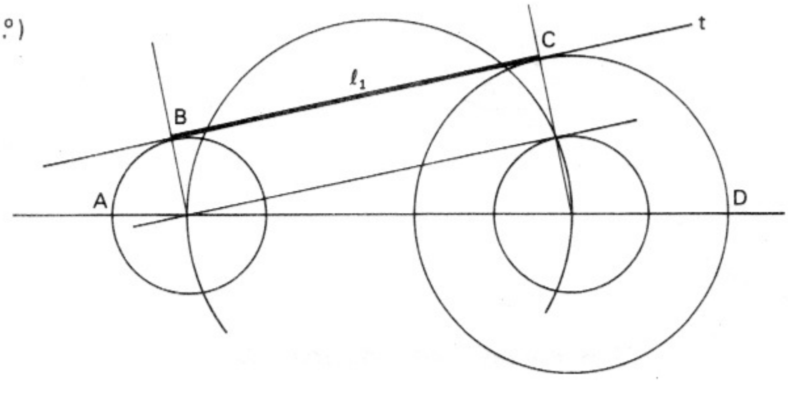


Note que a figura admite o eixo **e** de simetria. Assim, retificando a linha ABCD bastará duplicar o segmento obtido para se ter a resposta.

1.º) Traçamos a tangente **t** comum às duas circunferências, obtendo os pontos B e C de tangência. (A construção da reta **t** encontra-se no 1.º volume.)
2.º) Retificamos arc $\widehat{AB}$ e arc $\widehat{CD}$. (Note que $\widehat{AB} < 90°$ e $\widehat{CD} > 90°$.)
3.º) Ainda graficamente, obtemos a soma das retificações dos arcos com o segmento BC.

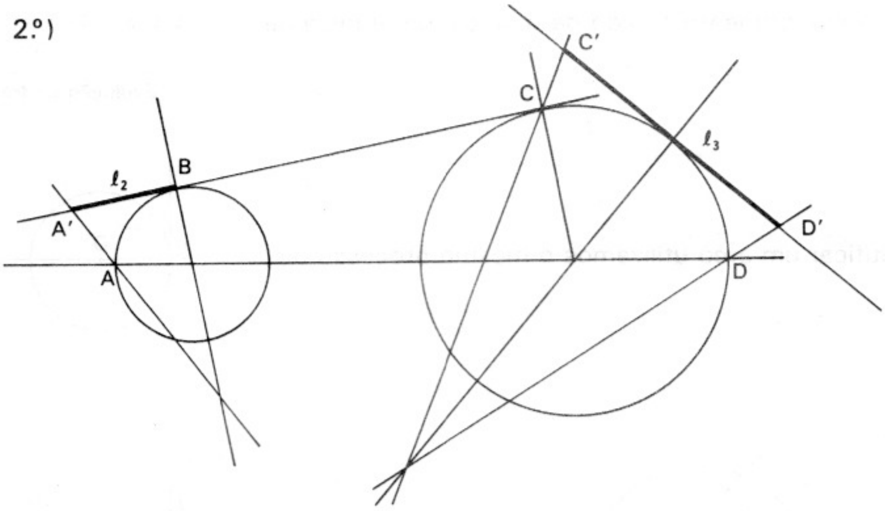
Escala de 1 : 15 significa que 1 no desenho vale 15 na realidade, isto é, para fazer o desenho devemos dividir as medidas dadas por 15.

1.º)

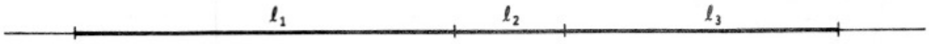


Como de costume, a resolução não se apresenta numa única figura, para melhor identificação dos traçados. Porém, tudo deve ser feito numa só figura com o máximo capricho. Observe que para a retificação do arco AB pode-se aproveitar a tangente **t** que fomos obrigados a traçar. Por fim, observe que a soma $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ poderia ser obtida sobre a própria reta **t** (na 2.ª figura) já que $\ell_1 + \ell_2$ = A'C. Quanto menos transportarmos segmentos, maior precisão obteremos.

2.º)



3.º)



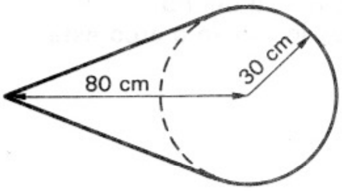
Duplicando a soma $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ e multiplicando por 15, obtemos a resposta.

Resposta: $\simeq$ 2942 mm ou 2,942 m

E4. **10** Uma chapa de metal tem a forma e as dimensões indicadas na figura seguinte. Pede-se então:

a) Faça um desenho da chapa na escala de 1 : 10.

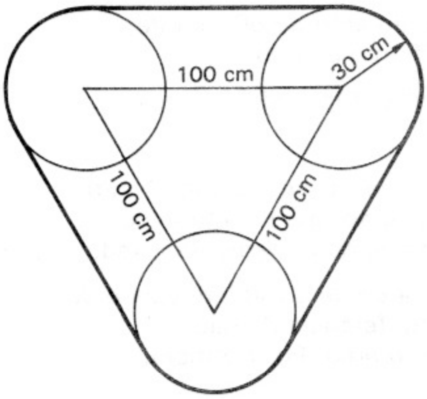
b) Obtenha graficamente o perímetro da chapa.



E4. **11** Um sistema de polias é composto de três polias de raios iguais a 30 cm que têm seus centros nos vértices de um triângulo eqüilátero de lado igual a 100 cm. Determine graficamente o comprimento de uma correia acoplada ao sistema.

Observação: Faça o desenho na escala de 1 : 10.

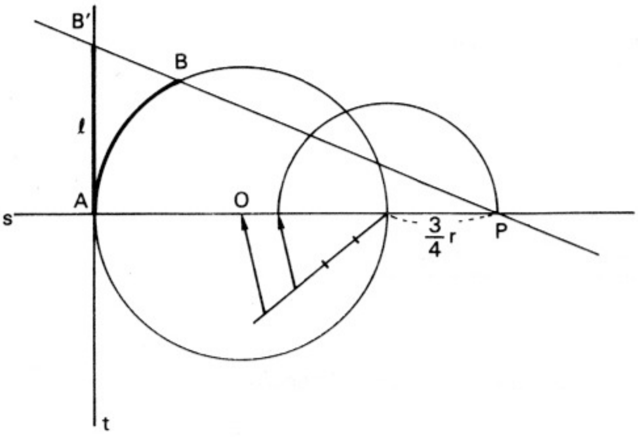
Neste caso é mais simples retificar a terça parte da correia.



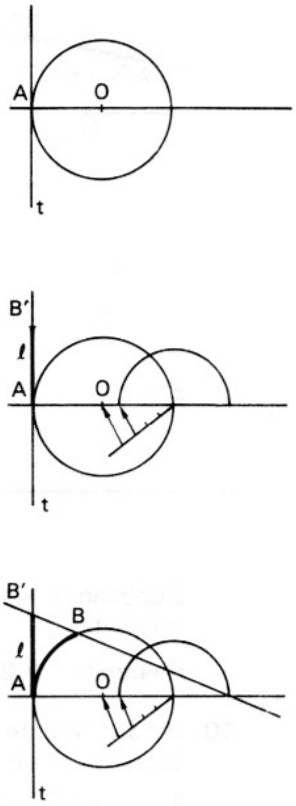
◁ IMPORTANTE

E4.12 Desretifique um arco de comprimento ℓ dado de uma circunferência de raio **r** dado:

Resolução: Para desretificar um arco utilizamos o mesmo processo da retificação.



Evolução do traçado



Basta marcar AB′ = ℓ sobre **t** e conduzir a reta por B′ e P. Essa reta intercepta a circunferência em B e o arco AB é o arco procurado.

Observação: Para avaliar a medida em graus de um arco retificado de uma circunferência de raio **r**, pode-se usar o valor aproximado $\pi = 3$. Evidentemente essa aproximação é grosseira, mas é útil nos problemas de desretificação de arcos, pois nos indica se o arco está entre 0° e 90° ou entre 90° e 180°.

$$90^\circ \rightarrow \frac{\pi r}{2} \simeq \frac{3r}{2}$$

$$180^\circ \rightarrow \pi r \simeq 3r$$

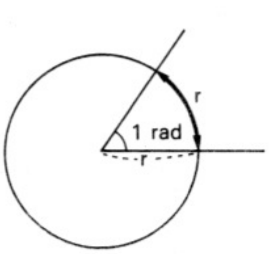
E4.13 Desretifique um arco de 40 mm de comprimento de uma circunferência de 30 mm de raio. Qual é a medida aproximada desse arco em graus? (Evidentemente deve-se utilizar o transferidor para medir a resposta.)

E4.14 Qual é a medida aproximada em graus de um arco de 60 mm de comprimento em uma circunferência de 25 mm de raio?

Observação: Esse arco tem sua medida entre 90° e 180°.

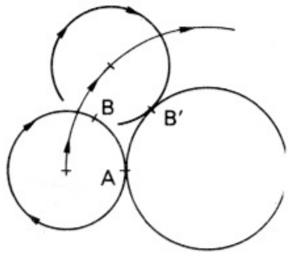
Se o raio é igual a 20 mm, o arco de 1 rad tem 20 mm de comprimento. Se o raio é igual a 37 m, o arco de 1 rad tem comprimento igual a 37 m, e assim por diante.

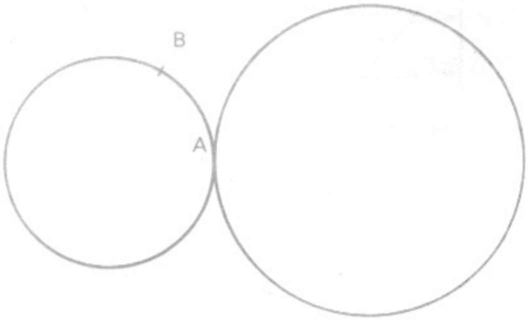
E4.15 Numa circunferência de raio **r** qualquer, define-se um radiano (1 rad) como sendo o arco cujo comprimento é igual ao raio **r**. Determine graficamente a medida aproximada, em graus, de um arco de 1 rad.



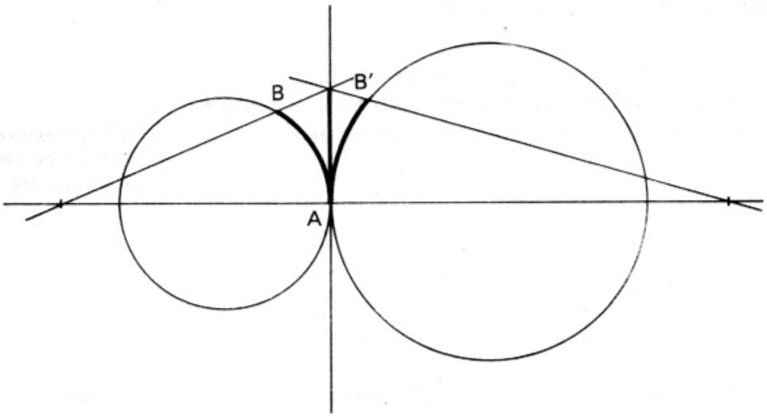
Observação: Como a medida em graus do arco de 1 rad independe do tamanho do raio, convém utilizar uma circunferência de raio convenientemente grande para desretificar o arco. Por exemplo, r = 40 mm.

E4 **16** São dadas duas circunferências tangentes no ponto A e sobre uma delas o ponto B. Suponha que a circunferência que contém o arco AB role sem escorregamento sobre a outra circunferência, com o seu centro seguindo o sentido horário. Determine graficamente o ponto em que B toca pela primeira vez a circunferência fixa.





Resolução: Supondo que o ponto B toque a circunferência no ponto B′, os arcos AB e AB′ terão comprimentos iguais. Assim, basta retificar o arco AB e desretificá-lo sobre a outra circunferência.



Resolva os exercícios de 57 a 59 do caderno de atividades.

Divisão de ângulos

Para dividir um ângulo em 2, 4, 8, ... ou 2^n partes iguais, existe um processo exato, que é o de construir sucessivas bissetrizes. Porém, fora esses casos, não há processo exato para dividir um ângulo qualquer num número qualquer de partes iguais. O processo que passaremos a estudar é aproximativo e baseia-se na retificação de arcos.

Tomemos como exemplo a divisão de um ângulo em três partes iguais, mas observemos que o processo se generaliza para um número qualquer de partes iguais.

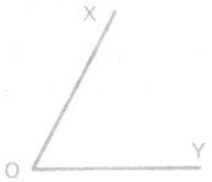
Seja XÔY o ângulo a ser dividido.

1.º) Com centro O e raio qualquer (convenientemente grande), descreve-se uma circunferência, que intercepta os lados do ângulo em A e B.

2.º) Retifica-se o arco AB obtendo-se $\overline{AB}'$.

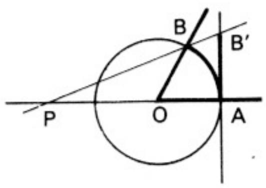
3.º) Divide-se $\overline{AB}'$ no número de partes em que se quer dividir o ângulo.

4.º) As retas conduzidas pelo ponto de divisão e pelo ponto "P" dividem o arco AB em partes iguais.

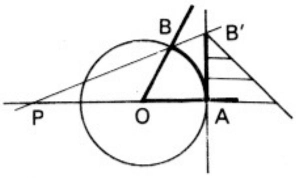


Evolução do traçado

1.º e 2.º passos



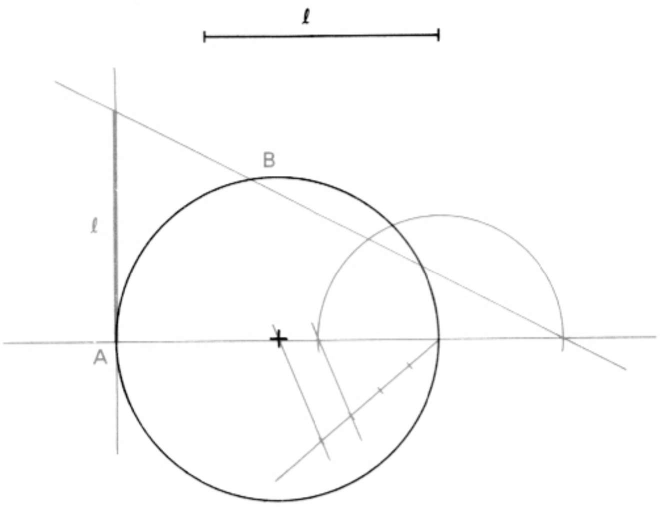
3.º passo



Retificação de arcos de circunferência

Figura auxiliar e anotações

57 Construa um arco de comprimento ℓ sobre a circunferência dada.



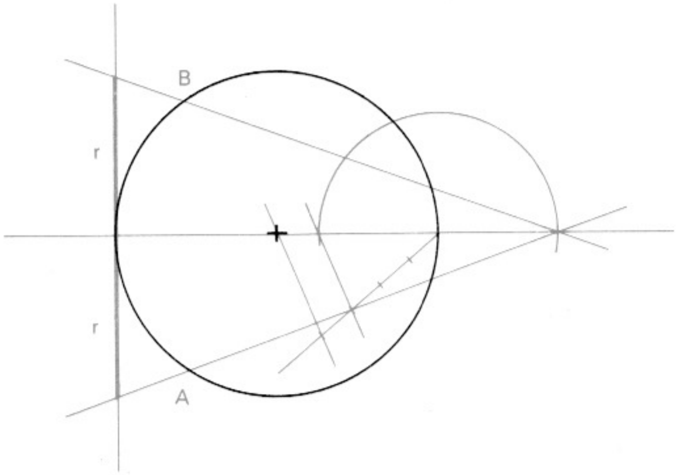
arc $\overset{\frown}{AB}$ é a resposta.

58 Construa, sobre a circunferência de raio **r** dada, um arco de comprimento igual a 2r.

Observação:
Para que o aluno faça um avaliação do intervalo da medida em que se encontra o arco procurado, convém reforçar que:

$$1 \text{ rad} \simeq 60°$$
$$\therefore 2 \text{ rad} \simeq 120°$$

Logo, o arco AB procurado tem sua medida compreendida entre 90° e 180°.

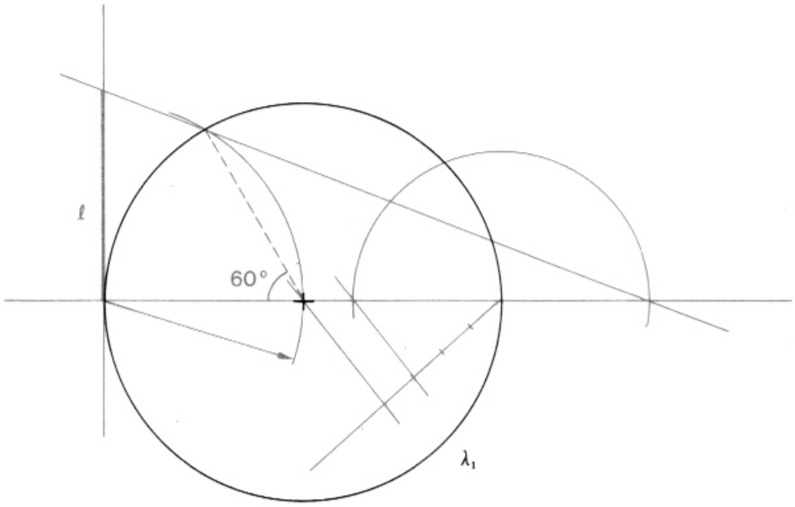


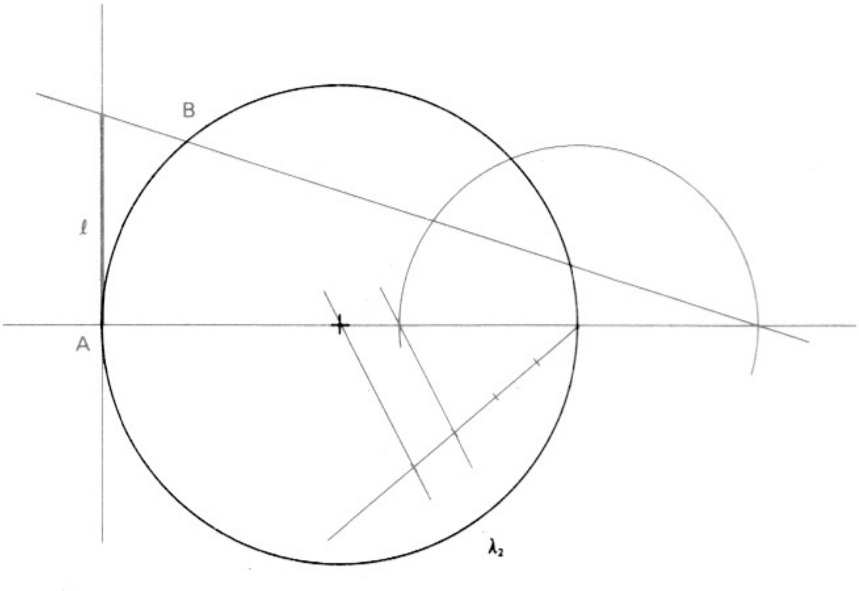
arc $\overset{\frown}{AB}$ é a resposta.

Retificação de arcos de circunferência

Figura auxiliar e anotações

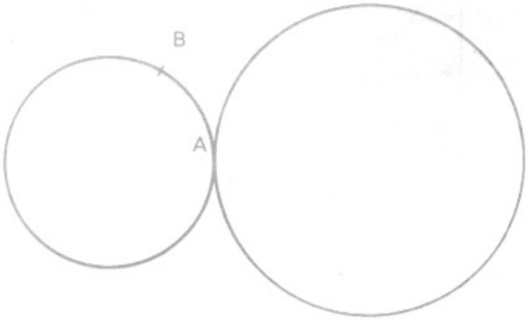
59 Sendo ℓ o comprimento de um arco de 60° da circunferência λ_1, construa um arco de comprimento ℓ sobre a circunferência λ_2.

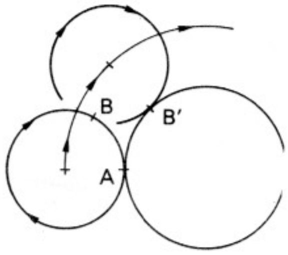




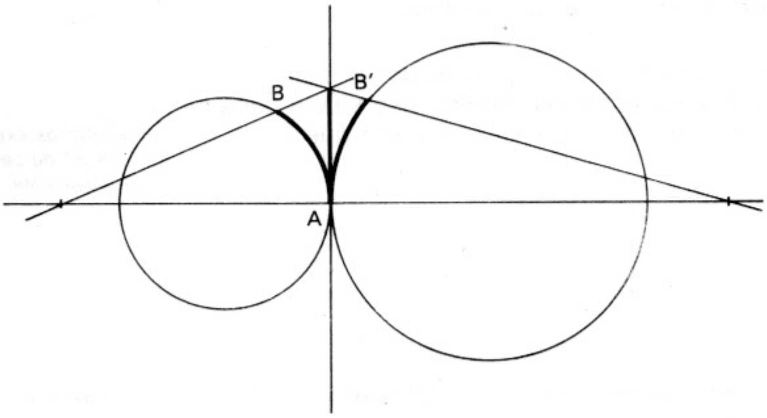
arc $\widehat{AB}$ é a resposta.

E4 **16** São dadas duas circunferências tangentes no ponto A e sobre uma delas o ponto B. Suponha que a circunferência que contém o arco AB role sem escorregamento sobre a outra circunferência, com o seu centro seguindo o sentido horário. Determine graficamente o ponto em que B toca pela primeira vez a circunferência fixa.





Resolução: Supondo que o ponto B toque a circunferência no ponto B′, os arcos AB e AB′ terão comprimentos iguais. Assim, basta retificar o arco AB e desretificá-lo sobre a outra circunferência.



Resolva os exercícios de 57 a 59 do caderno de atividades.

Divisão de ângulos

Para dividir um ângulo em 2, 4, 8, ... ou 2^n partes iguais, existe um processo exato, que é o de construir sucessivas bissetrizes. Porém, fora esses casos, não há processo exato para dividir um ângulo qualquer num número qualquer de partes iguais. O processo que passaremos a estudar é aproximativo e baseia-se na retificação de arcos.

Tomemos como exemplo a divisão de um ângulo em três partes iguais, mas observemos que o processo se generaliza para um número qualquer de partes iguais.

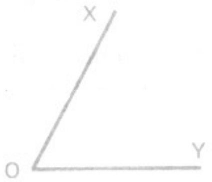
Seja XÔY o ângulo a ser dividido.

1.º) Com centro O e raio qualquer (convenientemente grande), descreve-se uma circunferência, que intercepta os lados do ângulo em A e B.

2.º) Retifica-se o arco AB obtendo-se $\overline{AB}'$.

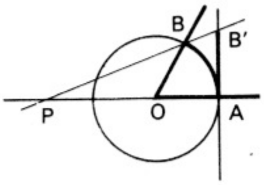
3.º) Divide-se $\overline{AB}'$ no número de partes em que se quer dividir o ângulo.

4.º) As retas conduzidas pelo ponto de divisão e pelo ponto "P" dividem o arco AB em partes iguais.

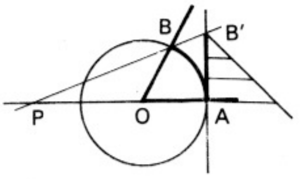


Evolução do traçado

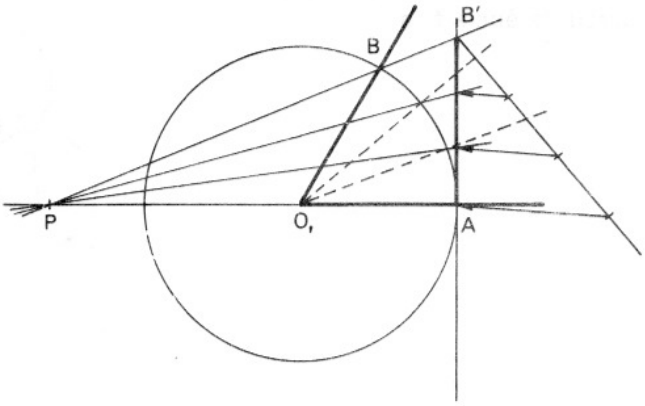
1.º e 2.º passos



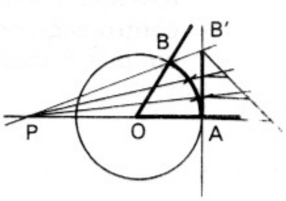
3.º passo



5.º) Ligando **os pontos de divisão do arco** ao vértice O, o ângulo fica dividido em partes iguais.



4.º passo



Observações:

- Se, ao invés de partes iguais, quisermos dividir o ângulo (ou o arco) em partes proporcionais a segmentos ou números dados, bastará dividir $\overline{AB'}$ nas partes proporcionais em que se quer dividir o ângulo e proceder analogamente ao que foi feito.
- Para o caso particular da trisecção de um ângulo, há processos também aproximativos diferentes daquele que apresentamos. Porém, não vale a pena conhecer mais um processo particular quando já possuímos outro que é geral.

Resolva os exercícios 60 e 61 do caderno de atividades.

Exercícios

E4.**17** Construa um ângulo de 48° com régua e compasso. Utilizando o transferidor, meça a sua resposta.

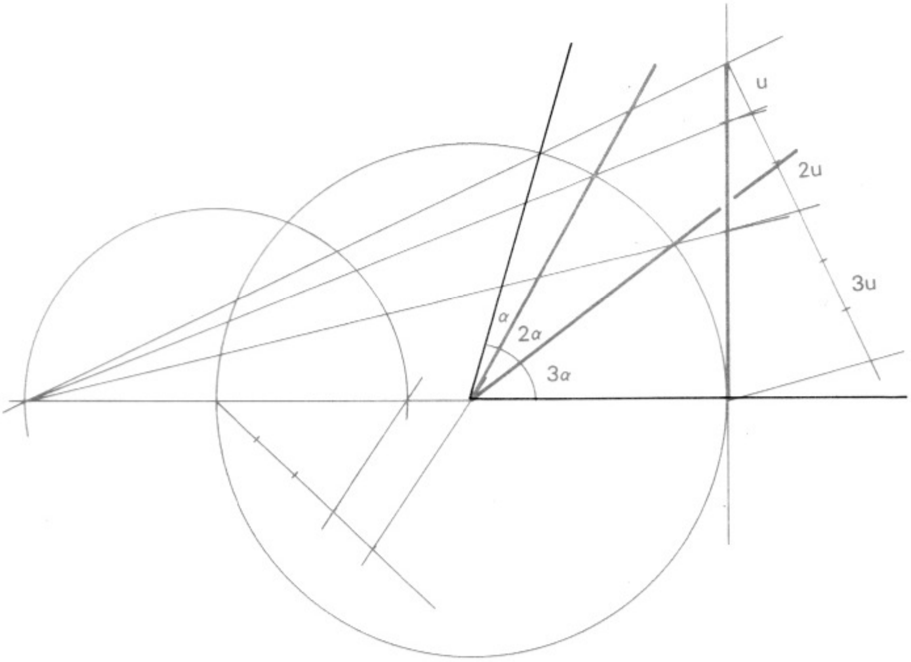
Sugestão: $48° = \frac{2}{5} \cdot 120°$

E4.**18** Construa um triângulo ABC, dados b = c = 90 mm e $\hat{A}$ = 20°. Qual é o valor aproximado de **a**? (Utilizar só régua e compasso.)

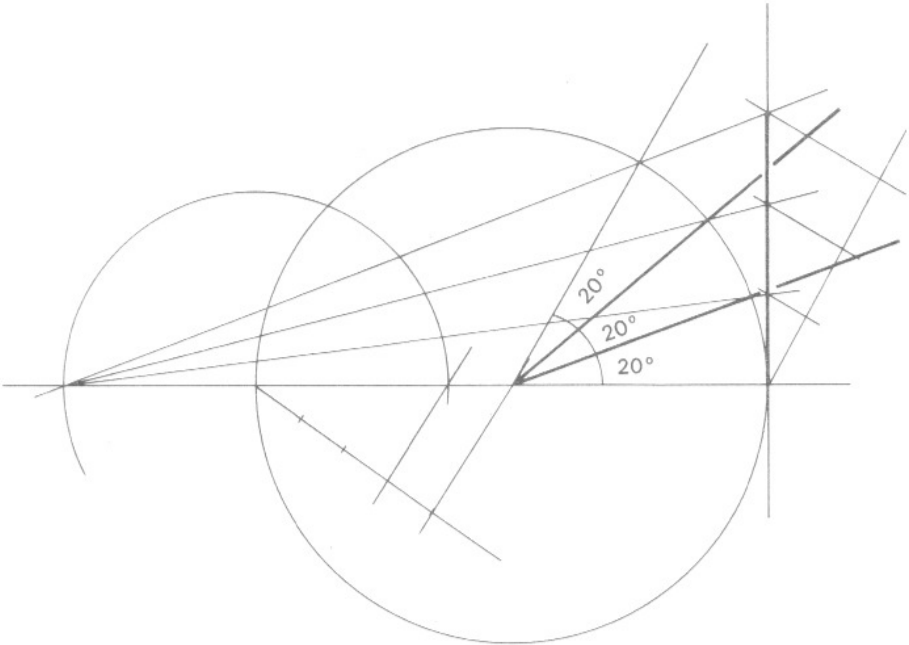
Divisão de ângulos

Figura auxiliar e anotações

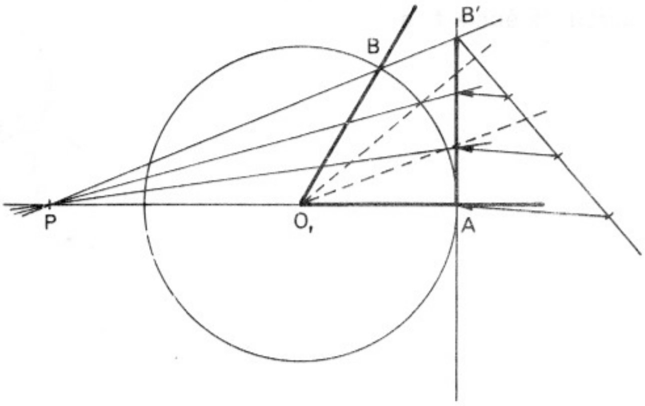
60 Divida o ângulo dado em partes proporcionais a 1, 2 e 3.



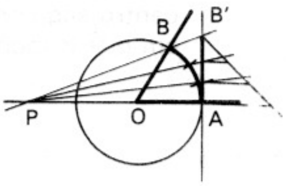
61 Construa um ângulo de 20° dividindo um ângulo de 60° em três partes iguais.



5.º) Ligando **os pontos de divisão do arco** ao vértice O, o ângulo fica dividido em partes iguais.



4.º passo



Observações:

- Se, ao invés de partes iguais, quisermos dividir o ângulo (ou o arco) em partes proporcionais a segmentos ou números dados, bastará dividir $\overline{AB}'$ nas partes proporcionais em que se quer dividir o ângulo e proceder analogamente ao que foi feito.
- Para o caso particular da trisecção de um ângulo, há processos também aproximativos diferentes daquele que apresentamos. Porém, não vale a pena conhecer mais um processo particular quando já possuímos outro que é geral.

Resolva os exercícios 60 e 61 do caderno de atividades.

Exercícios

E4.**17** Construa um ângulo de 48° com régua e compasso. Utilizando o transferidor, meça a sua resposta.

Sugestão: $48° = \frac{2}{5} \cdot 120°$

E4.**18** Construa um triângulo ABC, dados b = c = 90 mm e $\hat{A} = 20°$. Qual é o valor aproximado de **a**? (Utilizar só régua e compasso.)

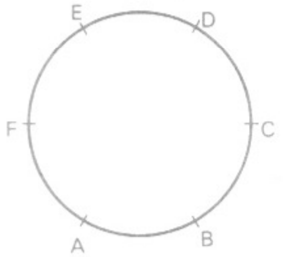
5

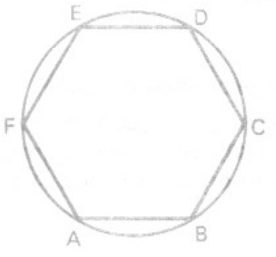
Divisão da circunferência

Divisão da circunferência por processos exatos

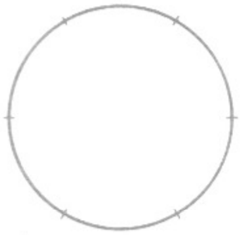
O problema da divisão da circunferência em partes iguais se confunde com o da construção de polígonos regulares. Isso porque os pontos que dividem uma circunferência em um número **n** ($n > 2$) qualquer de partes iguais são sempre vértices de um polígono regular inscrito na mesma.

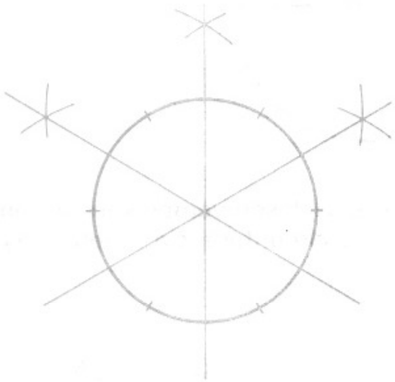
Lembre-se de que polígono regular é todo aquele que possui lados congruentes e ângulos congruentes.





Convém observar, de início, que se a circunferência for dividida em **n** partes iguais, facilmente também o será em 2n partes, traçando-se sucessivas bissetrizes.





Para a divisão da circunferência em um número **n primo** de partes iguais só se conhecem processos particulares exatos para n = 2, 3, 5 e 17 (e portanto para os dobros desses valores, isto é, n′ = 4, 6, 10 e 34 e para os dobros desses últimos e assim por diante), sendo que para n = 17 o processo é por demais complicado para o estudarmos aqui. Embora estejamos estudando processos aproximativos, vamos aproveitar o assunto para discutir os processos exatos para alguns casos particulares.

Nota histórica

Havia mais de 2000 anos que os homens já sabiam dividir a circunferência em 2, 3 e 5 partes iguais com régua e compasso, mas nenhuma outra divisão em número **primo** de partes iguais era conhecida até 30 de março de 1796, quando Carl Friedrich Gauss (1777-1855) dividiu, segundo as regras euclidianas, a circunferência em 17 partes iguais.

Posteriormente, **Gauss** demonstrou que só é possível construir um polígono regular com um número **primo n** de lados, quando **n** é dado pela expressão:

$n = 2^{2^p} + 1$ ($p = 0, 1, 2, \dots$)

Para $p = 0, 1, 2, 3, 4$, de fato **n** resulta primo:

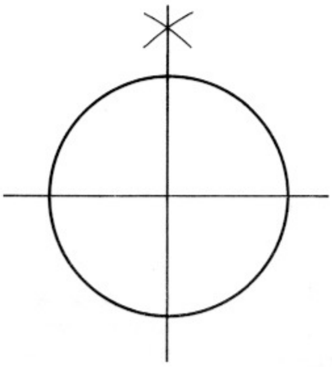
$p = 0 \Rightarrow n = 3$
$p = 1 \Rightarrow n = 5$
$p = 2 \Rightarrow n = 17$
$p = 3 \Rightarrow n = 257$
$p = 4 \Rightarrow n = 65537$

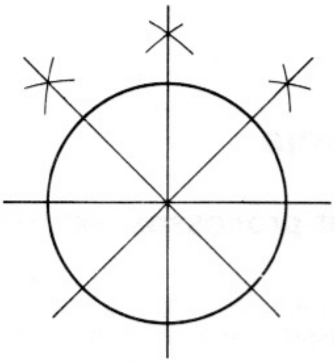
Ocorre que, até hoje, não se sabe se a expressão $2^{2^p} + 1$ resulta em número primo para outros valores de **p** (para p = 5, 6, 7, 8 e 9 não resulta). Por isso, é possível que só existam cinco polígonos regulares, com número primo de lados, construtíveis com régua e compasso.

Divisão em n = 2, 4, 8, 16, ... partes

Nesses casos, o processo é exato e, evidentemente, traçando-se um diâmetro, a circunferência ficará dividida em duas partes iguais. Daí, por sucessivas bissecções, obtemos 4, 8, 16, ...

Para conhecer o problema da divisão da circunferência em 17 partes iguais, leia: *100 great problems of elementary mathematics*, Heinrich Dörrie, New York, Dover Publications, Inc.

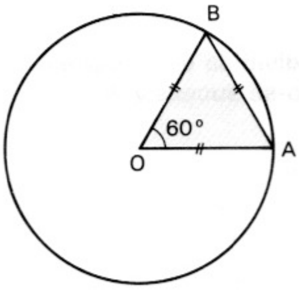




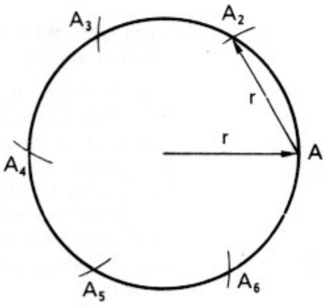
Divisão em n = 3, 6, 12, 24, ... partes

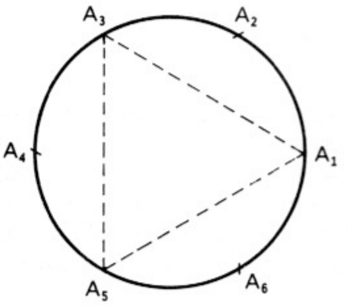
Novamente para essa família de divisões o processo é exato.

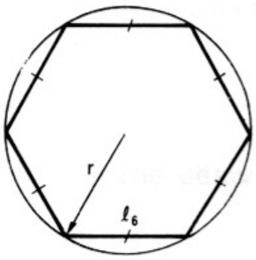
Analisemos o caso da divisão em seis partes iguais. Um arco AB que seja a sexta parte da circunferência medirá 60°. Daí, deduz-se de imediato que o triângulo OAB é eqüilátero, isto é, o comprimento da corda $\overline{AB}$ é igual ao raio da circunferência.



Então, com raio **r** igual ao da circunferência, descrevemos sucessivamente os arcos: centro em um ponto A_1 qualquer da circunferência obtendo A_2; centro em A_2 obtendo A_3 e assim por diante.







$\ell_6 = r$

Observações:

- Evidentemente, por exemplo, os pontos A_1, A_3 e A_5 dividem a circunferência em três partes iguais.
- Os pontos A_1, A_2, ... A_6 são vértices de um hexágono regular. Note que o lado do hexágono regular inscrito numa circunferência tem a mesma medida do raio.
- O lado de um polígono regular de **n** lados é denotado por ℓ_n. Por exemplo, ℓ_4 é o lado do quadrado, ℓ_6 é o lado do hexágono regular etc.

Divisão em n = 5, 10, 20, 40, ... partes

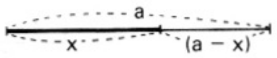
Vamos discutir um processo exato para a divisão da circunferência em 10 partes iguais. Para tanto, precisamos estabelecer a seguinte propriedade.

O áureo de um segmento foi estudado no 1.º volume. Dado um segmento **a**, o áureo de **a** é o segmento **x** tal que:

$$\frac{x}{a} = \frac{a - x}{x}$$

Teorema

O lado do decágono regular inscrito numa circunferência é o segmento áureo do raio.

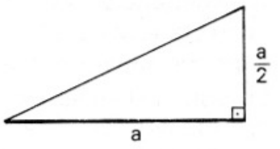


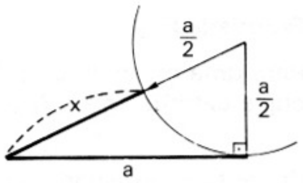
Sendo **r** o raio da circunferência, queremos provar que $\frac{\ell_{10}}{r} = \frac{r - \ell_{10}}{\ell_{10}}$

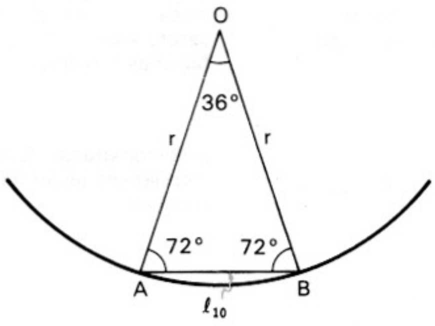
☐ **Demonstração:**

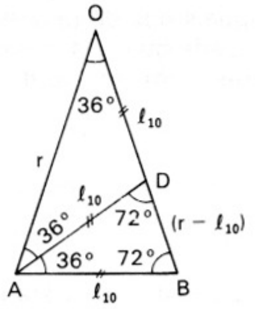
Seja arc $\widehat{AB}$ uma décima parte da circunferência. Então, $\widehat{AB} = 36°$ e $AB = \ell_{10}$. É imediato que no triângulo isósceles OAB, $\hat{O} = 36°$ e $\hat{A} = \hat{B} = 72°$. Traçando a bissetriz interna $\overline{AD}$ desse triângulo, também é imediato verificar que OAD é um triângulo isósceles (pois $\hat{O} = O\hat{A}D = 36°$) e que também ABD é isósceles, sendo que este último é semelhante ao triângulo OAB (eles têm os ângulos respectivamente congruentes).

Naquela ocasião, apresentou-se a seguinte construção para o áureo de um segmento **a**.







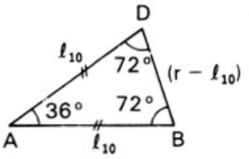


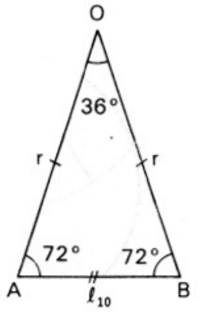
$$\triangle ABD \sim \triangle OAB$$

Convém visualizar bem que para obter o áureo de um segmento **a**:

1.º) constrói-se um triângulo retângulo de catetos **a** e $\frac{a}{2}$;

2.º) subtrai-se $\frac{a}{2}$ da hipotenusa. O segmento restante, na hipotenusa, é o áureo.





Da semelhança dos triângulos ABD e OAB podemos escrever:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \boxed{\frac{\ell_{10}}{r} = \frac{r - \ell_{10}}{\ell_{10}}}$$

Isso é o que queríamos demonstrar.

■ c.q.d.

Assim, para dividir uma circunferência em 10 partes iguais, a construção seguinte se justifica.

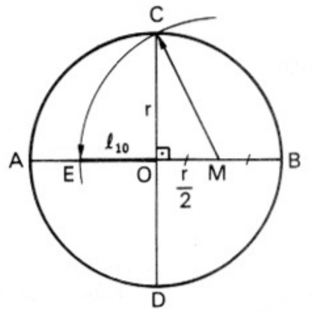
1.º) Traçam-se os diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ perpendiculares.

2.º) Com centro no ponto M, médio de $\overline{OB}$, e raio $\overline{MC}$, descreve-se o arco que intercepta $\overline{OA}$ em E. $\overline{OE}$ é o áureo do raio (ℓ_{10}).

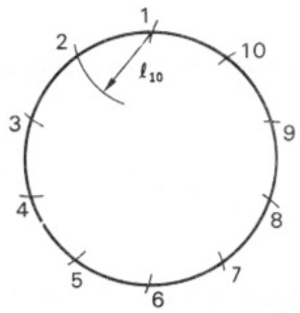
Para as construções do ℓ_{10} e do ℓ_5, é mais conveniente processar a construção do áureo de um segmento **a** como segue.

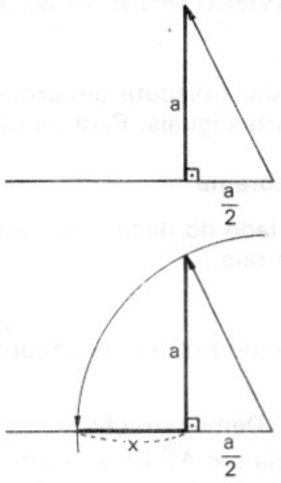
3.º) Fazendo raio igual a ℓ_{10}, a partir de um ponto qualquer da circunferência, efetua-se a divisão.

1.º e 2.º passos



3.º passo





Note que **x** é a diferença entre a hipotenusa e o cateto $\frac{a}{2}$. Desse modo, essa construção é a mesma que a anterior. Apenas no final, ao invés de transportarmos o cateto sobre a hipotenusa, fazemos o contrário.

Observações:

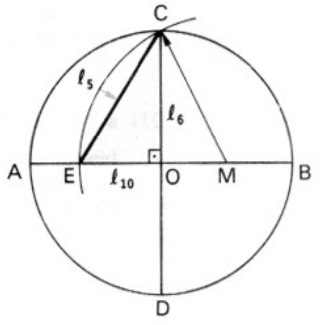
- A experiência mostra que essa divisão, embora de processo exato, não raro acarreta erros gráficos finais significativos. Por isso, mais do que nunca, o capricho deve ser máximo nessa construção.
- Embora a divisão em 10 partes iguais nos dê também a divisão em cinco partes, convém citar uma propriedade que relaciona ℓ_5, ℓ_6 e ℓ_{10}, permitindo dividir diretamente em cinco partes, sem ter que dividir em 10.

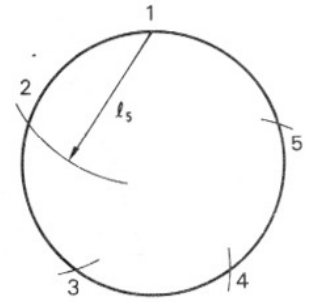
Propriedade

Para uma mesma circunferência, o ℓ_5 é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são o ℓ_6 e o ℓ_{10}.

A demonstração dessa propriedade encontra-se no apêndice.

Por essa propriedade, como $\ell_6 = r$, a construção vista para o ℓ_{10} nos dá o ℓ_5. De fato, note que $\overline{CE}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos ℓ_6 e ℓ_{10}. Portanto, $CE = \ell_5$.



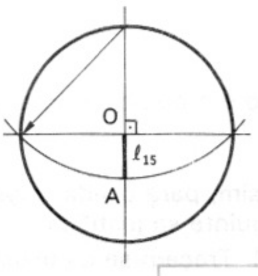


Divisão em n = 15, 30, 60, ... partes

Para encerrar as famílias de divisões em partes iguais por processos exatos, vamos estudar a divisão em 15 partes iguais. Teoricamente o problema é muito simples, mas graficamente, devido ao grande número de operações que ele exige, costuma-se chegar a resultados não bons. (Por essa razão, ao lado está indicado um processo que, embora aproximativo, dá resultados gráficos melhores.)

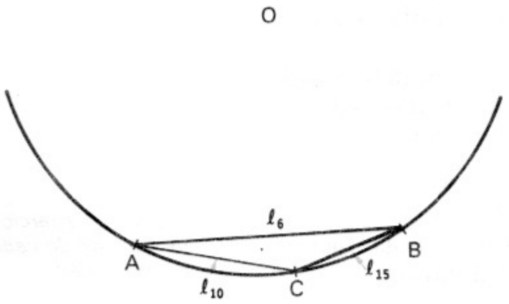
O arco que é uma décima quinta parte da circunferência mede 24°, isto é, $\frac{360°}{15}$.

O ℓ_{15} aproximado



$OA \simeq \ell_{15}$

Como o ℓ_6 subentende um arco de 60° e o ℓ_{10} um arco de 36°, é fácil obter o ℓ_{15} a partir daqueles dois, pois $24° = 60° - 36°$.



$$\left.\begin{array}{l} AB = \ell_6 \Rightarrow \widehat{AB} = 60° \\ AC = \ell_{10} \Rightarrow \widehat{AC} = 36° \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{BC} = 24°$$

$$\therefore\ BC = \ell_{15}$$

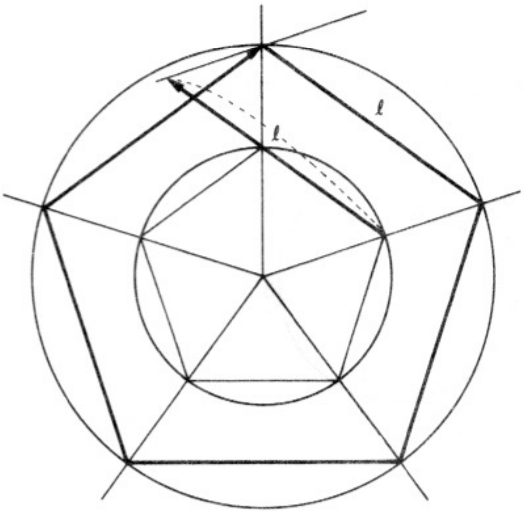
Exercícios

E5.1 Numa circunferência de raio igual a 50 mm inscreva os polígonos regulares seguintes e dê as medidas aproximadas dos seus lados:

a) octógono (n = 8)
b) dodecágono (n = 12)
c) decágono (n = 10)
d) pentágono (n = 5)

E5.2 Construa um pentágono regular de lado ℓ dado.

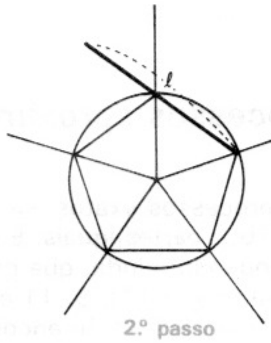
Resolução: A partir de uma circunferência de raio qualquer, construímos um pentágono regular auxiliar. Então, através de **homotetia**, damos ao pentágono o lado desejado (Veja o E3.5).



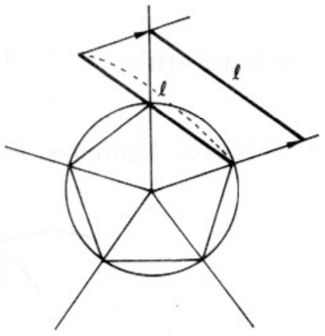
Observação: O processo utilizado na resolução desse problema é muito bom para construir polígonos regulares de lados dados. Evidentemente, o triângulo eqüilátero, o quadrado e o hexágono regular dispensam esse artifício, já que podem ser construídos facilmente a partir do lado. (No caso do hexágono, como $\ell_6 = r$, basta começar com uma circunferência de raio igual ao lado dado.)

Evolução do traçado

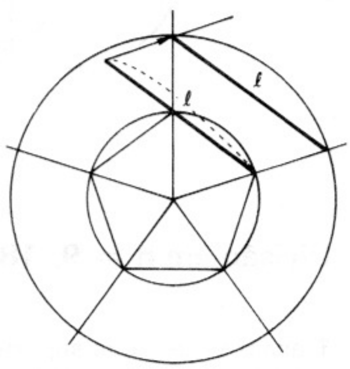
1.º passo



2.º passo



3.º passo



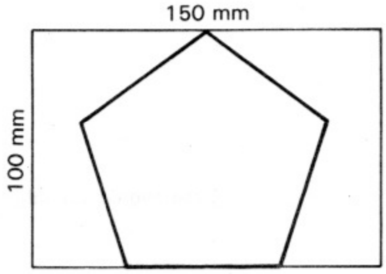
E5. **3** Construa um decágono regular de lado $\ell = 26$ mm. Qual é a medida do raio da circunferência circunscrita a esse polígono?

E5. **4** Um octógono regular de lado $\ell = 30$ mm está inscrito numa circunferência. Determine graficamente o raio dessa circunferência.

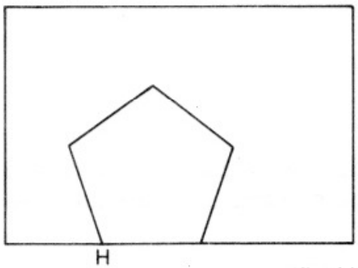
E5. **5** Dispondo de uma folha de papel de forma retangular, com dimensões de 150 mm por 100 mm, pretende-se recortar um pentágono regular de lado máximo. Qual é aproximadamente a medida do lado?

Sugestão: Na figura **a** vê-se o pentágono máximo e na **b**, um pentágono arbitrário, a partir do qual se obtém o máximo por homotetia. O centro de homotetia pode ser o ponto H. (É mais fácil primeiro construir o pentágono auxiliar e depois o retângulo.)

Resolva os exercícios de 62 a 66 do caderno de atividades.



(fig. a)



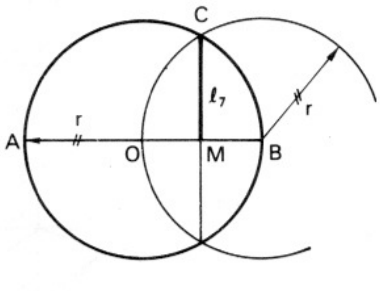
(fig. b)

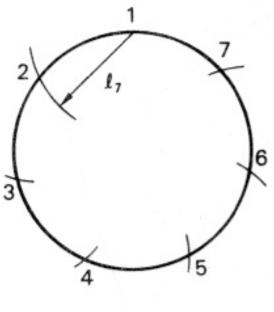
Processos aproximativos para divisão da circunferência

Por processos exatos, sabemos dividir a circunferência em 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15... partes iguais. É interessante completar as lacunas dessa seqüência, aprendendo, ainda, que por processos aproximativos é possível dividi-la em 7 (portanto em 14), 9, 11 e 13 partes iguais. As justificativas das construções que se apresentarão encontram-se no apêndice.

Divisão em n = 7, 14, 28, ... partes

O processo é simples, a ponto de deixarmos que a própria figura o explique.





$$MC \simeq \ell_7$$

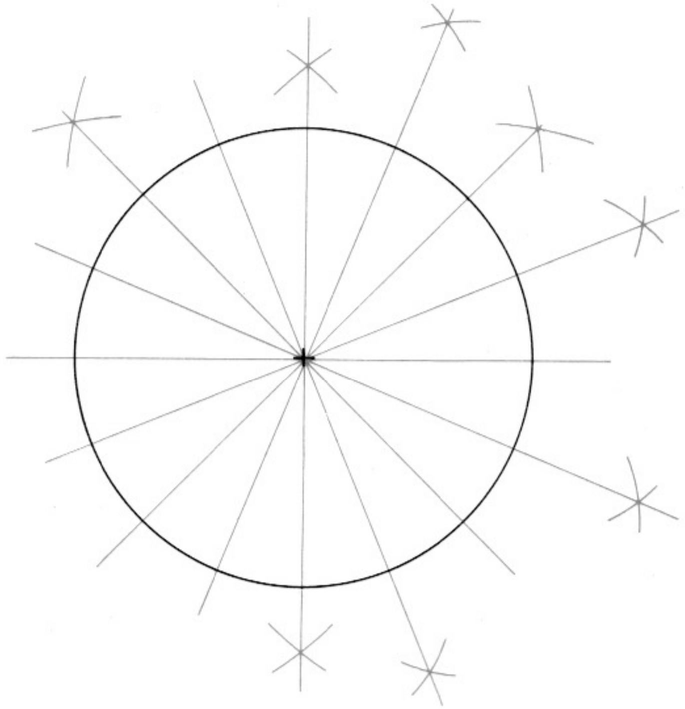
Divisão em n = 9, 18, 36, ... partes

Traçam-se as retas suportes de dois diâmetros perpendiculares quaisquer e, em seguida, sucessivamente, os seguintes arcos de circunferências.

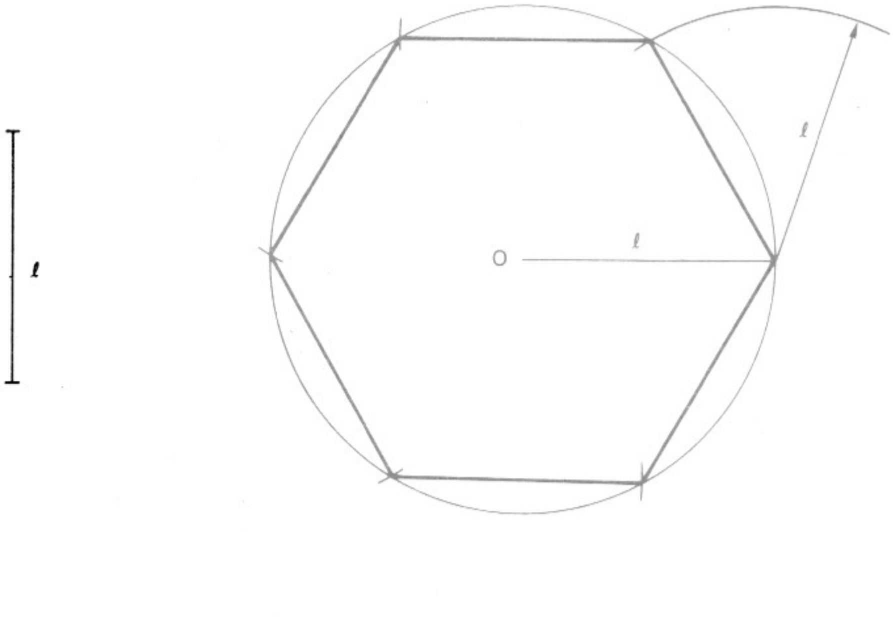
Divisão da circunferência: processo exato (construção de polígono)

Figura auxiliar e anotações

62 Divida a circunferência dada em 16 partes iguais.

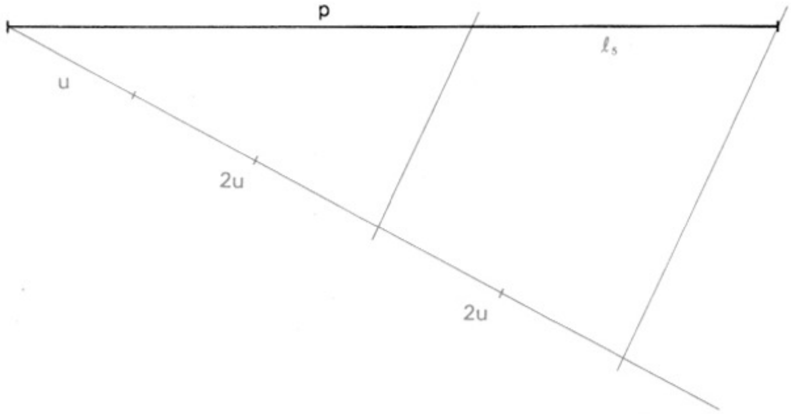


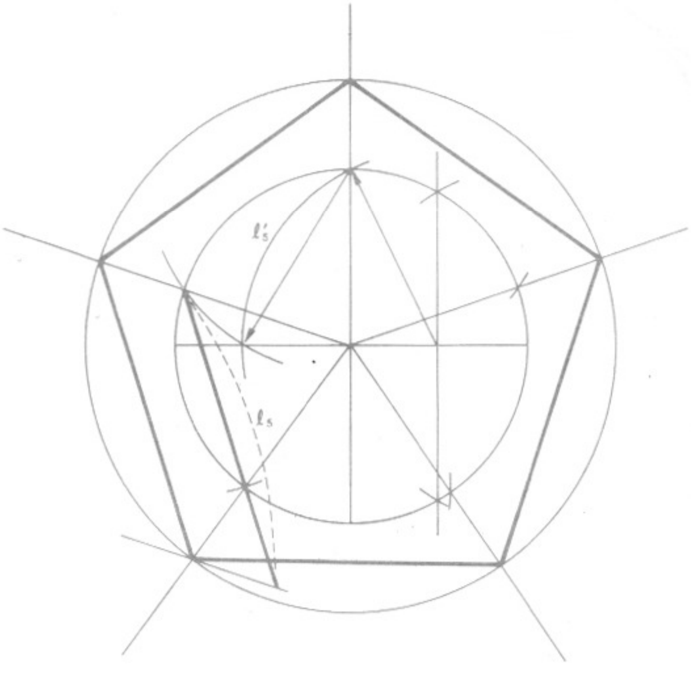
63 Construa um hexágono regular de lado ℓ dado.



Divisão da circunferência: processo exato (construção de polígono)

64 Construa um pentágono regular, dado o seu semiperímetro **p**.
Sugestão: Para obter o lado do pentágono, basta dividir **p** em partes proporcionais a 1,2 e 2.





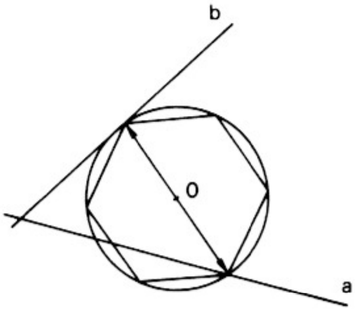
Divisão da circunferência: processo exato (construção de polígono)

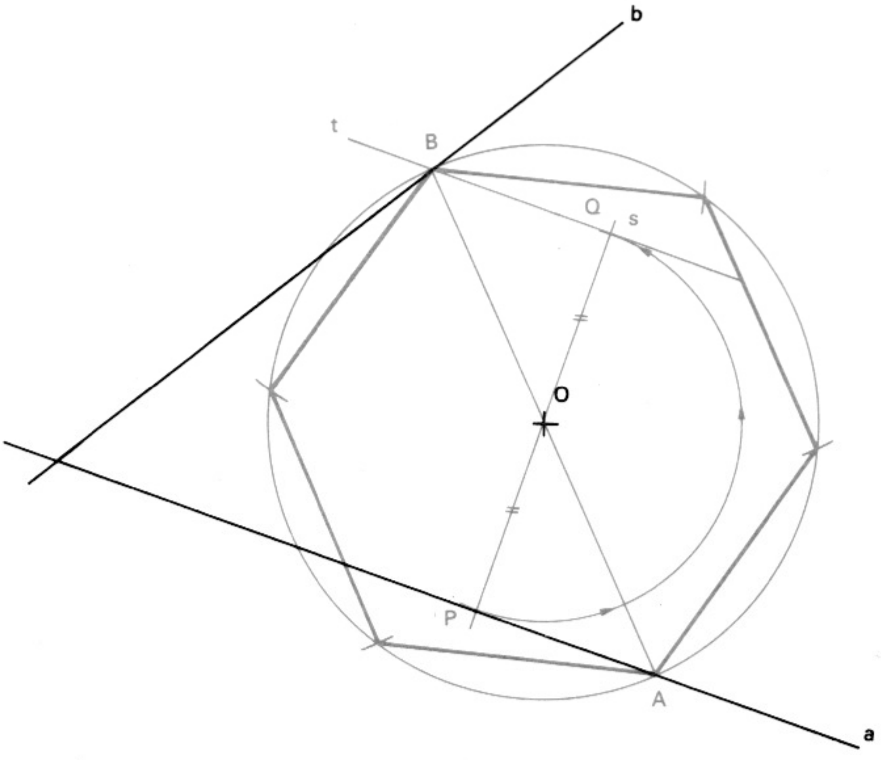
65 São dados um ponto O e duas retas **a** e **b**. Construa um hexágono regular que tenha centro em O e dois vértices diametralmente opostos situados um em **a** e outro em **b**.

Sugestão: A construção da circunferência circunscrita é o exercício 41 deste caderno.

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Talvez seja conveniente relembrar rapidamente como se multiplica uma reta por −1 em relação a um centro de homotetia.





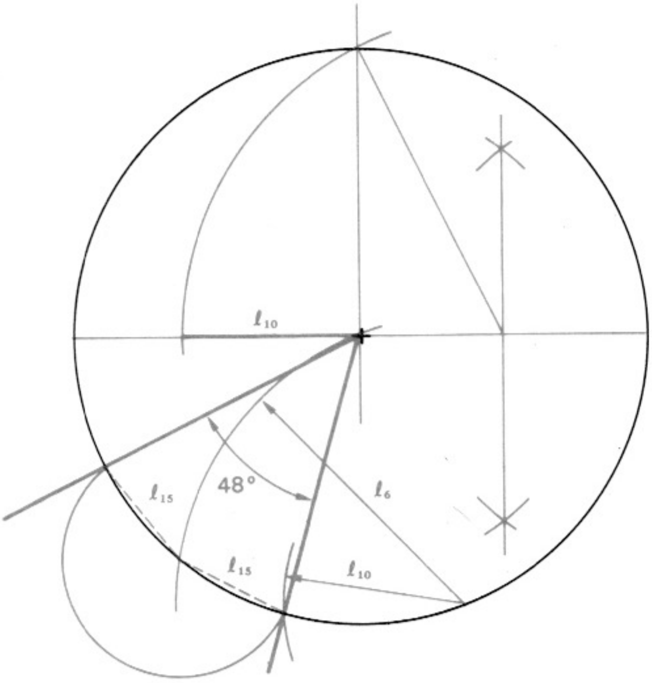
1.º) Reta **s** qualquer passando por O.
2.º) OQ = OP
3.º) Reta t // **a** passando por Q, determinando B em **b**.
4.º) Reta BO, determinando A em **a**. $\overline{AB}$ é o diâmetro procurado.

Divisão da circunferência: processo exato (construção de arco) — processo geral

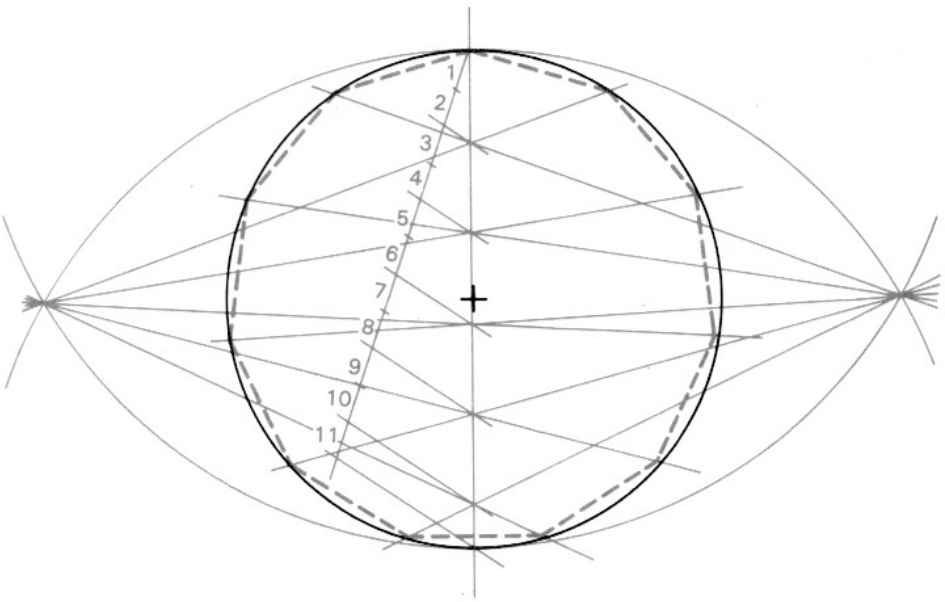
Figura auxiliar e anotações

66 Obtenha graficamente um arco de 48° na circunferência dada por um processo exato.

Sugestão: Basta construir o ℓ_{15} e aplicá-lo duas vezes. (Meça a resposta.)


ℓ_{10}
ℓ_{15}
48°
ℓ_6
ℓ_{15}
ℓ_{10}

67 Divida a circunferência dada em 11 partes iguais pelo processo de Rinaldini.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

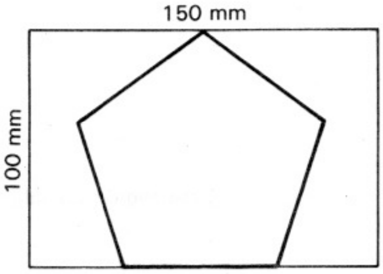
E5. **3** Construa um decágono regular de lado $\ell = 26$ mm. Qual é a medida do raio da circunferência circunscrita a esse polígono?

E5. **4** Um octógono regular de lado $\ell = 30$ mm está inscrito numa circunferência. Determine graficamente o raio dessa circunferência.

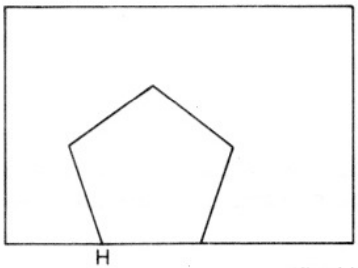
E5. **5** Dispondo de uma folha de papel de forma retangular, com dimensões de 150 mm por 100 mm, pretende-se recortar um pentágono regular de lado máximo. Qual é aproximadamente a medida do lado?

Sugestão: Na figura **a** vê-se o pentágono máximo e na **b**, um pentágono arbitrário, a partir do qual se obtém o máximo por homotetia. O centro de homotetia pode ser o ponto H. (É mais fácil primeiro construir o pentágono auxiliar e depois o retângulo.)

Resolva os exercícios de 62 a 66 do caderno de atividades.



(fig. a)



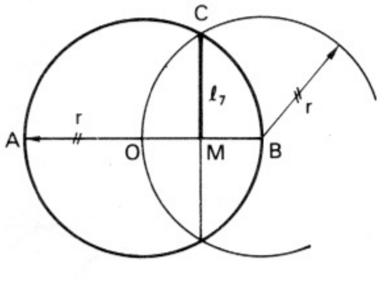
(fig. b)

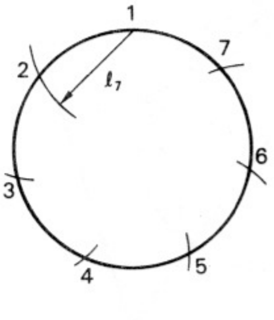
Processos aproximativos para divisão da circunferência

Por processos exatos, sabemos dividir a circunferência em 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15... partes iguais. É interessante completar as lacunas dessa seqüência, aprendendo, ainda, que por processos aproximativos é possível dividi-la em 7 (portanto em 14), 9, 11 e 13 partes iguais. As justificativas das construções que se apresentarão encontram-se no apêndice.

Divisão em n = 7, 14, 28, ... partes

O processo é simples, a ponto de deixarmos que a própria figura o explique.



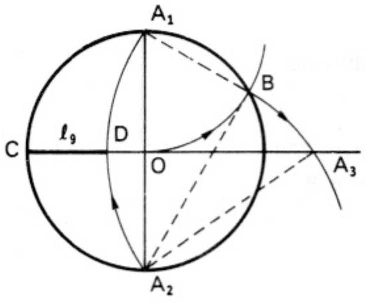


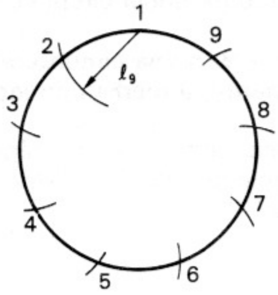
$MC \simeq \ell_7$

Divisão em n = 9, 18, 36, ... partes

Traçam-se as retas suportes de dois diâmetros perpendiculares quaisquer e, em seguida, sucessivamente, os seguintes arcos de circunferências.

1.º) centro em A_1 e raio $\overline{A_1O}$ obtendo B;
2.º) centro em A_2 e raio $\overline{A_2B}$ obtendo A_3;
3.º) centro em A_3 e mesmo raio $\overline{A_2B}$ obtendo D.

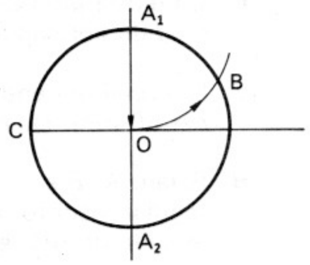

A_1
B
C
ℓ_9
D
O
A_3
A_2


1
2
3
4
5
6
7
8
9
ℓ_9

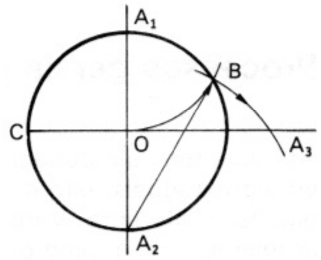
$CD \simeq \ell_9$

Evolução do traçado

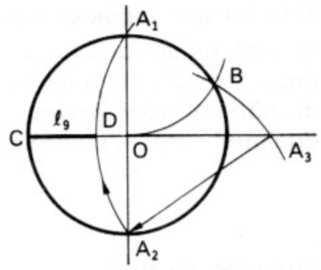
1.º passo



2.º passo

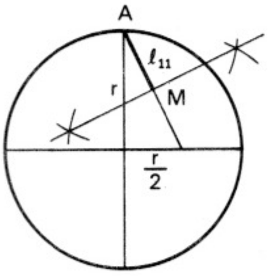


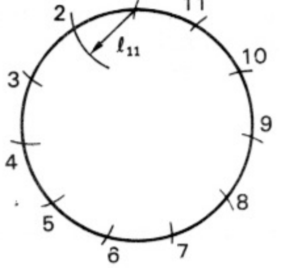
3.º passo


A_1
B
C
ℓ_9
D
O
A_3
A_2

Divisão em n = 11, 22, 44, ... partes

Sendo **r** o raio.da circunferência a ser dividida, constrói-se um triângulo retângulo de catetos **r** e $\frac{r}{2}$. O ℓ_{11} é aproximadamente igual à metade da hipotenusa desse triângulo.


A
ℓ_{11}
r
M
$\frac{r}{2}$


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
ℓ_{11}

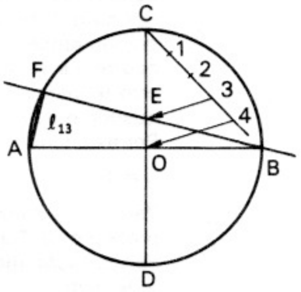
$AM \simeq \ell_{11}$

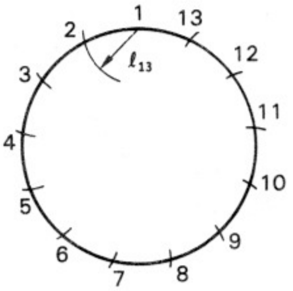
Divisão em n = 13, 26, 52, ... partes

1.º) Traçam-se os diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ perpendiculares.

2.º) Sobre $\overline{OC}$ toma-se E com $OE = \frac{1}{4}OC$.

3.º) A reta conduzida por B e E intercepta a circunferência em F e AF é aproximadamente igual ao ℓ_{13}.


C
1
2
3
4
F
E
ℓ_{13}
A
O
B
D


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
ℓ_{13}

$AF \simeq \ell_{13}$

Exercícios

E5.**6** Construa um heptágono regular (n = 7) de lado ℓ = 40 mm. Qual é a medida aproximada do raio da circunferência circunscrita?

E5.**7** Inscreva um eneágono regular (n = 9) numa circunferência de raio r = 50 mm. Qual é, aproximadamente, a medida do lado?

E5.**8** Sejam A, B e C três vértices consecutivos do undecágono (n = 11) regular inscrito numa circunferência de raio r = 50 mm. Qual é a medida de $\overline{AC}$, aproximadamente?

Processos gerais para divisão da circunferência

Até aqui temos estudado processos particulares de divisão da circunferência em partes iguais, isto é, para cada número de partes apresentamos um processo diferente. Vamos agora apresentar alguns processos gerais para o problema (isto é, para qualquer número de partes aplica-se um mesmo processo). Convém observar que eles são aproximativos e que, **quando se propõe uma divisão, devemos sempre efetuá-la por um processo exato quando este for um daqueles casos estudados.**

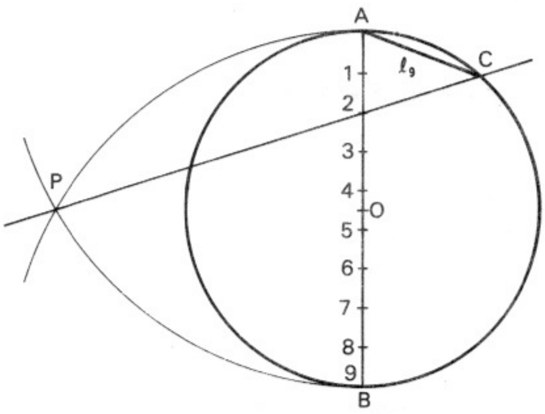
Nos casos em que a divisão não tem solução exata, pode-se empregar um dos processos aproximativos seguintes. (As figuras que seguem exemplificam a divisão em nove partes, porém os processos se aplicam para um número qualquer, procedendo-se analogamente ao que será feito adiante.)

Processo de Bion

1.º) Divide-se um diâmetro $\overline{AB}$ qualquer no mesmo número de partes iguais que se quer dividir a circunferência.

2.º) Com centros em A e em B, e raios iguais ao diâmetro AB, traçam-se os arcos que se interceptam em P.

3.º) A reta conduzida por P e pelo segundo ponto de divisão do diâmetro a partir de A, corta a circunferência no ponto C. $\overset{\frown}{AC}$ é aproximadamente igual a uma das **n** partes em que se quer dividir a circunferência.



$\boxed{AC \simeq \ell_9}$

Veja, abaixo, a evolução do erro teórico que aparece no processo de Bion:

n = 5 ⇒ erro = −0,0007
n = 8 ⇒ erro = + 0,004
n = 16 ⇒ erro = + 0,04

Percebe-se, então, que o erro teórico vai aumentando quando n aumenta.
Por outro lado, verifica-se que no processo de Tempier ocorre o inverso, isto é, o erro teórico vai diminuindo quando n aumenta.
Por exemplo:

n = 16 ⇒ e = + 0,0002

Para n não inferior a 8, o processo de Tempier dá uma aproximação melhor do que o de Bion.

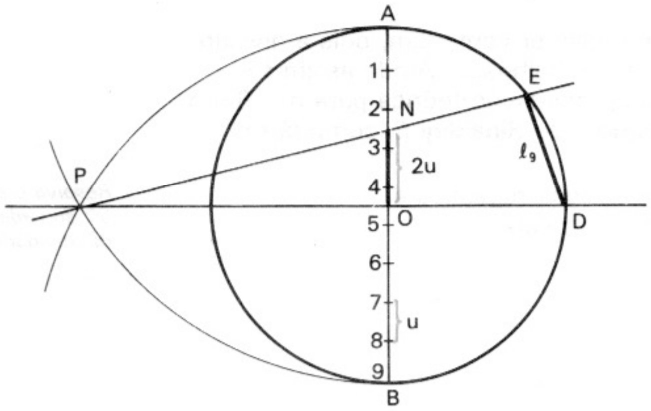
Processo de Tempier

Com uma pequena variação no processo de **Bion** tem-se o processo de **Tempier**.

1.º) Divide-se $\overline{AB}$ e obtém-se o ponto P, como no processo de Bion.

2.º) Sobre $\overline{AB}$, a partir do centro O, toma-se ON igual a **duas** das unidades em que $\overline{AB}$ foi dividido.

3.º) Traçam-se as retas por P e O, e por P e N, determinando D e E na circunferência. $\overset{\frown}{DE}$ é aproximadamente igual a uma das **n** partes procuradas.



$\boxed{DE \simeq \ell_9}$

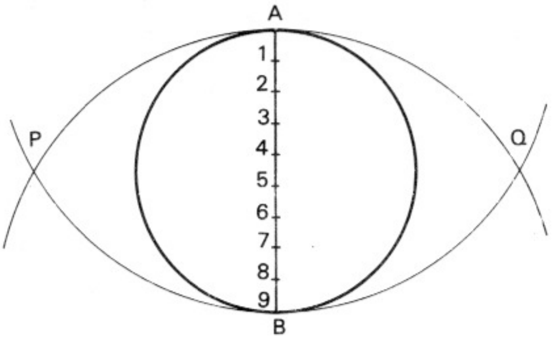
Processo de Rinaldini

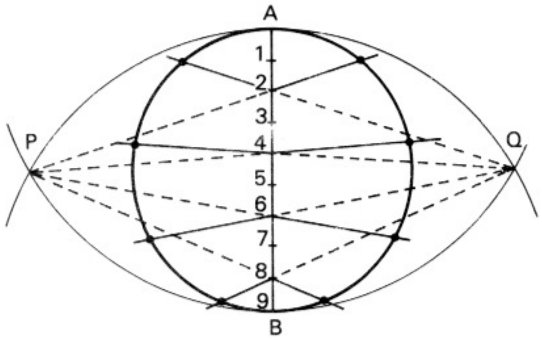
O processo de **Rinaldini** é apenas uma extensão do de **Bion**.

1.º) Divide-se $\overline{AB}$ e obtém-se o ponto P como no processo de **Bion**.

2.º) Com os mesmos arcos que determinam P, obtém-se Q do outro lado de $\overline{AB}$.

3.º) Por P e Q, separadamente, traçam-se as retas passando pelos pontos de ordem par (ou de ordem ímpar) de divisão do diâmetro. Essas retas interceptam a circunferência em pontos que dividem-na no número de partes aproximadamente iguais que se desejava.





Observação: Todos os processos aproximativos de divisão da circunferência que estudamos, exceção feita ao de **Rinaldini**, levam à construção do **lado** do polígono inscrito (ℓ_7 para sete partes, ℓ_9 para nove partes etc.). Uma vez obtido esse lado, por transportes sucessivos do mesmo, é que efetuamos a divisão propriamente dita. (No mais, o mesmo se faz nas divisões por processos exatos, excluídos os casos de bissecções.)

Pois bem, um tal procedimento faz com que o erro, fundamentalmente o erro gráfico, se acumule multiplicativamente no último arco.

Nesse aspecto, o processo de **Rinaldini** leva vantagem sobre os demais, pois, além de nos dar diretamente os pontos de divisão, distribui o erro simetricamente em duas semicircunferências. Outra vantagem que ele nos dá é o fato de ser geral, isto é, vale para qualquer número de partes que se queira dividir a circunferência.

Por outro lado, quando o processo de **Rinaldini** é comparado com os aproximativos particulares, estes levam nítida vantagem quanto à simplicidade de execução. (Veja o ℓ_7, por exemplo.)

Já os processos de **Bion** e **Tempier** não têm qualquer vantagem, pois a divisão é feita por transportes do ℓ_n e, além disso, são trabalhosos. Ainda assim foi conveniente citá-los, o de **Tempier** pela boa aproximação teórica para $n > 8$ e o de **Bion** porque seria injusto não fazê-lo, já que o de **Rinaldini** é, como já foi dito, apenas uma extensão do primeiro.

Por fim, o ideal, para o leitor, é conhecer os vários processos e, aprendendo-os, optar por aquele que lhe parecer melhor.

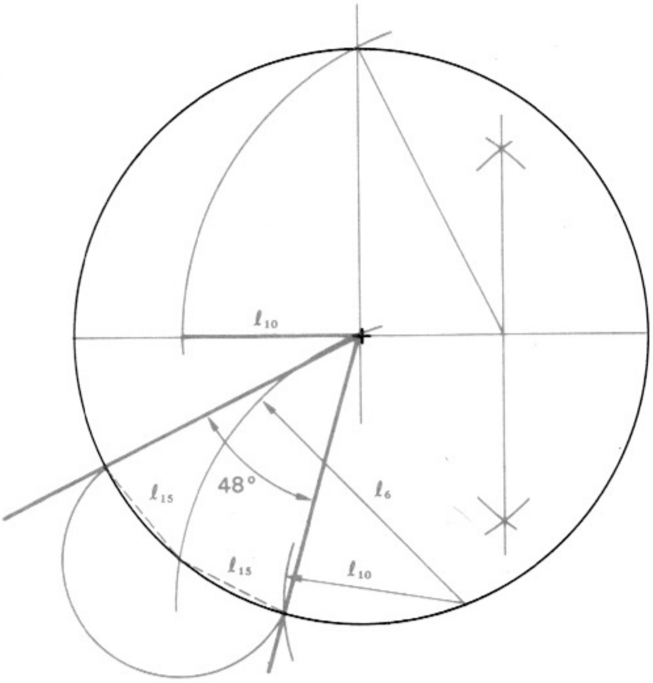
Resolva o exercício 67 do caderno de atividades.

Divisão da circunferência: processo exato (construção de arco) — processo geral

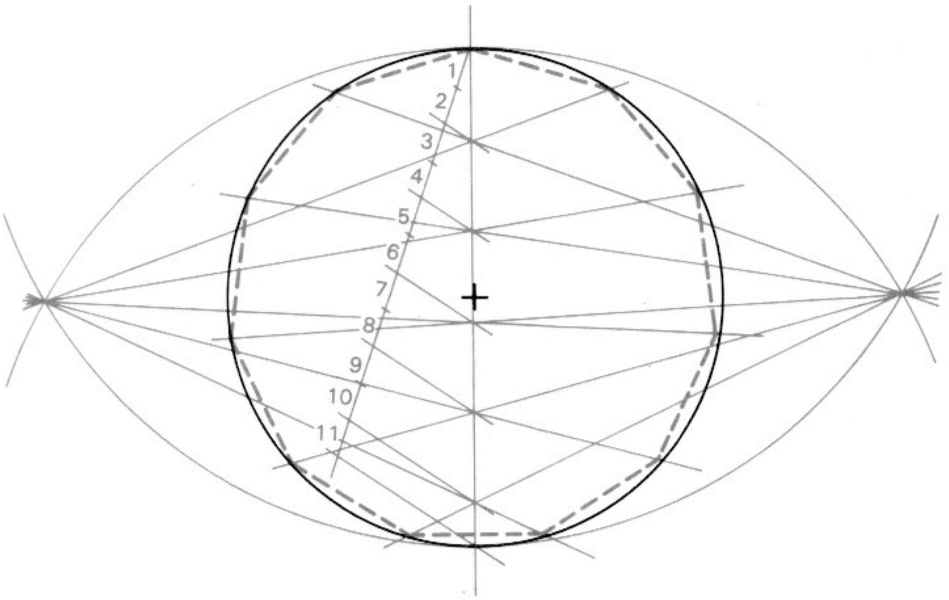
Figura auxiliar e anotações

66 Obtenha graficamente um arco de 48° na circunferência dada por um processo exato.

Sugestão: Basta construir o ℓ_{15} e aplicá-lo duas vezes. (Meça a resposta.)


ℓ_{10}
ℓ_{15}
48°
ℓ_6
ℓ_{15}
ℓ_{10}

67 Divida a circunferência dada em 11 partes iguais pelo processo de Rinaldini.

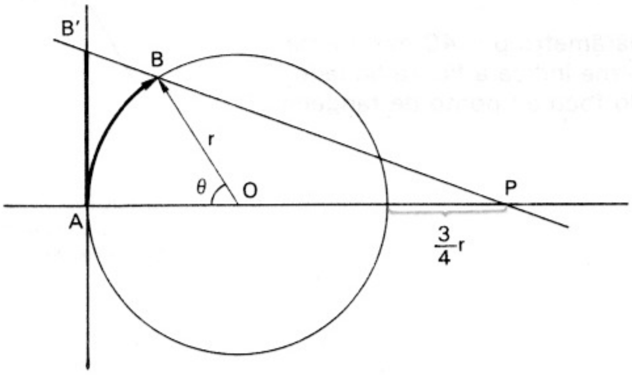

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

Apêndice

Seguindo a mesma linha de exposição adotada no volume 1, foram remetidas este apêndice as demonstrações de algumas propriedades enunciadas neste volume. Tal procedimento tem por objetivo dar maior fluidez à leitura e à compreensão dos textos teóricos e, simultaneamente, deixar ao professor a opção de abordar as demonstrações ou justificativas ali omitidas, caso ele ache conveniente.

Retificação de arcos de circunferência

Para justificar o processo de retificação de arcos devemos calcular o erro teórico cometido e mostrar que ele é desprezível.



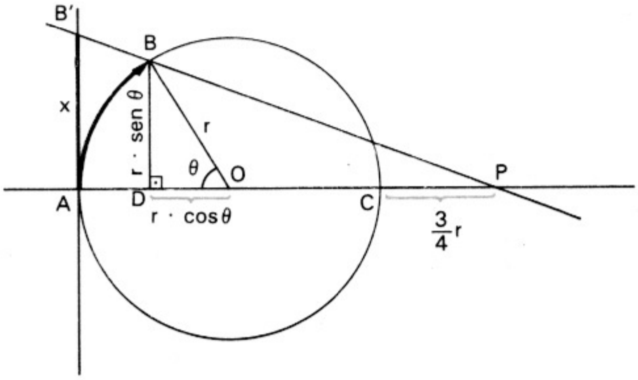
Lembre-se de que a medida θ de um arco em radianos é definida por:

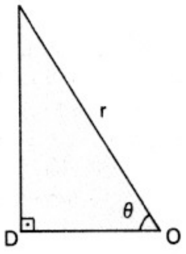
$$\theta = \frac{\text{comprimento do arco}}{r}$$

Logo:

$$\boxed{\text{comprimento do arco} = r \cdot \theta}$$

Seja θ a medida **em radianos** do ângulo central AÔB. Então, o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ é igual a $r\theta$. Agora, devemos determinar o comprimento do segmento AB' para verificar a diferença teórica entre ele e o comprimento do arco. Para tanto, vamos começar traçando por B o segmento BD perpendicular a $\overline{OA}$.





No triângulo retângulo OBD, é imediato que:

$$BD = r\,\text{sen}\theta \;\text{ e }\; OD = r\cos\theta$$

Da semelhança dos triângulos PAB' e PDB, podemos escrever:

$$\boxed{\frac{AB'}{BD} = \frac{AP}{DP}} \quad (1)$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{BD}{r} \quad \therefore \quad \boxed{BD = r\,\text{sen}\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{OD}{r} \quad \therefore \quad \boxed{OD = r\cos\theta}$$

$AB' = x$

$BD = r\,\text{sen}\,\theta$

$AP = 2r + \frac{3}{4}r \Rightarrow AP = 11\,\frac{r}{4}$

$DP = r + \frac{3}{4}r + r\cos\theta \Rightarrow DP = \frac{r}{4}(7 + 4\cos\theta)$

Fazendo as devidas substituições em (1), vem:

$$\frac{x}{r\,\text{sen}\,\theta} = \frac{11\,\frac{\cancel{r}}{\cancel{4}}}{\frac{\cancel{r}}{\cancel{4}}(7 + 4\cos\theta)}$$

$$\therefore \quad \boxed{x = \frac{11 \cdot r \cdot \text{sen}\theta}{7 + 4\cos\theta}}$$

A última igualdade nos permite calcular o comprimento **x** do segmento AB′ em função do ângulo θ. Com o auxílio de uma tábua trigonométrica ou uma minicalculadora que possua funções trigonométricas, podemos organizar uma tabela de valores de **x** em função de alguns valores de θ. Paralelamente, vamos calcular o comprimento ℓ do arco AB para esses valores de θ, com cinco casas decimais exatas e, então, determinar o erro teórico existente na construção.

θ	$x = \frac{11\,r\,\text{sen}\,\theta}{7 + 4\cos\theta}$	$\ell = r \cdot \theta$	**Erro teórico**
$\frac{\pi}{9}$ (20°)	$x = 0{,}34968 \cdot r$	$\ell = 0{,}34906 \cdot r$	$x - \ell = 0{,}00062r$
$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$x = 0{,}52560 \cdot r$	$\ell = 0{,}52359 \cdot r$	$x - \ell = 0{,}00201r$
$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$x = 0{,}79139 \cdot r$	$\ell = 0{,}78539 \cdot r$	$x - \ell = 0{,}00600r$
$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$x = 1{,}05847 \cdot r$	$\ell = 1{,}04719 \cdot r$	$x - \ell = 0{,}01128r$
$\frac{5\pi}{12}$ (75°)	$x = 1{,}32231 \cdot r$	$\ell = 1{,}30899 \cdot r$	$x - \ell = 0{,}01332r$
$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$x = 1{,}57142 \cdot r$	$\ell = 1{,}57079 \cdot r$	$x - \ell = 0{,}00063r$

A tabela mostra que para arcos de até 45° o erro é mínimo. Por exemplo, para 30° o erro é da ordem de dois milésimos por excesso. Entre 45° e 75° o erro teórico aumenta, mas ainda assim podemos desprezá-lo. Por exemplo, para 75° o erro é da ordem de um centésimo. Por fim, à medida que o arco se aproxima de 90°, o erro teórico diminui novamente. Para 90° ele é da ordem de seis décimos de milésimos.

O lado do pentágono regular

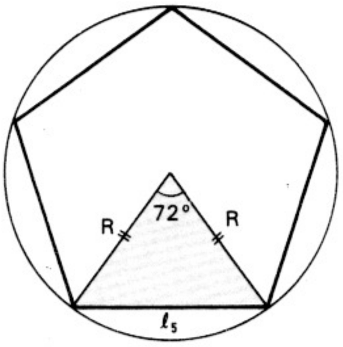
Vamos demonstrar que ℓ_5 é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são ℓ_6 e ℓ_{10}.

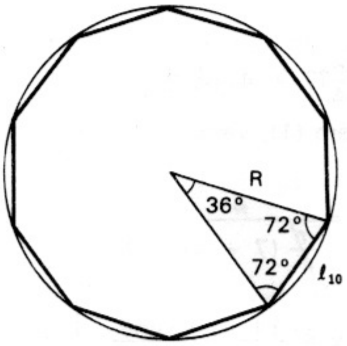
Para facilitar a compreensão da demonstração, convém destacar o seguinte:

- ℓ_5 é a base de um triângulo isósceles cujo ângulo do vértice mede 72° e cujos lados que o formam são os raios da circunferência circunscrita.

Lembre-se também de que $\ell_6 = R$.

- ℓ_{10} é o segmento áureo do raio da circunferência circunscrita.





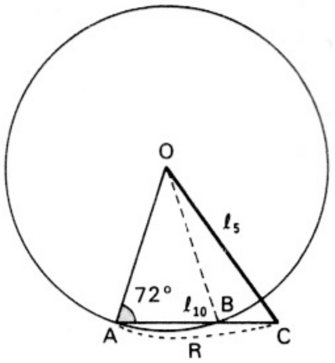
Assim, para ℓ_{10}, podemos escrever:

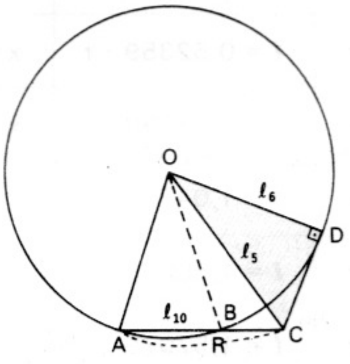
$$\frac{\ell_{10}}{R} = \frac{R - \ell_{10}}{\ell_{10}} \Rightarrow \boxed{\ell_{10}^2 = R\,(R - \ell_{10})} \quad (1)$$

A igualdade (1) será muito importante na conclusão deste teorema.

Sobre uma circunferência de centro O e raio R vamos considerar uma corda $AB = \ell_{10}$. Então, é imediato que $O\hat{A}B = 72°$.

Agora, vamos prolongar $\overline{AB}$ até um ponto C, de modo que se tenha $AC = R$. Observando o triângulo isósceles OAC, notamos que $OC = \ell_5$, pois $AO = AC = R$ e $O\hat{A}B = 72°$.





Por fim, do ponto C traçamos a tangente $\overline{CD}$ à circunferência obtendo o triângulo retângulo OCD, no qual $OC = \ell_5$ e $OD = \ell_6$. Vamos provar que $CD = \ell_{10}$. De fato, da potência de C em relação à circunferência, temos:

$$(CD)^2 = CA \times CB$$

Como $CA = R$ e $CB = R - \ell_{10}$, temos:

$$\boxed{(CD)^2 = R\,(R - \ell_{10})} \quad (2)$$

Das igualdades (1) e (2), concluímos que:

$$(CD)^2 = \ell_{10}^2$$

$$\therefore \quad \boxed{CD = \ell_{10}}$$

Assim, no triângulo retângulo OCD, ℓ_5 é a hipotenusa, ℓ_6 e ℓ_{10} são os catetos. Isso demonstra o teorema.

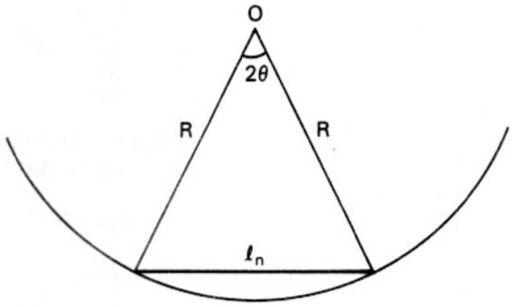
Divisão da circunferência

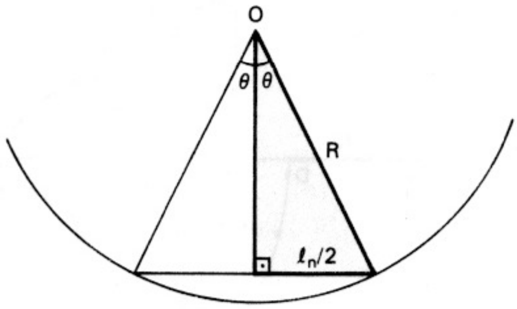
Para determinar o erro teórico que se comete nas construções do ℓ_7, ℓ_9, ℓ_{11}, ℓ_{13} e ℓ_{15}, vamos inicialmente determinar o lado de um polígono regular de **n** lados em função do ângulo central correspondente.

Seja 2θ o ângulo central correspondente ao lado ℓ_n. Então, sabemos que:

$$2\theta = \frac{360°}{n} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{180°}{n}}$$

Traçando o apótema do polígono, determina-se um triângulo retângulo em que $\frac{\ell_n}{2}$ é um dos catetos, o ângulo oposto a ele é θ e a hipotenusa é R.





Então, temos:

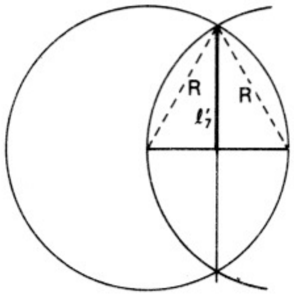
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\frac{\ell_n}{2}}{R} \Rightarrow \boxed{\ell_n = 2R\operatorname{sen}\theta}$$

Substituindo θ por $\frac{180°}{n}$ na última igualdade, vem a seguinte **fórmula geral**:

$$\boxed{\ell_n = 2R\operatorname{sen}\frac{180°}{n}}$$

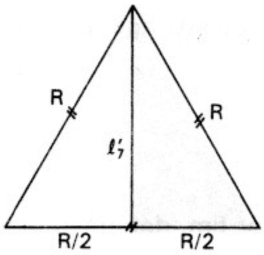
Essa relação será usada para calcular o valor correto de ℓ_n com cinco casas decimais e compará-lo com o valor obtido nas construções pelos processos aproximativos.

- **Heptágono regular (n = 7)**



Na construção que apresentamos, tomamos para valor aproximado de ℓ_7 a altura de um triângulo eqüilátero de lado R. Vamos representar ℓ_7 aproximado por ℓ'_7. Então, é imediato que:

$$\ell'_7 = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\ell'_7 = 0{,}86602 \cdot R}$$



Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\ell_7'^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2$$

$$\ell_7'^2 = R^2 - \frac{R^2}{4}$$

$$\ell_7'^2 = \frac{3R^2}{4}$$

$$\boxed{\ell'_7 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$$

Da fórmula geral temos:

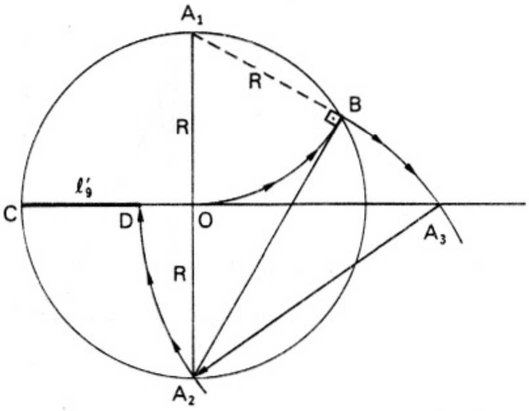
$$\ell_7 = 2R\,\text{sen}\,\frac{180°}{7} \Rightarrow \boxed{\ell_7 = 0{,}86776 \cdot R}$$

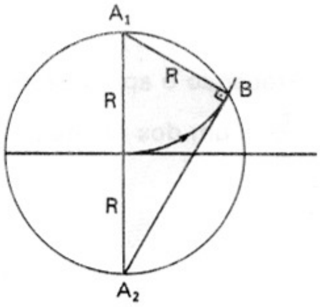
Assim, o erro teórico é dado por:

$$\boxed{\ell'_7 - \ell_7 = -0{,}00174 \cdot R}$$

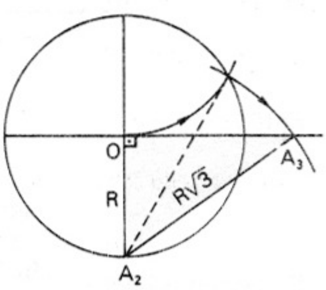
Isto é, o erro é por falta e da ordem de **dois milésimos**, já que 0,0017 ≃ 0,002.

Eneágono regular (n = 9)





$$(A_2B)^2 + R^2 = (2R)^2$$
$$(A_2B)^2 = 3R^2$$
$$\boxed{A_2B = R\sqrt{3}}$$



$$(OA_3)^2 + R^2 = (R\sqrt{3})^2$$
$$(OA_3)^2 = 2R^2$$
$$\boxed{OA_3 = R\sqrt{2}}$$

Da construção apresentada para o ℓ_9 aproximado, inicialmente vamos considerar o triângulo A_1A_2B. Esse triângulo é retângulo por estar inscrito numa semicircunferência e, pelo teorema de Pitágoras, deduz-se que:

$$\boxed{A_2B = R\sqrt{3}}$$

Como $A_2B = A_2A_3 = A_3D$, temos também:

$$A_2A_3 = R\sqrt{3} \text{ e } A_3D = R\sqrt{3}$$

Agora, do triângulo retângulo A_2OA_3 vem:

$$\boxed{OA_3 = R\sqrt{2}}$$

Podemos agora determinar o comprimento de $\overline{A_3C}$, pois:

$$A_3C = A_3O + OC$$
$$A_3C = R\sqrt{2} + R$$
$$\boxed{A_3C = R(\sqrt{2} + 1)}$$

Por fim, determinamos o ℓ'_9.

$$\ell'_9 = A_3C - A_3D$$
$$\ell'_9 = R(\sqrt{2} + 1) - R\sqrt{3}$$
$$\ell'_9 = R(\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1)$$

Efetuando os cálculos, teremos:

$$\boxed{\ell'_9 = 0{,}68216 \cdot R}$$

Da fórmula geral, podemos escrever:

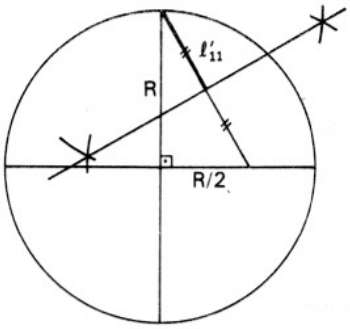
$$\ell_9 = 2R \cdot \text{sen}\,\frac{180°}{9} \Rightarrow \boxed{\ell_9 = 0{,}68404 \cdot R}$$

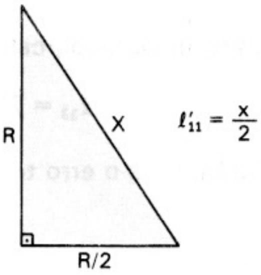
Então, o erro teórico é dado por:

$$\boxed{\ell_9' - \ell_9 = -0{,}00188 \cdot R}$$

Como 0,0018 ≃ 0,002, podemos concluir que o erro é por falta e da ordem de **dois milésimos.**

- **Undecágono regular (n = 11)**





Na construção apresentada, o ℓ_{11}' é a metade da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos R e $\frac{R}{2}$.

Daí, conclui-se que:

$$\ell_{11}' = \frac{R\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \boxed{\ell_{11}' = 0{,}55901 \cdot R}$$

$$x^2 = R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$$
$$x^2 = R^2 + \frac{R^2}{4}$$
$$x^2 = \frac{5R^2}{4}$$
$$x = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$
$$\therefore \quad \boxed{\ell_{11}' = \frac{R\sqrt{5}}{4}}$$

E, da fórmula geral, temos:

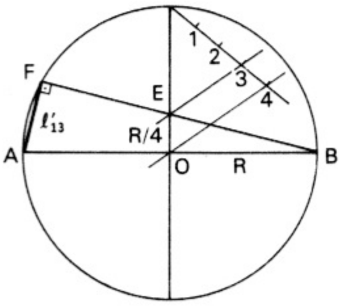
$$\ell_{11} = 2R\,\text{sen}\,\frac{180^\circ}{11} \Rightarrow \boxed{\ell_{11} = 0{,}56346 \cdot R}$$

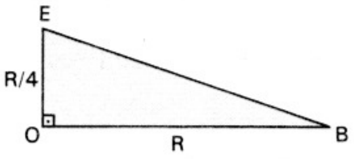
Então, o erro teórico pode ser calculado.

$$\boxed{\ell_{11}' - \ell_{11} = -0{,}00445 \cdot R}$$

Assim, comete-se um erro teórico da ordem de **quatro milésimos** por falta.

- **Tridecágono regular (n = 13)**





Inicialmente, calculamos o comprimento da hipotenusa $\overline{BE}$ do triângulo retângulo OBE.

$$\boxed{BE = \frac{R\sqrt{17}}{4}}$$

$$(BE)^2 = R^2 + \left(\frac{R}{4}\right)^2$$
$$(BE)^2 = R^2 + \frac{R^2}{16}$$
$$(BE)^2 = \frac{17R^2}{16}$$
$$\boxed{BE = \frac{R\sqrt{17}}{4}}$$

Observemos, agora, que o triângulo ABF é retângulo, por estar inscrito numa semicircunferência. Então, os triângulos ABF e EBO são semelhantes (pelo critério AA), pois $\hat{B}$ é ângulo comum e $\measuredangle \hat{F} \equiv \measuredangle \hat{O}$, já que ambos são retos.

Dessa semelhança, teremos:

$$\frac{AF}{EO} = \frac{AB}{BE}$$

Ou ainda,

$$\frac{\ell'_{13}}{\frac{R}{4}} = \frac{2R}{\frac{R\sqrt{17}}{4}}$$

$$\therefore\ \ell'_{13} = \frac{2R\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \boxed{\ell'_{13} = 0{,}48507 \cdot R}$$

Da fórmula geral, calculamos que:

$$\ell_{13} = 2R \cdot \operatorname{sen} \frac{180°}{13} \Rightarrow \boxed{\ell_{13} = 0{,}47863 \cdot R}$$

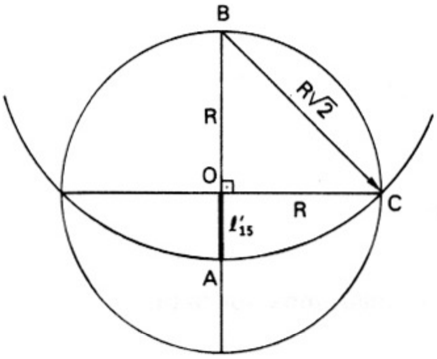
Então, para o erro teórico, temos:

$$\boxed{\ell'_{13} - \ell_{13} = 0{,}00644 \cdot R}$$

Isto é, o erro é por excesso e da ordem de **seis milésimos**.

- **Pentadecágono regular (n = 15)**

Quando se apresentou a construção do pentadecágono regular por um processo exato, foi feita uma observação em que se indicava a obtenção do ℓ_{15} por um processo aproximativo, o qual se apresenta na figura seguinte.



Calculando o comprimento de $\overline{BC}$, teremos:

$$BC = R\sqrt{2}$$

Então, podemos calcular ℓ'_{15}, pois:

$$\ell'_{15} = BA - BO$$
$$\ell'_{15} = R\sqrt{2} - R$$
$$\ell'_{15} = R(\sqrt{2} - 1)$$

$$\ell'_{15} = 0{,}41421 \cdot R$$

Por outro lado, da fórmula geral, temos:

$$\ell_{15} = 2R\operatorname{sen} \frac{180°}{15} \Rightarrow \boxed{\ell_{15} = 0{,}41582 \cdot R}$$

$$\therefore\ \boxed{\ell'_{15} - \ell_{15} = -0{,}00161 \cdot R}$$

Assim, comete-se um erro teórico menor do que **dois milésimos**.

O cálculo de π

Inicialmente convém dar uma idéia de como surge o número π. Para tanto, vamos admitir intuitivamente a seguinte propriedade:

Todas as circunferências são semelhantes entre si.

Partindo do princípio de que essa propriedade é verdadeira, pode-se concluir que em todas as circunferências **os elementos lineares homólogos são proporcionais.**

Assim, sendo C, C′, C″ ... os comprimentos das circunferências de diâmetros d, d′, d″ ..., teremos:

$$\frac{C}{d} = \frac{C'}{d'} = \frac{C''}{d''} = \ldots = k$$

Isto é, a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é constante, independentemente do tamanho da circunferência considerada. A essa constante chamamos π.

$$\boxed{\frac{C}{d} = \pi}$$

Daí vem a fórmula que dá o comprimento da circunferência:

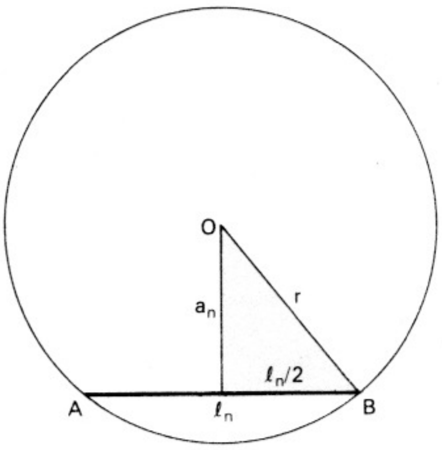
$$\boxed{C = d\pi} \quad \text{ou} \quad \boxed{C = 2\pi r}$$

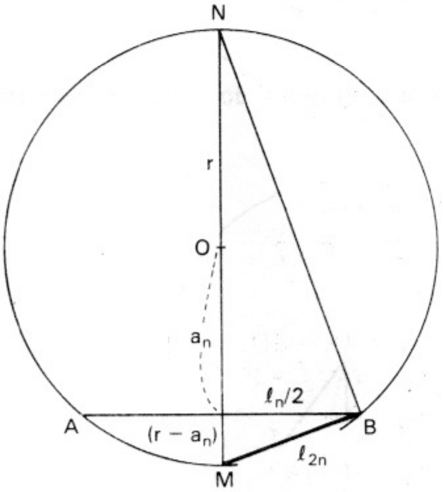
Agora, vamos resolver o problema seguinte:

Problema

Conhecido o lado ℓ_n do polígono regular de **n** lados inscrito numa circunferência, calcular o lado ℓ_{2n} do polígono de 2n lados inscrito na mesma circunferência.

Resolução: Seja $\overline{AB}$ o lado do polígono regular de **n** lados inscrito na circunferência. Então, se M é o ponto médio do arco AB, sabemos que $\overline{BM}$ (e também $\overline{AM}$) será o lado do polígono regular de 2n lados, isto é, $AB = \ell_n$ e $BM = \ell_{2n}$.





Primeiramente, vamos determinar o apótema a_n do polígono de **n** lados, em função de **r** e ℓ_n. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$a_n^2 + \left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2 = r^2$$

$$\boxed{a_n = \sqrt{r^2 - \frac{\ell_n^2}{4}}} \quad (1)$$

Traçando o diâmetro $\overline{MN}$ e unindo B e N, obtém-se o triângulo retângulo BMN no qual se tem:

- ℓ_{2n}: cateto
- $(r - a_n)$: projeção de ℓ_{2n} sobre a hipotenusa
- 2r: hipotenusa

Desse triângulo conclui-se que:

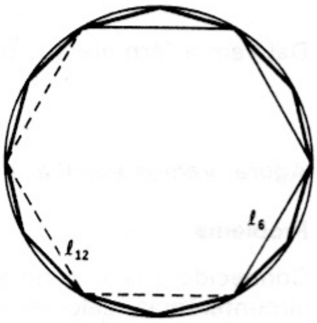
$$\ell_{2n}^2 = 2r\,(r - a_n)$$

$$\boxed{\ell_{2n} = \sqrt{2r\,(r - a_n)}}$$

Substituindo nesta última igualdade o a_n obtido em (1), vem:

$$\boxed{\ell_{2n} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{\ell_n^2}{4}}\right)}}$$

Assim, conhecido o lado de um polígono regular inscrito numa circunferência, a fórmula obtida permite determinar o lado do polígono regular que tem o dobro de lados do primeiro e está inscrito na mesma circunferência.



Exemplo: Sabendo que $\ell_6 = r$, pode-se calcular ℓ_{12}:

$$\ell_{12} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{\ell_6^2}{4}}\right)}$$

$$\ell_{12} = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}\right)}$$

Efetuando as simplificações possíveis, obtemos:

$$\boxed{\ell_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

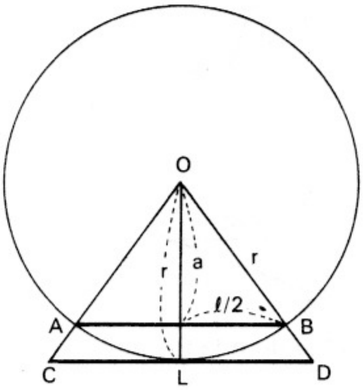
Note que, conhecido ℓ_{12}, podemos calcular ℓ_{24}, depois ℓ_{48}, e assim sucessivamente.

Passemos a mais um problema antes de calcular o valor de π.

Problema

Conhecido o lado ℓ de um polígono regular inscrito numa circunferência, calcular o lado L do polígono semelhante ao primeiro e circunscrito à mesma circunferência.

Resolução: Seja AB = ℓ, CD = L e **a** o apótema do polígono inscrito.



$$a^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = r^2$$

$$a^2 = r^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$a^2 = \frac{4r^2 - \ell^2}{4}$$

$$\therefore \quad \boxed{a = \frac{\sqrt{4r^2 - \ell^2}}{2}}$$

Da semelhança dos triângulos OAB e OCD, pode-se escrever:

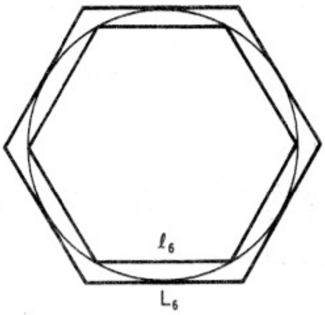
$$\frac{CD}{AB} = \frac{r}{a} \Rightarrow \boxed{\frac{L}{\ell} = \frac{r}{a}} \quad (1)$$

Como $a = \dfrac{\sqrt{4r^2 - \ell^2}}{2}$ a proporção (1) fica:

$$\frac{L}{\ell} = \frac{r}{\dfrac{\sqrt{4r^2 - \ell^2}}{2}}$$

$$\therefore \quad \boxed{L = \frac{2r\ell}{\sqrt{4r^2 - \ell^2}}}$$

Deste modo, conhecido o lado de um polígono regular inscrito numa circunferência, a fórmula deduzida permite calcular o lado do polígono regular que tem o mesmo número de lados do primeiro e está circunscrito a essa circunferência.



Exemplo: Conhecido $\ell_6 = r$ vamos calcular L_6.

$$L_6 = \frac{2r \cdot \ell_6}{\sqrt{4r^2 - \ell_6^2}} \Rightarrow L_6 = \frac{2r \cdot r}{\sqrt{4r^2 - r^2}}$$

Efetuando as simplificações, teremos:

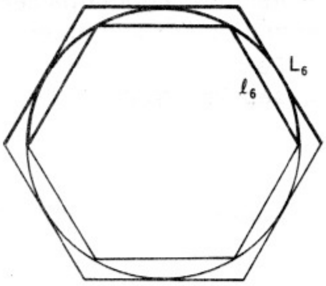
$$\boxed{L_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}}$$

Agora, podemos passar ao cálculo de π. Para tanto, vamos começar relembrando que o número π é a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro.

$$\boxed{\pi = \frac{C}{d}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\pi = \frac{C}{2r}}$$

É importante reforçar que o número π **não depende do tamanho da circunferência considerada**. Assim, para uma circunferência de raio unitário ($r = 1$), teremos:

$$\boxed{\pi = \frac{C}{2}}$$



$p_6 = 3\ell_6 \quad P_6 = 3L_6$

$p_6 < \dfrac{C}{2} < P_6$

Isto é, π corresponde ao comprimento de uma semicircunferência de raio $r = 1$.
Agora, consideremos, por exemplo, os hexágonos regulares inscrito e circunscrito numa mesma circunferência de raio $r = 1$. Ora, enquanto o perímetro do hexágono inscrito é uma aproximação por falta do comprimento da circunferência, o perímetro do hexágono circunscrito é uma aproximação por excesso. Isto é, sendo $2p_6$ e $2P_6$ os perímetros desses hexágonos, teremos:

$$2p_6 < C < 2P_6$$

$$p_6 < \frac{C}{2} < P_6$$

$$\therefore \quad \boxed{p_6 < \pi < P_6}$$

Pois bem, como $\ell_6 = r$ e $L_6 = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$ e já que estamos supondo $r = 1$, teremos:

$$\ell_6 = 1 \quad \text{e} \quad L_6 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$p_6 = 3\ell_6 \quad \text{e} \quad P_6 = 3L_6$$

$$\boxed{p_6 = 3} \quad \text{e} \quad \boxed{P_6 = 2\sqrt{3}}$$

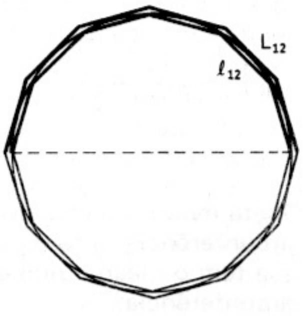
Então, como $p_6 < \pi < P_6$, teremos:

$$3 < \pi < 2\sqrt{3}$$

$$\boxed{3 < \pi < 3{,}46410\ldots}$$

Isto é, já sabemos que π é um número compreendido entre 3 e 3,46410...

Porém, podemos diminuir o intervalo em que se encontra π. Para isso, basta considerar os dodecágonos regulares inscrito e circunscrito à circunferência. Através do mesmo raciocínio usado para os hexágonos, conclui-se facilmente que:



$p_{12} = 6\,\ell_{12}$
$P_{12} = 6\,L_{12}$

$$\boxed{p_{12} < \pi < P_{12}}$$

Como $\ell_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ e $r = 1$, temos:

$$\boxed{p_{12} = 6\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

Mas, tendo ℓ_{12}, podemos obter L_{12}:

$$L_{12} = \frac{2r\,\ell_{12}}{\sqrt{4r^2 - \ell_{12}^2}}$$

Para r = 1, e simplificando a expressão, vem:

$$L_{12} = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \boxed{P_{12} = 6\,(4 - 2\sqrt{3})}$$

Assim, o intervalo em que se encontra o número π é o seguinte:

$$6\sqrt{2 - \sqrt{3}} < \pi < 6\,(4 - 2\sqrt{3})$$

$$\boxed{3{,}10582 < \pi < 3{,}21539}$$

Agora já sabemos que π é maior do que 3,1 e menor do que 3,2.

Bem, o leitor já percebeu que esse processo pode ter continuidade até o ponto que se desejar, pois temos as fórmulas que permitem duplicar o número de lados dos polígonos e obter valores cada vez mais próximos de π.

Munido de alguma paciência e uma minicalculadora, o leitor poderá também construir a tabela apresentada a seguir. Para isso, convém observar o seguinte:

- Para $r = 1$, a fórmula que dá ℓ_{2n} em função de ℓ_n pode ser simplificada para a seguinte forma:

$$\boxed{\ell_{2n}\sqrt{2 - \sqrt{4 - \ell_n^2}}}$$

- Para $r = 1$, a fórmula que dá L_n em função de ℓ_n pode ser simplificada para:

$$\boxed{L_n = \frac{2\,\ell_n}{\sqrt{4 - \ell_n^2}}}$$

Número de lados	**Semiperímetros**	
	inscritos	**circunscritos**
6	**3**	**3**,46410
12	**3**,10582	**3**,21539
24	**3,1**3262	**3,1**5965
48	**3,1**3935	**3,1**4608
96	**3,14**103	**3,14**271
192	**3,141**45	**3,141**87
384	**3,141**55	**3,141**66
768	**3,141**58	**3,141**61
1536	**3,1415**8	**3,1415**9

Observe que para os polígonos inscrito e circunscrito, com 1536 lados, obtém-se o valor de π correto até a quarta casa decimal, isto é, π = 3,1415....

Nota histórica

Pelo que se sabe, a primeira vez que se usou a letra π para representar essa importante constante matemática foi em 1706, pelo matemático William Jones (1675-1749). Mas foi o importantíssimo matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) quem popularizou o símbolo π.

Muitos matemáticos, ao longo da história, calcularam valores de π. Porém, um resultado impressionante foi conseguido por Ludolph van Ceulen (1540-1610). Em 1596, ele publicou um valor de π com 20 casas decimais, tendo usado o processo que aqui se apresentou, isto é, a duplicação de lados. Partiu de um polígono de 15 lados e fez 37 duplicações. Posteriormente, usando um número ainda maior de lados, Ludolph calculou π com 35 casas decimais, valor este gravado em seu túmulo a pedido da sua viúva.

6

Áreas das principais figuras geométricas

Áreas dos paralelogramos, triângulos e trapézios

Segundo a opinião de Heródoto, o pai da História, a Geometria surgiu na Antigüidade, entre os egípcios, pela necessidade de medir terras (geo = terra, metria = medida). Após as cheias anuais do rio Nilo, era necessário refazer as demarcações, levadas pelas águas, das terras distribuídas pelo rei entre os agricultores. O conhecimento da extensão da terra cultivável que cabia a cada um tinha por objetivo estabelecer os impostos que o rei cobraria sobre a produção.

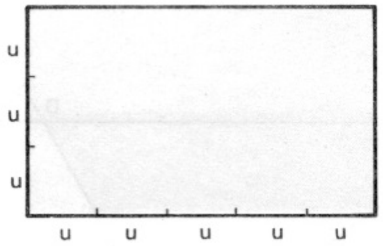
A hipótese de que assim surgiu a Geometria não é mais aceita pelos historiadores da Matemática, mas o problema que a civilização egípcia teve de enfrentar ilustra quanto é antiga a preocupação de medir áreas. (Estabelecer a extensão da superfície de um terreno é o que chamamos medir a área desse terreno.)

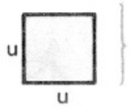
A unidade de medida das áreas é um quadrado de lado unitário. Assim, por exemplo, se quisermos estabelecer a área de um retângulo cujos lados medem 5u e 3u, devemos calcular quantas vezes esse retângulo contém um quadrado de lado **u**.

Um estudo rigoroso das áreas das figuras planas exige um conjunto de axiomas próprios. Por exemplo, um deles estabelece que a área de um quadrado de lado **a** é dada por a^2.

A partir desses axiomas, as deduções das fórmulas seguem processos semelhantes ao que aqui será exposto.

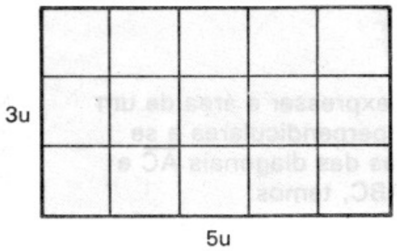
Um tratamento bastante elegante sobre o assunto encontra-se em *Noções de Matemática*, de Aref Anter Neto, Nilton Lapa e outros. 1. ed., São Paulo, Moderna, 1982. v. 5.





Unidade de medida de área

Graficamente, é fácil verificar, por contagem direta, que um determinado retângulo contém 15 vezes o quadrado unitário. Também é imediata a verificação de que esse número pode ser calculado multiplicando-se 5 por 3, usando o mesmo princípio que utilizamos, por exemplo, para contar carteiras numa sala de aula.



Desse modo, verificamos por processos práticos que a área de um retângulo é dada pela fórmula **base** × **altura**.

Por outro lado, convém que a unidade em que os lados do retângulo estão expressos compareçam na medida de sua área, e então escrevemos:

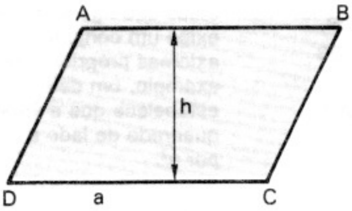
$$\text{Área} = 5u \times 3u$$

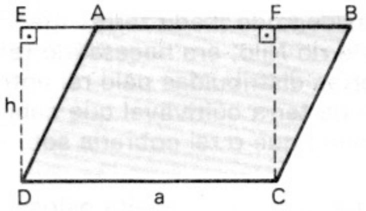
$$\boxed{\text{Área} = 15u^2}$$

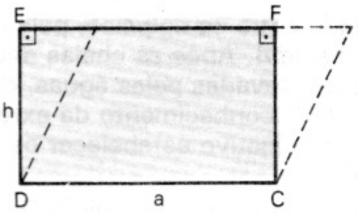
Assim, se u = 1 cm, a área é igual a 15 cm², se u = 1 m, a área é igual a 15 m² etc.

Doravante vamos simbolizar a área pela letra S.

Admitindo que a área de um retângulo seja dada por **base** × **altura** e, além disso, supondo que duas figuras congruentes quaisquer tenham áreas iguais, é fácil deduzir que a área de um paralelogramo qualquer também é dada pela relação **base** × **altura**. Para tanto, considere o paralelogramo ABCD abaixo. Como os triângulos AED e BEC são congruentes, é imediato que o paralelogramo ABCD e o retângulo EFCD têm áreas iguais.

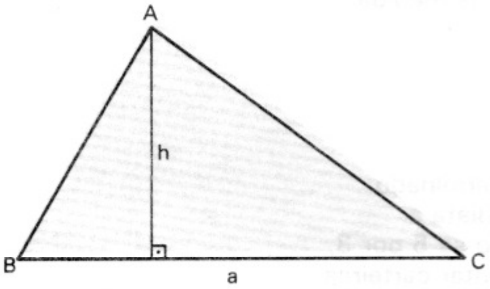


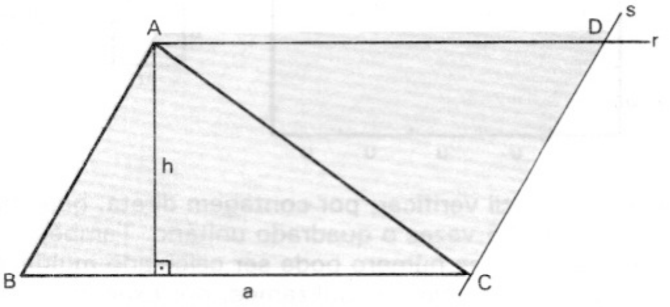




Por fim, como a área do retângulo é $S_R = a \cdot h$, a área do paralelogramo também será $\boxed{S_P = a \cdot h}$

Da área do paralelogramo passa-se para a área do triângulo. De fato, seja ABC um triângulo qualquer. Pelos vértices A e B conduzimos as retas **r** e **s**, paralelas aos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Sendo D o ponto de intersecção de **r** e **s**, obtém-se o paralelogramo ABCD cuja área é $S_P = a \cdot h$. Da congruência dos triângulos ABC e CDA, deduzimos que suas áreas são iguais, sendo cada uma delas a metade da área do paralelogramo.





$$S_P = a \cdot h \Rightarrow \boxed{S_\triangle = \frac{a \cdot h}{2}}$$

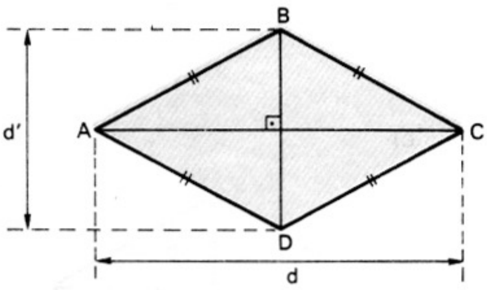
Assim podemos deduzir uma outra fórmula, agora para expressar a área de um losango. Sabemos que as diagonais de um losango são perpendiculares e se cortam em seus pontos médios. Sendo **d** e d′ as medidas das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do losango ABCD abaixo, para a área do triângulo ABC, temos:

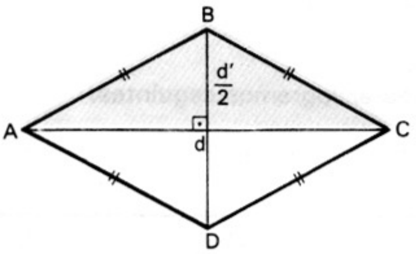
Note que sendo o losango um paralelogramo, a sua área é também dada pela relação **base** × **altura**.

$$\frac{d \cdot \frac{d'}{2}}{2} = \frac{d \cdot d'}{4}$$

Mas os triângulos ABC e ADC são congruentes e assim a área do losango é o dobro da área do triângulo ABC. Logo,

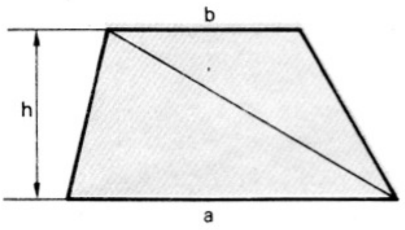
$$S_L = 2 \cdot \frac{d \cdot d'}{4} \Rightarrow \boxed{S_L = \frac{d \cdot d'}{2}}$$

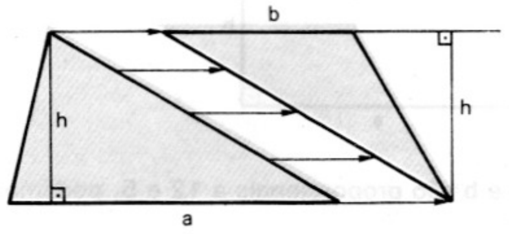




Convém também estabelecer a área de um trapézio de bases **a** e **b** e altura **h**. Traçando-se uma das diagonais do trapézio, este fica dividido em dois triângulos. A soma das áreas desses triângulos nos dá a área do trapézio. Então,

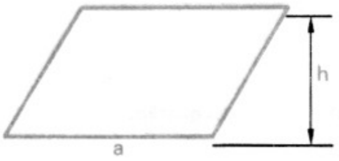
$$S_T = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow \boxed{S_T = \frac{(a + b)\,h}{2}}$$





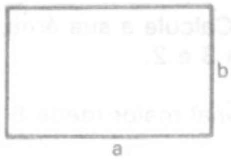
Resumindo

Paralelogramos



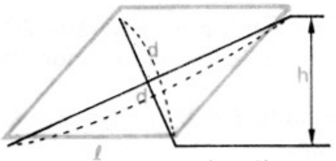
$S_P = a \cdot h$

Retângulo



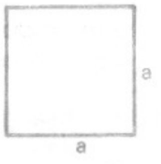
$S_R = a \cdot b$

Losango



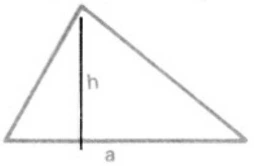
$S_L = \ell \cdot h = \frac{d \cdot d'}{2}$

Quadrado



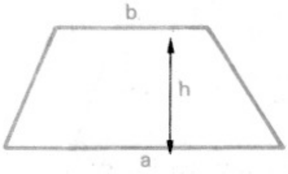
$S_Q = a^2$

Triângulo



$S_\Delta = \frac{a \cdot h}{2}$

Trapézio

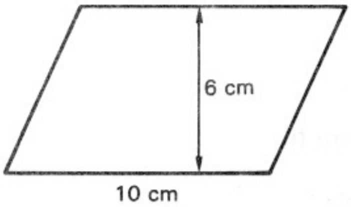


$S_T = \frac{(a + b)\,h}{2}$

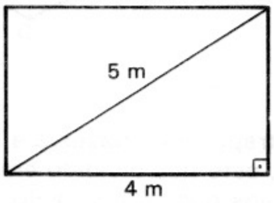
Exercícios

E6.1 Calcule as áreas dos paralelogramos seguintes.

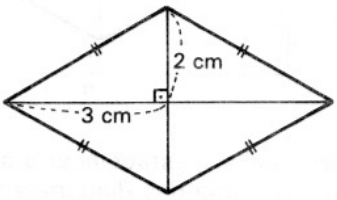
a)



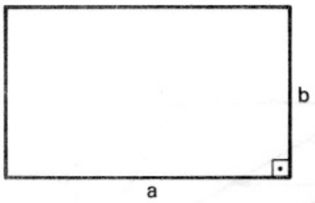
b)



c)



E6.2 A área de um retângulo é igual a 540 cm². Calcule os seus lados sabendo que estes são proporcionais a 12 e 5.



Resolução: Como **a** e **b** são proporcionais a 12 e 5, podemos escrever:

$$a = 12k \text{ e } b = 5k$$

Mas a área é igual a 540 cm². Logo,

$$12k \cdot 5k = 540$$
$$60k^2 = 540$$
$$k^2 = 9 \qquad \therefore\ k = 3$$

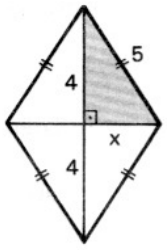
Portanto $a = 12k = 36$ e $b = 5k = 15$

Resposta: a = 36 cm e b = 15 cm

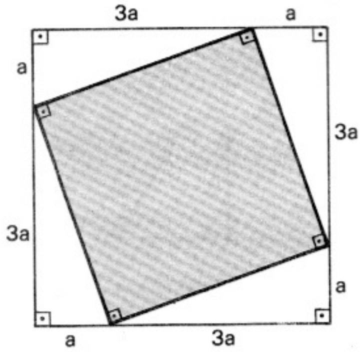
E6.3 O perímetro de um retângulo é igual a 20 cm. Calcule a sua área, sabendo que os seus lados são proporcionais a 3 e 2.

E6.4 Um losango tem lado $\ell = 5$ cm. Se a sua diagonal maior mede 8 cm, calcule a sua área.

Sugestão:

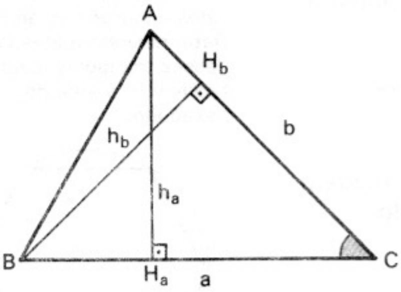


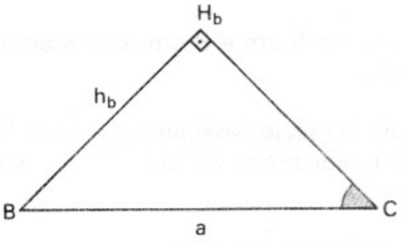
E6.5 Calcule a área do quadrado hachurado na figura seguinte em função de **a**.

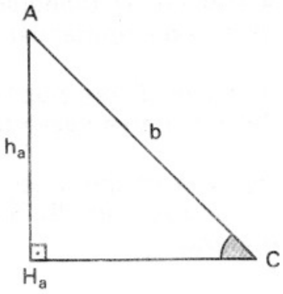


E6.6 Calcule a área de um quadrado inscrito num círculo de raio r = 4 m.

E6.**7** Mostre que a área de um triângulo não depende do lado escolhido como base.







Resolução: Os triângulos BCH_b e ACH_a são semelhantes pelo critério AA, pois $\measuredangle \hat{H}_b \equiv \measuredangle \hat{H}_a$ (ambos são retos por hipótese) e $\hat{C}$ é um ângulo comum. Logo,

$$\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a} \Rightarrow a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

Analogamente se prova que $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$

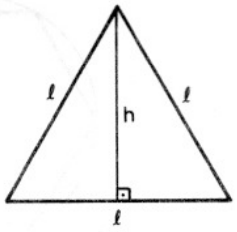
Assim, $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$, o que demonstra que a área do triângulo pode ser calculada com qualquer lado tomado como base. Isto é,

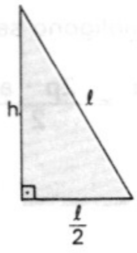
$$\boxed{S_{\triangle ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}}$$

E6.**8** Um triângulo ABC, em que $a = 5$, tem sua área igual à área de um quadrado de lado $\ell = 6$. Calcule h_a.

E6.**9** Calcule a área de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 25 cm e um dos catetos mede 24 cm.

E6.**10** Calcule a área de um triângulo eqüilátero de lado ℓ.





Resolução: Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2$$

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Portanto:

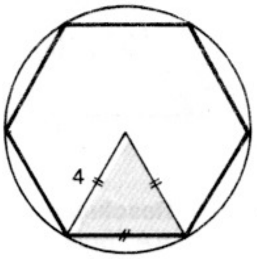
$$S_\triangle = \frac{\ell \cdot h}{2} = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Resposta: $S_\triangle = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

E6.**11** Calcule a área de um triângulo ABC isósceles em que AB = AC = 13 cm e BC = 10 cm.

E6.**12** Calcule a área de um hexágono regular inscrito numa circunferência de raio $r = 4$.

Sugestão:
O hexágono regular pode ser subdividido em seis triângulos eqüiláteros de lados congruentes ao raio. Determinando a área de um desses triângulos, calcula-se facilmente a área do hexágono.

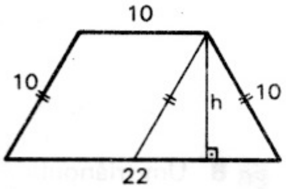


E6.**13** A área de um triângulo retângulo isósceles é igual a 50 cm². Calcule a medida da hipotenusa desse triângulo.

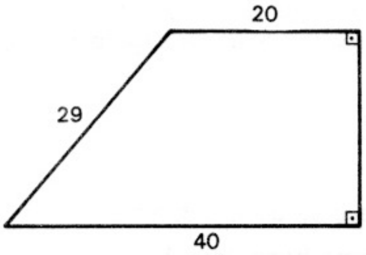
E6.**14** As bases de um trapézio medem 5 cm e 8 cm, e sua altura 4 cm. Calcule a área desse trapézio.

E6.**15** Os lados congruentes de um trapézio isósceles e a base menor medem 10 cm cada um. Se a base maior mede 22 cm, calcule a área do trapézio.

Sugestão: para E6.15:
Transladando um dos lados não-paralelos do trapézio, obtém-se um triângulo isósceles, a partir do qual é possível calcular a altura do trapézio.



E6.**16** Calcule a área do trapézio retângulo seguinte.



Sugestão: Aplicar translação como no problema anterior.

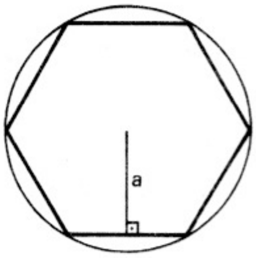
Área do círculo

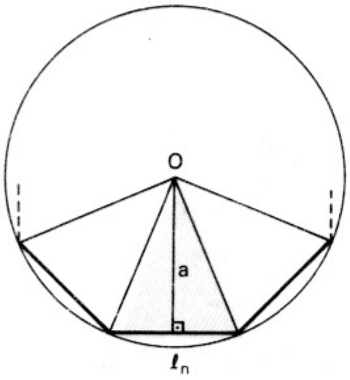
Para dar uma idéia ao leitor de como se pode obter a fórmula da área do círculo, primeiro deve-se verificar que a área de um polígono regular é dada por $S = p \cdot a$, onde **p** é o semiperímetro do polígono e **a** o apótema.
De fato, sendo ℓ_n o lado de um n-látero regular, o seu perímetro será $2p = n \cdot \ell_n$. Ora, esse polígono pode ser decomposto em **n** triângulos isósceles congruentes, com um vértice comum no centro do mesmo. Como a área de um desses triângulos é dada por $\frac{\ell_n \cdot a}{2}$, a área do polígono será:

$$S = n \cdot \frac{\ell_n \cdot a}{2} = \frac{n \cdot \ell_n \cdot a}{2} = \frac{2p \cdot a}{2}$$

Logo, $\boxed{S = p \cdot a}$

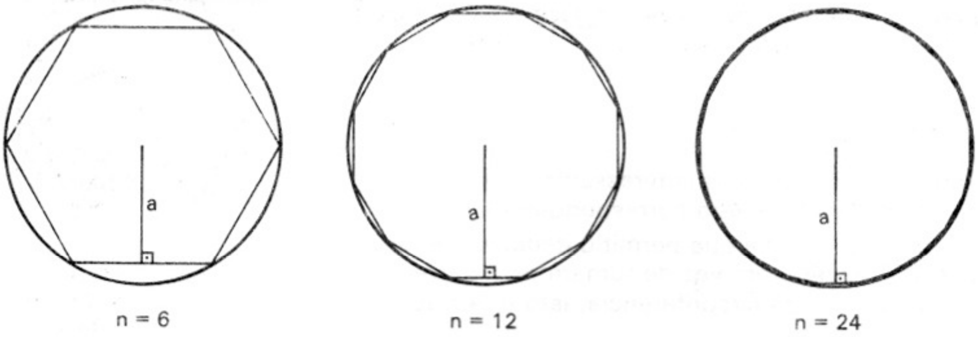
Apótema de um polígono regular é a distância do centro do mesmo a um lado.





Consideremos agora, por exemplo, um hexágono regular inscrito num círculo. A área desse hexágono é uma aproximação ruim da área do círculo, por falta.

Dobrando-se o número de lados do polígono inscrito, obtém-se um dodecágono regular cuja área é uma aproximação melhor da área do círculo. Imagine agora que passemos a dobrar sucessivamente o número de lados dos polígonos inscritos. Quanto maior o número de lados, mais próxima a área do polígono estará da área do círculo. Simultaneamente, o perímetro do polígono estará se aproximando do perímetro do círculo, enquanto o apótema do polígono aproxima-se do raio do círculo.



Então, quando o número de lados do polígono inscrito "tende ao infinito", tem-se:

- o perímetro do polígono tende ao perímetro do círculo

$$2p \rightarrow 2\pi r \quad (\text{ou } p \rightarrow \pi r)$$

- o apótema do polígono tende ao raio do círculo

$$a \rightarrow r$$

- a área do polígono tende à área do círculo

$$S_P = p \cdot a \rightarrow S_C = \pi r \cdot r$$

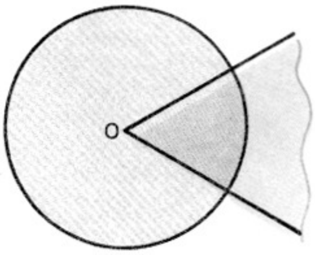
Logo, a área do círculo é $\boxed{S_C = \pi r^2}$

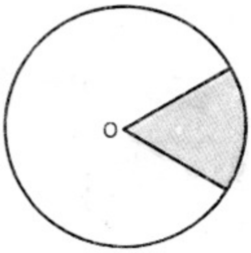
É evidente que a conclusão desse raciocínio depende do fato de que o comprimento da circunferência é dado por "$2\pi r$". Porém, à fórmula do comprimento da circunferência também se pode chegar por um raciocínio análogo ao que aqui se fez para a área do círculo.

Área do setor circular

Definição

Chama-se **setor circular** a intersecção de um círculo com um ângulo central.



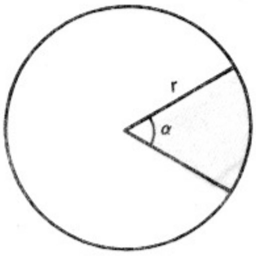


Setor circular

Vamos determinar a área de um setor circular de raio **r**, conhecido o ângulo central α correspondente ao setor (α em graus).

Para tanto, basta observar que um setor circular é apenas uma fração de um círculo, isto é, sua área é uma fração da área do círculo.

Ora, para um ângulo α, a fração que tomamos do círculo é $\frac{\alpha}{360°}$ (α partes de 360). Assim, a área do setor é:

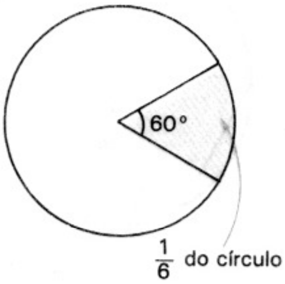


$$\boxed{S_{set} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2}$$

Observe que a fração $\frac{\alpha}{360°}$ representa exatamente a fração que o setor representa de todo o círculo. Por exemplo, para $\alpha = 60°$ temos:

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$$

Isto é, um setor de 60° é a sexta parte de um círculo.

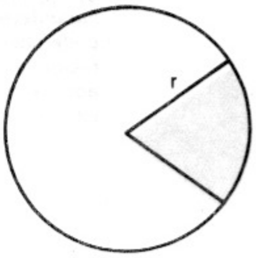


Para a sua utilização em Desenho Geométrico, será interessante determinar a área do setor em função do comprimento ℓ do arco correspondente.

O raciocínio que será utilizado é análogo àquele que permitiu deduzir a área do setor em função do ângulo central α. Porém, em vez de tomarmos α partes de 360, tomaremos ℓ partes do comprimento da circunferência, isto é, a fração que o setor representa do círculo é $\frac{\ell}{2\pi r}$.

Assim, a área do setor será $S_{set} = \frac{\ell}{2\pi r} \cdot \pi r^2$.

Simplificando, chegamos à fórmula procurada.

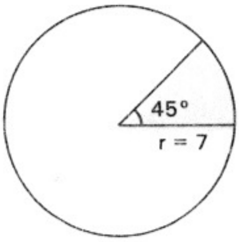


$$\boxed{S_{set} = \frac{\ell \cdot r}{2}}$$

Exercícios

E6. **17** Calcule a área de um círculo de raio r = 7 cm e a área de um setor de 45° desse círculo.

Resolução:



$$S_C = \pi r^2 = \pi \cdot 7^2$$

$$\boxed{S_C = 49\pi}$$

$$S_{set} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{45°}{360°} \cdot \pi \cdot 7^2$$

$$\boxed{S_{set} = \frac{49\pi}{8}}$$

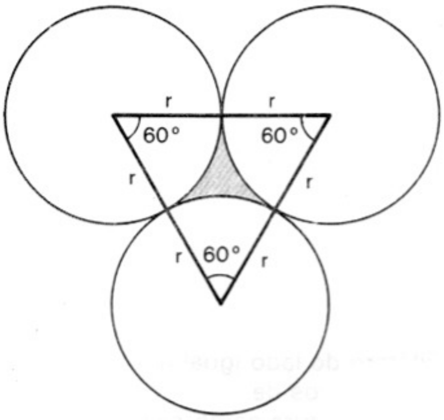
Resposta: A área do círculo é 49π cm² e a do setor é $\frac{49\pi}{8}$ cm².

E6. **18** Dado um círculo de raio igual a 5 m, calcule:

a) a área do círculo;

b) as áreas de setores de 60°, 90° e 120° desse círculo.

E6.19 Calcule a área da região indicada na figura seguinte, onde as circunferências têm raios iguais a **r** e são tangentes duas a duas.



Resolução: Observe que o triângulo que têm vértices nos centros das circunferências é eqüilátero de lado 2r. Então, cada um de seus ângulos mede 60°. Assim, para obter a área procurada, devemos subtrair da área do triângulo as áreas dos três setores circulares de 60°. Isto é,

$$\boxed{S = S_\triangle - 3 \cdot S_{set}} \qquad (1)$$

No E6.10 vimos que a área de um triângulo eqüilátero de lado ℓ é igual a $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

Conforme o E6.10, a área do triângulo eqüilátero será:

$$S_\triangle = \frac{(2r)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{4r^2\sqrt{3}}{4} \quad \therefore \quad \boxed{S_\triangle = r^2\sqrt{3}}$$

Já a área de um setor de 60° será:

$$S_{set} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \quad \therefore \quad \boxed{S_{set} = \frac{\pi r^2}{6}}$$

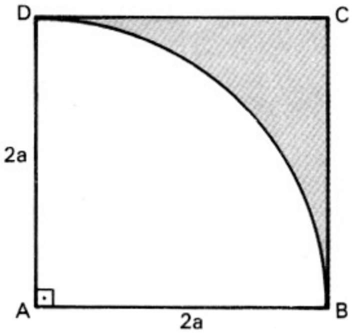
Substituindo esses resultados em (1), vem:

$$S = r^2\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{\pi r^2}{6}$$

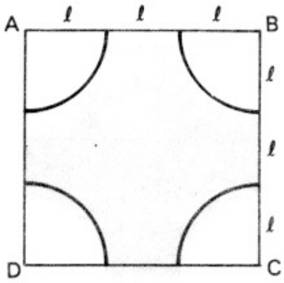
$$S = r^2\sqrt{3} - \frac{\pi r^2}{2}$$

Resposta: $S = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$

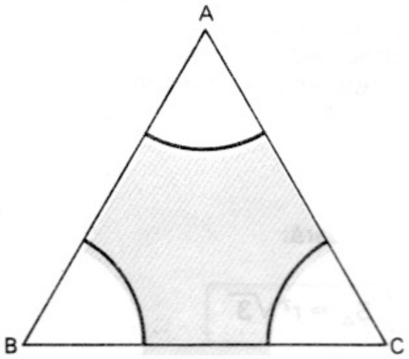
E6.20 Na figura seguinte, ABCD é um quadrado de lado igual a 2a e BD é um arco de circunferência de centro A. Calcule, em função de **a**, a área da região indicada.



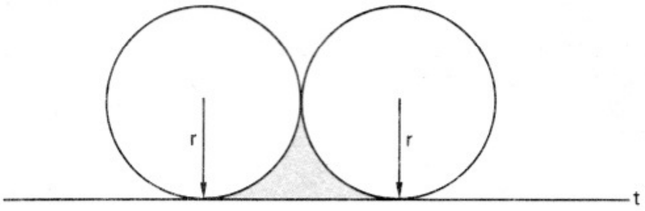
E6. **21** Na figura seguinte, ABCD é um quadrado de lado 3ℓ. Com centros nos vértices, foram descritos arcos de circunferências de raios iguais a ℓ. Calcule, em função de ℓ, a área da região indicada.



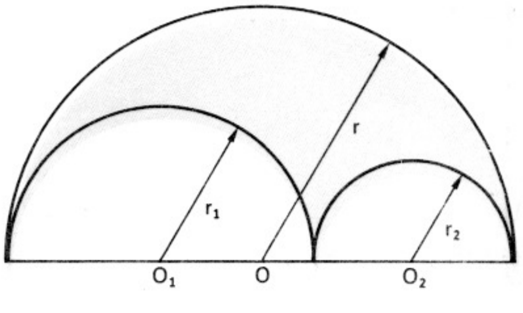
E6. **22** Na figura seguinte, ABC é um triângulo eqüilátero de lado igual a 6 cm. Com centros em A, B e C foram descritos arcos de circunferências de raios iguais a 2 cm, restando a figura sombreada. Calcule a área dessa figura.



E6. **23** Na figura seguinte, as circunferências são tangentes entre si e tangenciam a reta **t**. Sendo iguais a **r** os raios das circunferências, calcule, em função de **r**, a área da região indicada.



E6. **24** A região sombreada na figura seguinte é limitada por três semicircunferências tangentes duas a duas. Calcule a sua área, sabendo que $r_1 = 6$ e $r_2 = 4$.



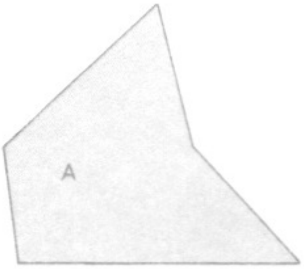
7

Equivalência

Definição

Duas figuras planas são ditas **equivalentes** quando, e somente quando, possuem áreas iguais.

Denotaremos a equivalência pelo símbolo ≈.



$$\boxed{S_A = S_B \Leftrightarrow A \approx B}$$

Sob o título **equivalência**, passamos a estudar os problemas de construções geométricas que envolvem as áreas das figuras.

Problemas de quadraturas

Há uma classe de problemas importantes que propõem a construção de um quadrado equivalente a uma figura dada (triângulo, círculo, trapézio etc.). Esses problemas são denominados **quadraturas**.

Uma grande parte dos problemas de quadraturas são resolvidos da seguinte maneira:

1.º) sendo **x** o lado do quadrado procurado, sua área será $S_\square = x^2$;

2.º) expressa-se algebricamente a área da figura dada pelo produto de dois segmentos **p** e **q** conhecidos, isto é, sendo S a área da figura dada, "descobre-se" que $S = p \cdot q$;

3.º) como se procura o lado **x** do quadrado equivalente à figura dada, tem-se

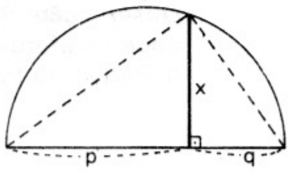
$$\begin{array}{ccc} S_\square & = & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ x^2 & = & p \cdot q \end{array}$$

4.º) então, **x** é a média geométrica entre **p** e **q**.

Observação: Com os exemplos dos exercícios resolvidos, esse processo ficará ainda mais claro.

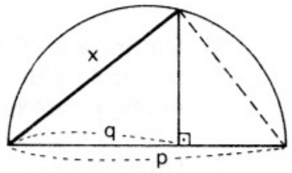
Lembre-se de que você pode determinar a média geométrica entre os segmentos **p** e **q** de duas maneiras.

- Como altura de um triângulo retângulo.



$x^2 = p \cdot q$

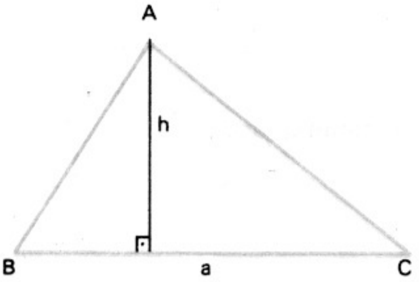
- Como cateto de um triângulo retângulo.



$x^2 = p \cdot q$

Exercícios

E7.1 Construa o lado do quadrado equivalente ao triângulo ABC dado.

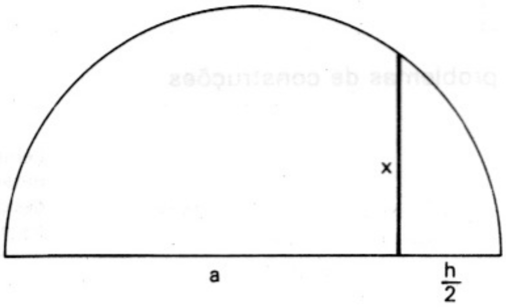


Resolução: Seja **x** o lado do quadrado procurado. Então, temos:

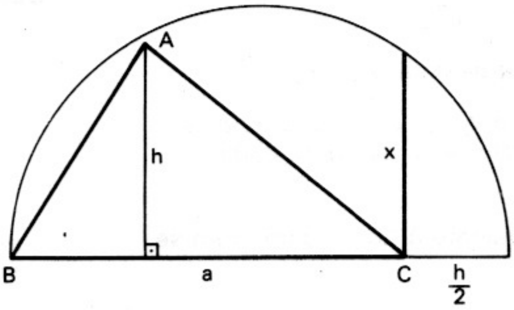
$$S_{\square} = S_{\triangle ABC}$$

$$x^2 = \frac{a \cdot h}{2} \Rightarrow \boxed{x^2 = a \cdot \frac{h}{2}}$$

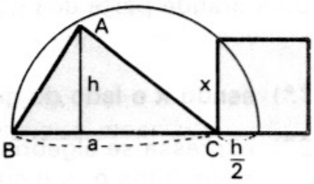
Assim, **x** é a média geométrica entre os segmentos **a** e $\frac{h}{2}$.



Observação: Para evitar transportes desnecessários de segmentos, pode-se efetuar a construção aproveitando o próprio lado **a** do triângulo na figura dada.



O quadrado de lado **x** é equivalente ao triângulo ABC, pois $x^2 = a\frac{h}{2}$.

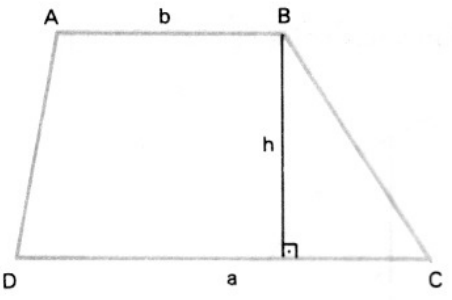


$S_{\square} = S_{\triangle ABC}$

E7.2 Obtenha graficamente o lado de um quadrado equivalente a um triângulo ABC, dados a = 51 mm, b = 42 mm e c = 57 mm. Qual é a medida aproximada do lado do quadrado?

E7.3 Qual é a medida aproximada do lado de um quadrado equivalente a um triângulo ABC no qual a = 50 mm, b = 54 mm e $\hat{C} = 60°$?

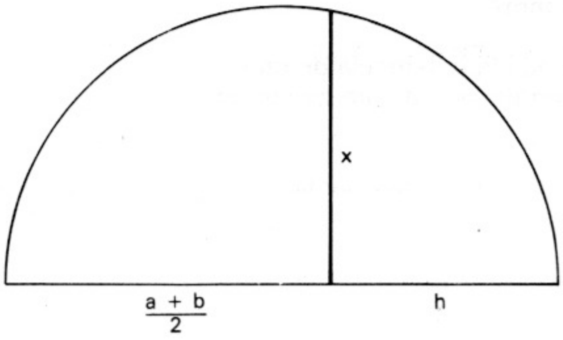
E7.4 Obtenha graficamente o lado do quadrado equivalente ao trapézio ABCD dado.



Resolução: $S_{\square} = S_{\text{⏢}}$

$$x^2 = \frac{(a + b) \cdot h}{2} \Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{(a + b)}{2} \cdot h}$$

O lado **x** procurado é a média geométrica entre os segmentos $\frac{a + b}{2}$ e **h**.



E7.5 Construa um trapézio ABCD de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, dados AB = 20 mm, BC = 40 mm, CD = 65 mm e AD = 30 mm. Qual é a medida aproximada do lado de um quadrado equivalente ao trapézio?

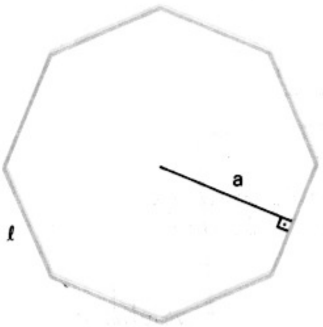
A construção de um trapézio do qual se conhecem os lados é o problema E1.1.

E7.6 Construa um losango de lado ℓ = 50 mm, sabendo que um de seus ângulos mede 45°. Qual é a medida aproximada do lado de um quadrado equivalente ao losango?

Sendo **d** e **d'** as diagonais do losango, sua área será $S = \frac{d \cdot d'}{2}$. Assim, $x^2 = d \cdot \frac{d'}{2}$.

E7.7 O comprimento da diagonal de um retângulo é 70 mm e o ângulo que as diagonais formam é de 60°. Qual é a medida aproximada do lado de um quadrado equivalente a esse retângulo?

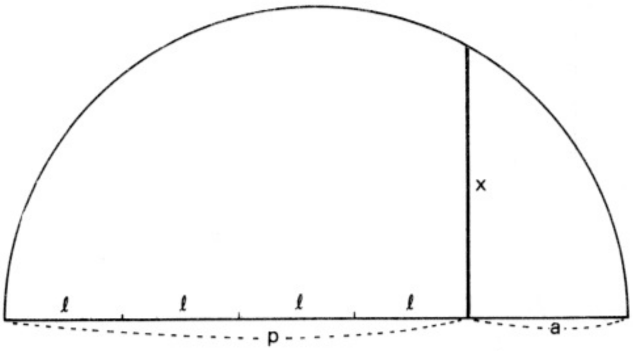
E7.8 Obtenha graficamente o lado de um quadrado equivalente ao octógono regular dado.



Resolução: Como a área de qualquer polígono regular é dada por **semiperímetro** × **apótema**, temos:

$$x^2 = p \cdot a$$

Logo, o lado do quadrado é a média geométrica entre os segmentos **p** e **a**.



Observação: A quadratura de qualquer polígono regular pode ser feita por esse processo.

E7.9 Quanto mede, aproximadamente, o lado de um quadrado equivalente a um hexágono regular de lado $\ell = 26$ mm?

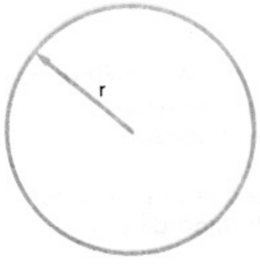
E7.10 Um heptágono regular está inscrito numa circunferência de raio r = 32 mm. Qual é a medida aproximada do lado de um quadrado equivalente a esse polígono?

E7.11 Determine graficamente o lado de um quadrado equivalente a um pentágono regular de lado $\ell = 36$ mm.

A construção de um polígono regular de lado dado foi discutida no E5.2.

E7.12 Construa um quadrado equivalente a um círculo de raio **r** dado.

Lembre-se de que pelo processo de Arquimedes obtemos a retificação de toda a circunferência, isto é, $2\pi r$. Já pelo processo de Kochansky, obtemos a retificação da semicircunferência, isto é, πr.

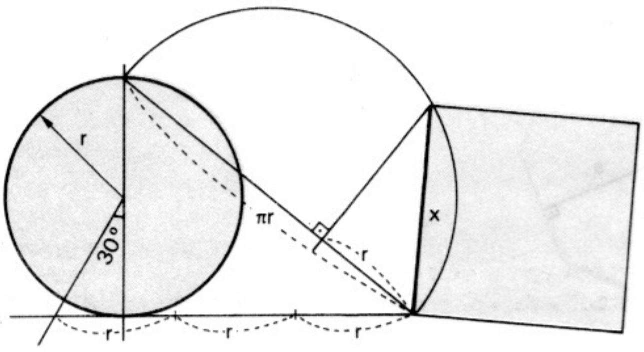


Resolução: $S_\square = S_\odot$

$$x^2 = \pi r^2 \Rightarrow \boxed{x^2 = (\pi r) \cdot r}$$

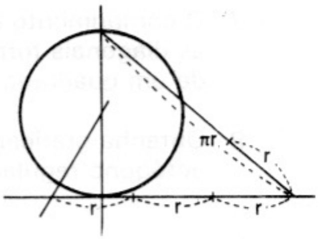
Assim, **x** é a média geométrica entre os segmentos πr e r.

Para obter o segmento πr, basta retificar a circunferência pelo processo de Arquimedes ou o de Kochansky. Como a obtenção de π é aproximada, a quadratura do círculo é também aproximada.

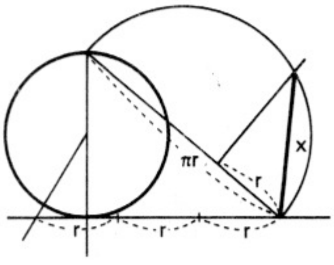


Evolução do traçado

1º passo



2º passo

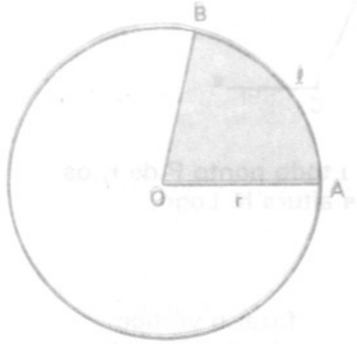


E7 · **13** Obtenha graficamente a medida aproximada do lado de um quadrado equivalente a um círculo de raio r = 26 mm.

E7 · **14** Qual é, aproximadamente, a medida do lado de um quadrado equivalente ao círculo circunscrito a um triângulo de lados a = 40 mm, b = 38 mm e c = 44 mm?

E7 · **15** Determine graficamente a medida do lado de um quadrado equivalente ao círculo inscrito num triângulo eqüilátero de lado ℓ = 72 mm.

E7 · **16** Determine graficamente o lado de um quadrado equivalente a um setor circular dado.



Resolução: Sendo ℓ o comprimento do arco AB, sabemos que a área do setor é dada por $\frac{\ell \cdot r}{2}$. Então, temos:

$$S_{\square} = S_{\triangle}$$

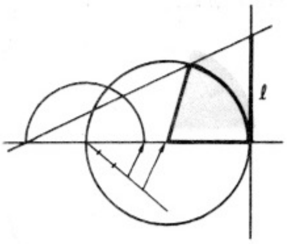
$$x^2 = \frac{\ell \cdot r}{2} \Rightarrow \boxed{x^2 = \ell \cdot \frac{r}{2}}$$

Logo, **x** é a média geométrica entre os segmentos ℓ e $\frac{r}{2}$.

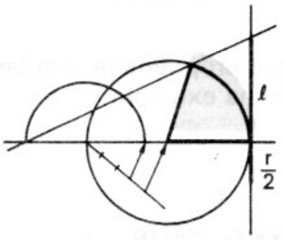
Para obter o segmento ℓ, basta retificar o arco AB e, como essa retificação é aproximada, a quadratura do setor também o será.

Evolução do traçado

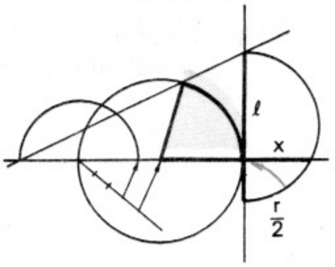
1.º passo

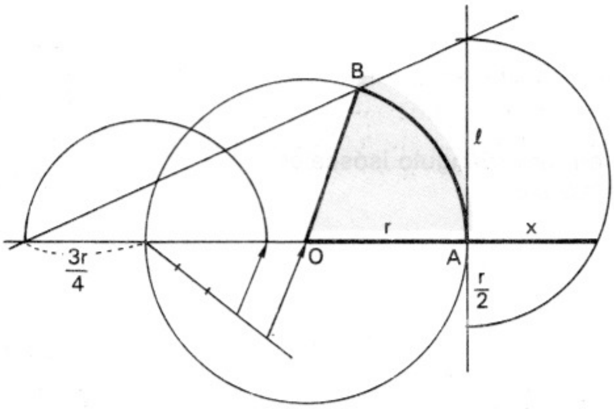


2.º passo



3.º passo



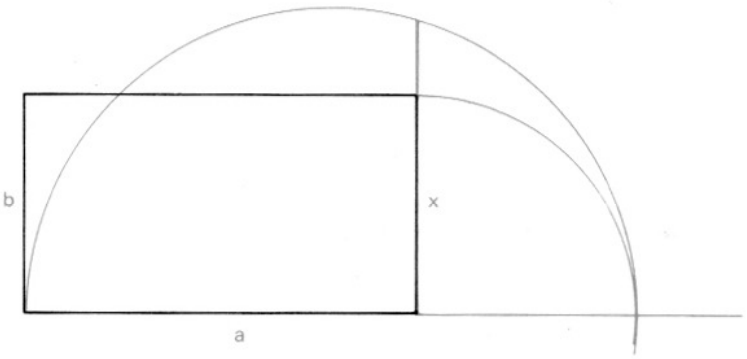


Resolva os exercícios de 68 a 74 do caderno de atividades.

E7 · **17** Determine graficamente o comprimento aproximado do lado de um quadrado equivalente a um setor circular de 75° de um círculo de raio r = 41 mm.

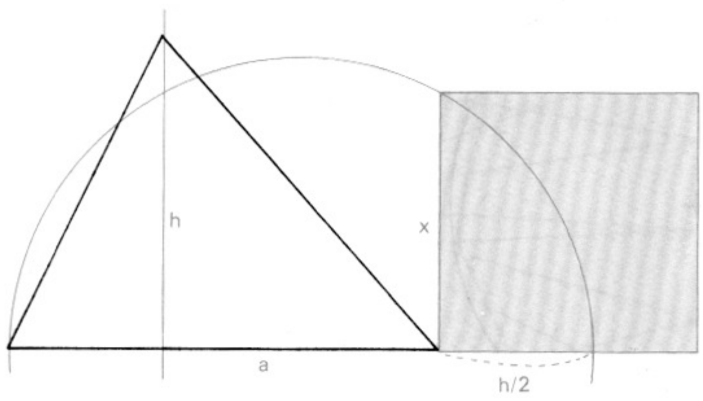
Equivalência: quadratura

68 Obtenha graficamente o lado do quadrado equivalente ao retângulo dado.



$x^2 = a \cdot b$

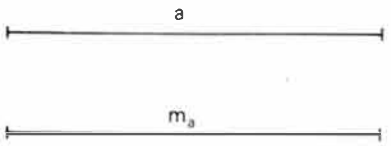
69 Construa um quadrado equivalente ao triângulo dado.

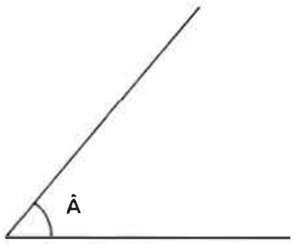


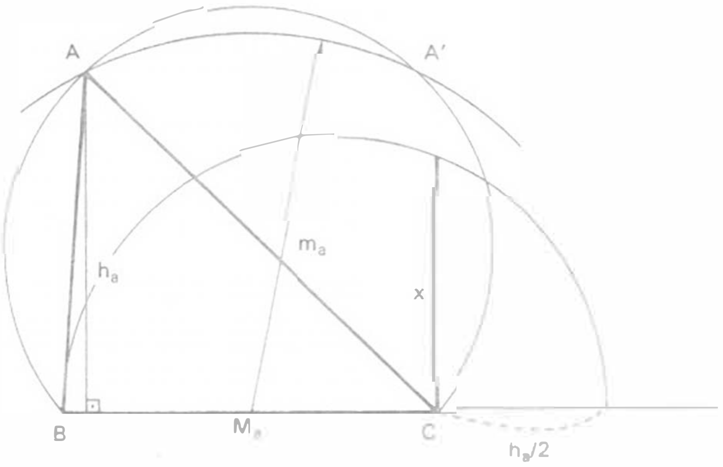
$x^2 = a \cdot \frac{h}{2}$

Equivalência: quadratura

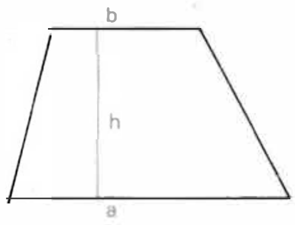
70 De um triângulo ABC são dados a, m_a e Â. Construa o triângulo e o lado do quadrado equivalente a ele.







71 Determine o lado de um quadrado equivalente ao trapézio dado.



$$x^2 = \frac{(a + b)}{2} \cdot h$$

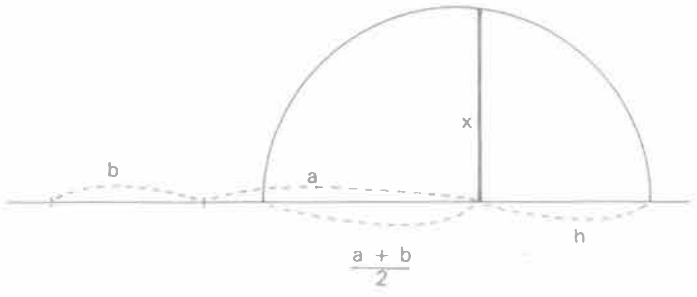


Figura auxiliar e anotações

Nota:
Não foram registrados os traçados que levam à construção do arco capaz.

Observação:
Comente que, além do triângulo ABC, a construção gera o triângulo A'BC. Porém, essa segunda solução é congruente à primeira.

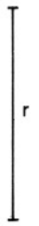
Equivalência: quadratura

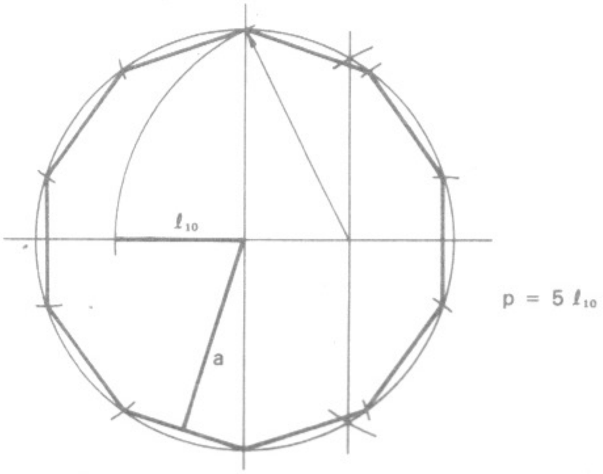
Figura auxiliar e anotações

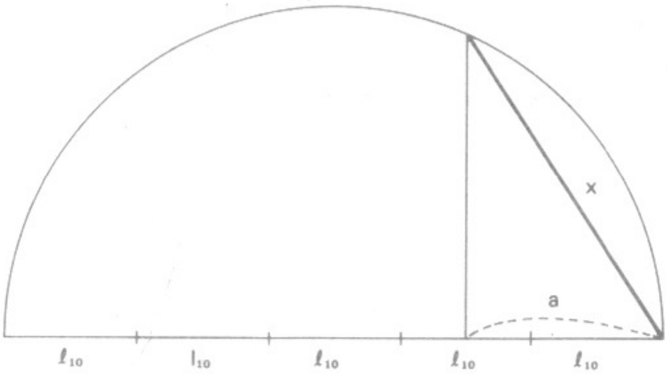
72 É dado o raio **r** da circunferência circunscrita a um decágono regular. Construa o decágono e obtenha o lado de um quadrado equivalente a ele.

Observação: Lembre-se de que a área de um polígono regular é dada por:

semiperímetro × apótema







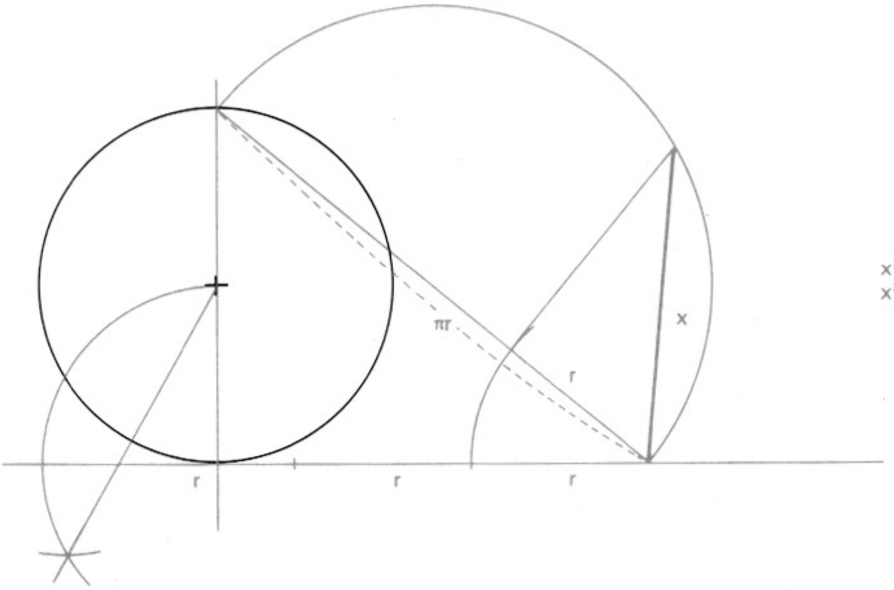
$$x^2 = p \cdot a$$

Observação:
Insista que a média geométrica obtida como cateto de um triângulo retângulo (conforme construção ao lado) ocupa um espaço menor do que aquela que se obtém como altura.

Equivalência: quadratura

Figura auxiliar e anotações

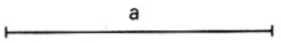
73 Determine o lado de um quadrado equivalente ao círculo dado.

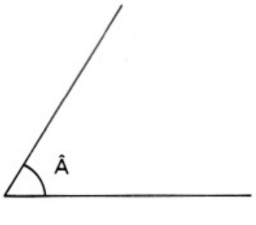


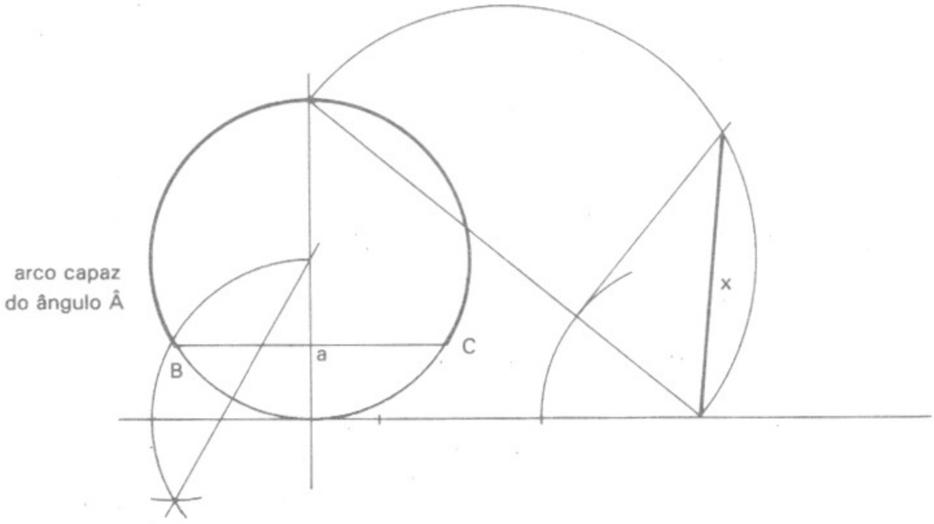
$x^2 = (\pi r) \cdot r$
$x^2 = \pi r^2$

74 De um triângulo ABC são dados **a** e Â. Determine o lado de um quadrado equivalente ao círculo circunscrito ao triângulo.

Observação: Embora o triângulo esteja indeterminado, o círculo circunscrito fica determinado pelo arco capaz.



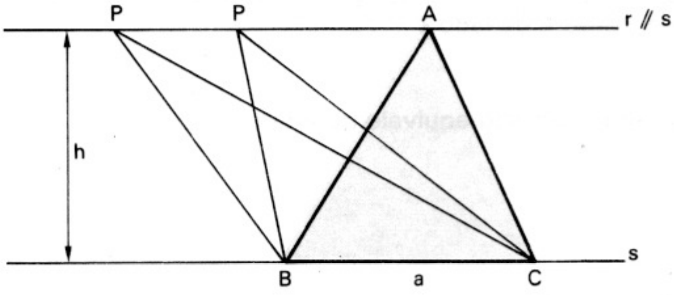




Propriedade fundamental da equivalência

Propriedade

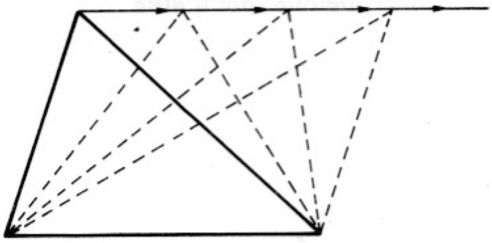
Seja ABC um triângulo qualquer e **r** a reta conduzida por A paralelamente ao lado $\overline{BC}$. Se P é um ponto qualquer de **r**, então o triângulo PBC é equivalente ao triângulo ABC.



A justificativa dessa propriedade é imediata, pois, para todo ponto P de **r**, os triângulos ABC e PBC têm a mesma base **a** e a mesma altura **h**. Logo,

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle PBC} = \frac{a \cdot h}{2}$$

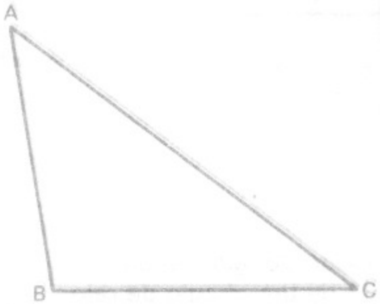
Assim, mantendo fixo um lado de um triângulo, podemos fazer o vértice oposto deslocar-se sobre a paralela ao lado fixo, mantendo inalterada a área do triângulo.



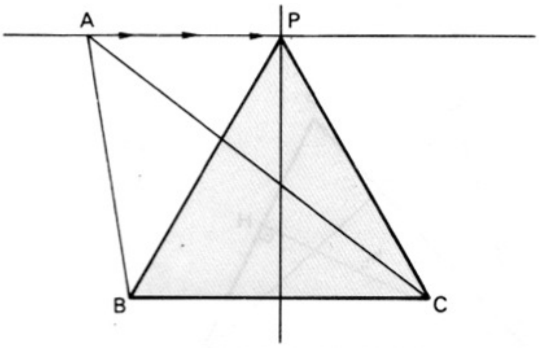
Essa propriedade tem largo emprego nos problemas de equivalência. Vejamos alguns exemplos.

Exercícios

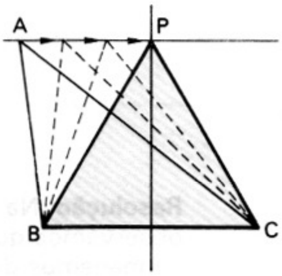
E7 **18** Transforme o triângulo ABC dado em um triângulo isósceles equivalente, de modo que $\overline{BC}$ seja a base.



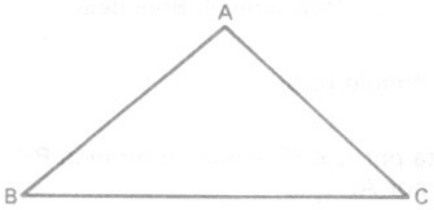
Resolução: O vértice procurado encontra-se na intersecção da reta conduzida por A paralelamente a $\overline{BC}$ com a mediatriz de $\overline{BC}$.



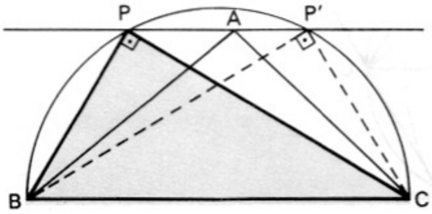
Observe que para o triângulo permanecer equivalente ao triângulo ABC, com a base $\overline{BC}$ fixa, o vértice A deve deslocar-se paralelamente ao lado $\overline{BC}$. Por outro lado, para que o triângulo fique isósceles, o vértice móvel deve "procurar" uma posição em que fique eqüidistante de B e C, isto é, ele deve se encontrar na mediatriz de $\overline{BC}$.



E7.19 Transforme o triângulo ABC dado num triângulo PBC equivalente de modo que $\hat{P}$ seja reto.

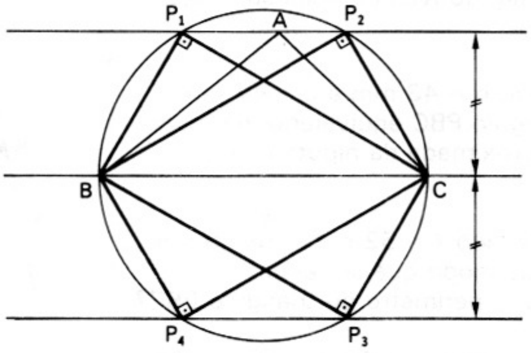


Resolução: Como o lado $\overline{BC}$ permanece constante, determinamos P na intersecção da reta conduzida por A paralelamente a $\overline{BC}$ com o arco capaz de 90° construído sobre $\overline{BC}$.



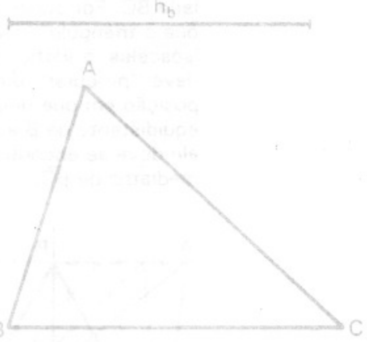
Observação: A rigor, interpretando o problema como sendo **de posição** ele admite quatro soluções, pois o vértice P pode se encontrar do outro lado de $\overline{BC}$ (o mesmo vale para o E7.18). Mas as quatro soluções são congruentes.

A consideração das várias soluções depende do que se pede para a resposta. Por exemplo, pedindo o perímetro do triângulo PBC, o problema tem resposta única, embora tenha quatro soluções em posições diferentes.

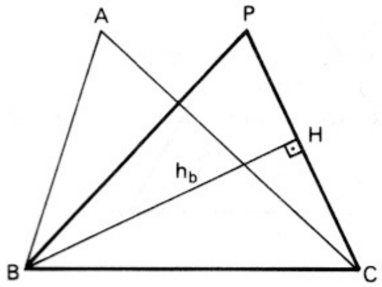


Porém, por comodismo, é costume desprezar as soluções, que se encontram no semiplano oposto ao de A com relação a $\overline{BC}$, desde que estas sejam congruentes às soluções obtidas no semiplano de A.

E7.**20** Transforme o triângulo ABC dado num triângulo PBC equivalente, de modo que este último tenha a altura h_b dada.



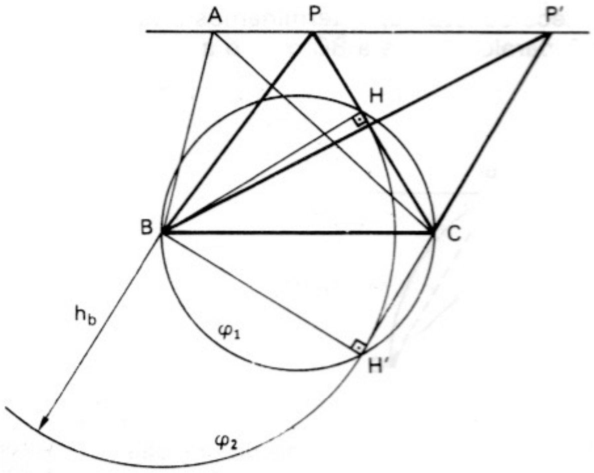
Suposto resolvido



Resolução: Na figura onde se supõe o problema já resolvido, observemos que o ponto H, pé da altura, é determinável, pois dele conhecemos duas propriedades.

φ_1: H vê $\overline{BC}$ segundo um ângulo reto
φ_2: H dista h_b de B

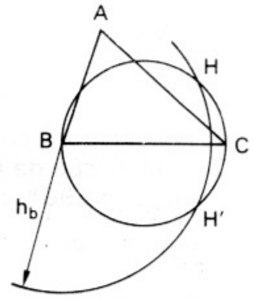
Determinando H, podemos traçar a reta por C e H, a qual determina P na reta paralela ao lado $\overline{BC}$ conduzida por A.



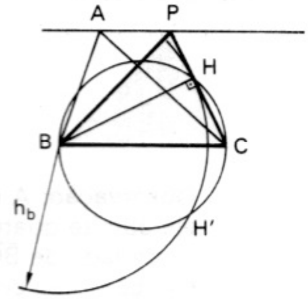
Observação: Com os dados do problema, obtivemos duas soluções.

Evolução do traçado

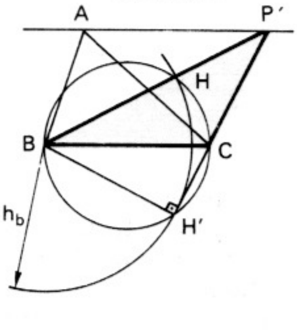
1.º passo



2.º passo



3.º passo



E7.**21** Seja ABC um triângulo com a = 50 mm, b = 43 mm e c = 47 mm. Transforme o triângulo ABC num triângulo PBC equivalente de modo que $P\hat{B}C$ seja reto. Qual é a medida aproximada da hipotenusa do triângulo obtido?

E7.**22** É dado um triângulo ABC eqüilátero de lado ℓ = 52 mm. Transforme ABC num triângulo PBC equivalente, de modo que se tenha $B\hat{P}C = 45°$. Qual é, aproximadamente, o perímetro do triângulo PBC?

E7.**23** De um triângulo ABC, são dados a = 50 mm, c = 40 mm e $\hat{B} = 60°$. Transforme ABC num triângulo PBC equivalente, de modo que a mediana relativa ao vértice P tenha 45 mm de comprimento. Qual é, aproximadamente, a medida do maior lado do triângulo PBC?

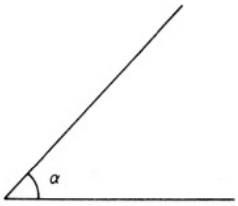
Resolva os exercícios de 75 a 78 do caderno de atividades.

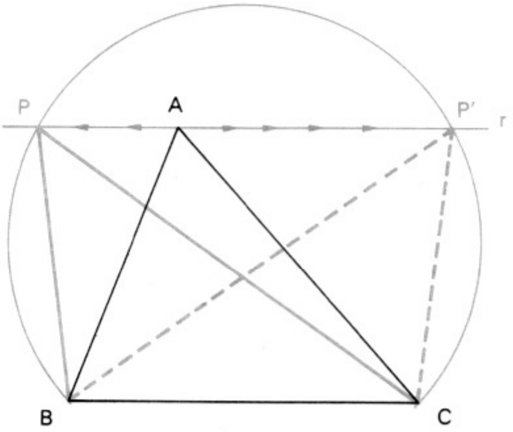
Equivalência: propriedade fundamental

Figura auxiliar e anotações

Observação:
É interessante que o aluno adquira uma certa visão cinemática nas aplicações da propriedade fundamental de equivalência. Assim, persista na idéia de que o vértice A se desloca sobre a reta r até encontrar o arco capaz do ângulo Â.

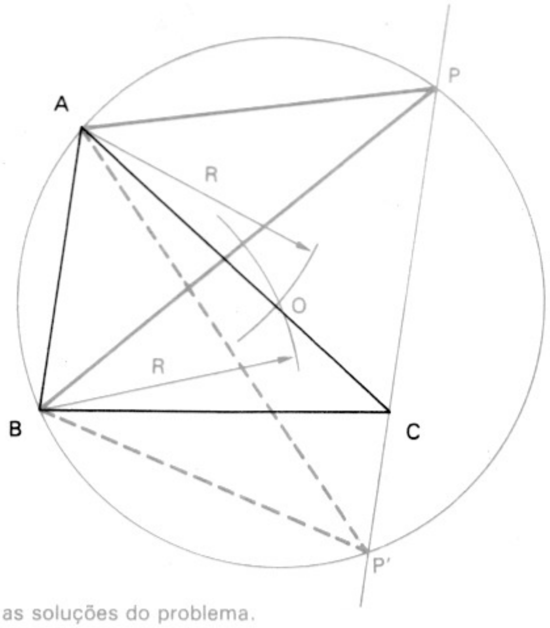
75 Transforme o triângulo ABC dado num triângulo PBC equivalente, de modo que neste último se tenha $\hat{P} = \alpha$.





Os triângulos PBC e P'BC são as soluções do problema.

76 Transforme o triângulo ABC dado num triângulo PAB equivalente, de modo que o raio da circunferência circunscrita ao triângulo PAB seja igual a R dado.
Atenção! O lado fixo é $\overline{AB}$.



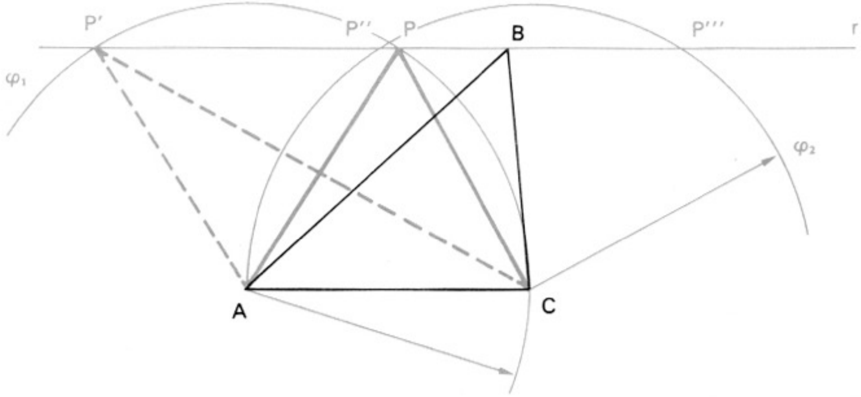
Os triângulos PAB e P'AB são as soluções do problema.

Equivalência: propriedade fundamental

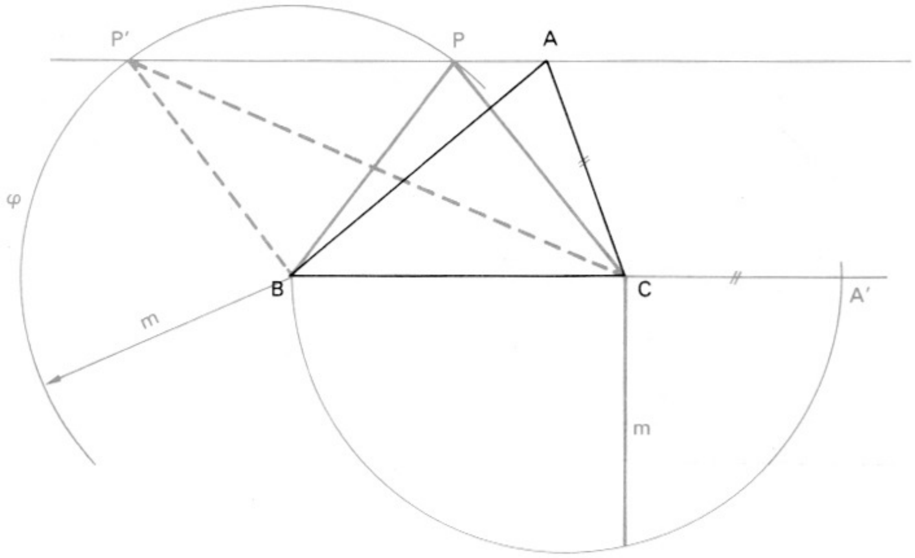
Figura auxiliar e anotações

77 Transforme o triângulo ABC num triângulo PAC isósceles equivalente, de modo que $\overline{PC}$ seja a base do triângulo obtido.

Nota:
A circunferência φ_2 determina em **r** os pontos P'' e P''', os quais geram mais duas soluções simétricas dos triângulos PAC e P'AC.



78 Transforme o triângulo ABC num triângulo PBC equivalente, de modo que PB seja a média geométrica entre BC e AC.



1.º) A'C = AC
2.º) **m**, média geométrica entre BC e A'C.
3.º) φ, determinando P e P'.

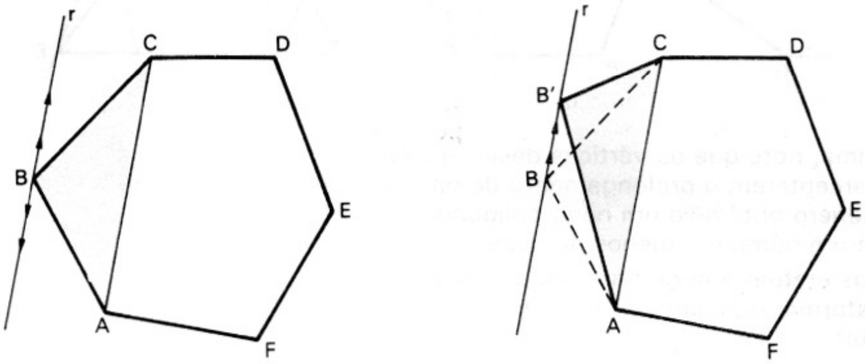
Transformação de polígonos em triângulos equivalentes

Problema

Transformar um polígono dado em um triângulo equivalente.

Para compreender bem as transformações que passaremos a estudar, é necessário que você esteja bem familiarizado com a propriedade fundamental da equivalência. Ela será aplicada, agora, em triângulos que constituem partes de uma figura.

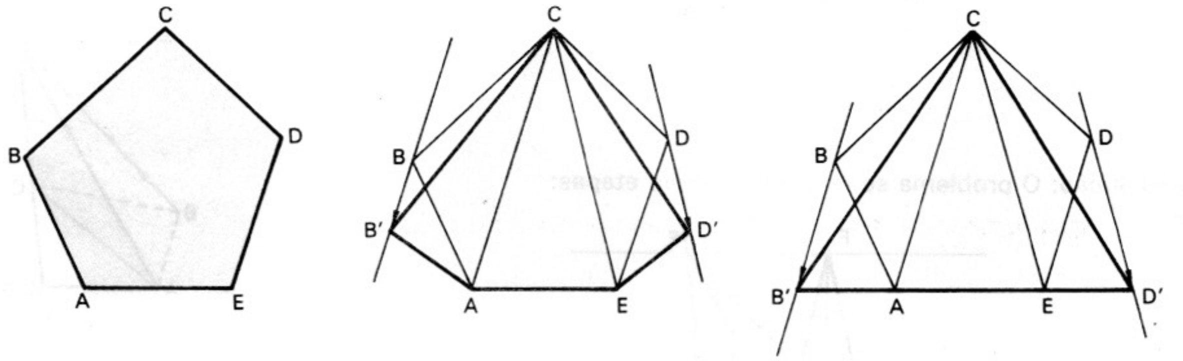
Observe com atenção as figuras seguintes:



Quando o vértice B do hexágono "desliza" sobre a reta **r** paralela a $\overline{AC}$, a área do triângulo ABC permanece constante. Assim, se B deslocar-se para uma posição B' **qualquer** de **r**, fica determinado um hexágono AB'CDEF equivalente ao hexágono ABCDEF.

A partir disso podemos transformar facilmente um polígono qualquer dado em um triângulo equivalente.

Por exemplo, veja a transformação do pentágono dado em um triângulo.

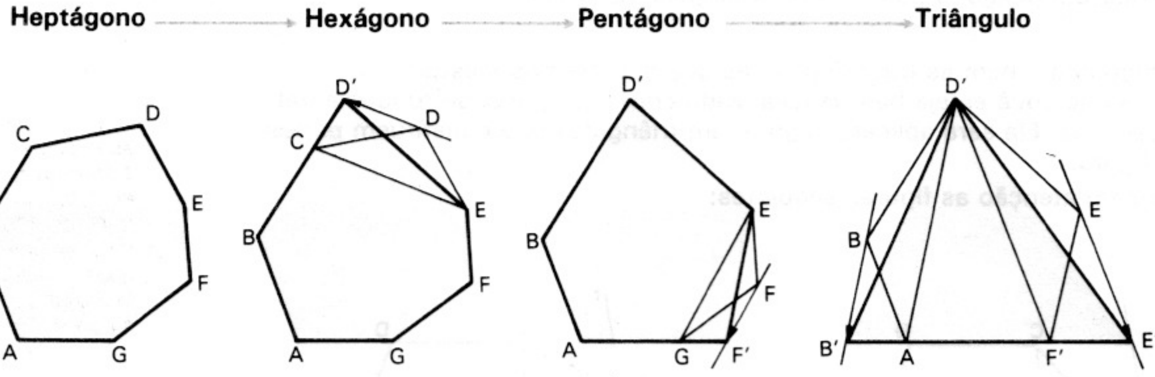


Fazendo B deslocar-se paralelamente a $\overline{AC}$, e D paralelamente a $\overline{CE}$, a área do pentágono ABCDE permanece invariável. Se B e D deslocam-se até a reta que contém o lado $\overline{AE}$, obtém-se o triângulo B'CD', equivalente ao pentágono ABCDE.

Observações:

- Evidentemente o problema apresenta infinitas soluções, já que o próprio triângulo B'CD' pode ser transformado em outros infinitos triângulos equivalentes.

- Se o polígono dado tiver mais que cinco lados, podemos transformá-lo em uma série de polígonos equivalentes, na qual cada novo polígono tem um lado a menos que o anterior, até que o transformemos num triângulo. Veja a seqüência seguinte, que transforma um heptágono em um triângulo equivalente.

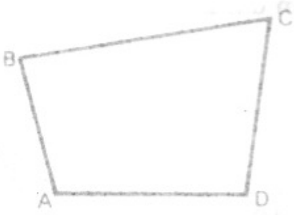

Heptágono
Hexágono
Pentágono
Triângulo
A B C D E F G
A B C D D' E F G
A B D' E F G F'
A B B' D' E E' F'

Na sucessão de transformações acima, note que os vértices deslocam-se paralelamente às diagonais, até interceptarem o prolongamento de um lado do polígono. A cada operação desse gênero obtém-se um novo polígono equivalente ao anterior, porém com um número a menos de lados.

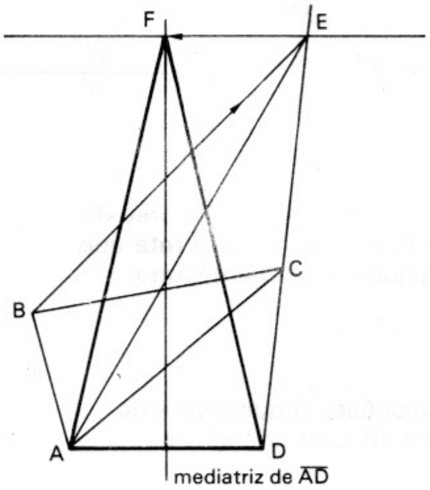
- A partir desse processo, podemos efetuar a quadratura de qualquer polígono. Para tanto, basta transformar o polígono num triângulo equivalente e efetuar a quadratura do triângulo.

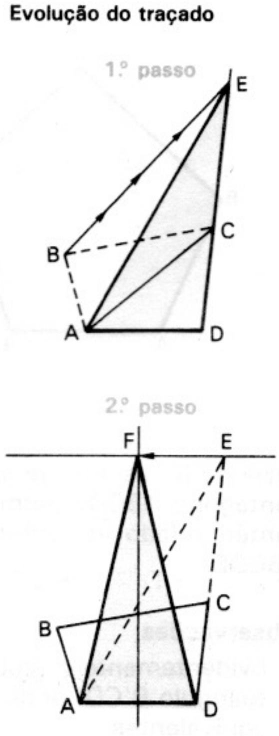
Exercícios

E7.**24** Transforme o quadrilátero ABCD dado num triângulo isósceles equivalente, de modo que $\overline{AD}$ seja a base do mesmo.



Resolução: O problema se resolve em duas etapas:

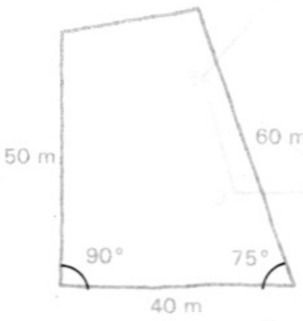

F
E
C
B
A
D
mediatriz de $\overline{AD}$


Evolução do traçado
1.º passo
E
C
B
A
D
2.º passo
F
E
C
B
A
D

1.º) transforma-se o quadrilátero em um triângulo mantendo-lhe o lado $\overline{AD}$ (triângulo ADE);

2.º) transforma-se o triângulo obtido em um triângulo isósceles de base $\overline{AD}$. (E7.18)

E7.25 A figura seguinte mostra um esboço da planta de um terreno. Pede-se, então:



a) Com a máxima precisão, faça uma planta do terreno na escala de 1 : 1000.

b) Transforme o quadrilátero da planta num triângulo equivalente.

c) Determine o lado de um quadrado equivalente ao quadrilátero da planta.

d) Qual é, aproximadamente, a área do terreno? (Dar a resposta em m².)

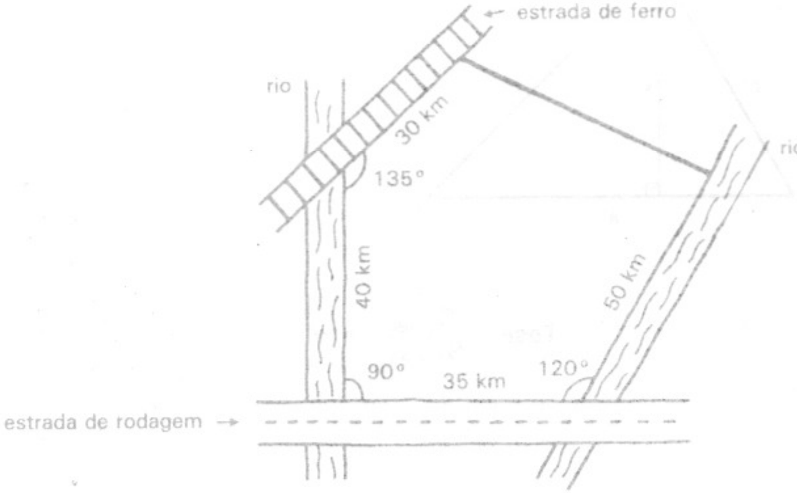
Sugestões:

a) Escala de 1:1000 significa que cada metro real torna-se 1 mm no desenho.

b) Um quadrado equivalente ao quadrilátero da planta é equivalente ao triângulo em que a planta foi transformada.

c) Se ℓ é o lado do quadrado obtido, então a sua área, e, portanto, a da planta, é igual a ℓ^2. Aqui, evidentemente, você terá que fazer o cálculo aritmeticamente, mas não esqueça que 1 mm no desenho é 1 m real.

E7.26 A figura seguinte é um esboço do mapa de uma reserva florestal. Com a máxima precisão, faça uma planta dessa reserva, representando 1 km por 1 mm (escala de 1 : 10^6), e determine o lado de um quadrado equivalente a ela. Qual é, aproximadamente, a área da reserva? (Dar a resposta em km².)



Resolva os exercícios de 79 a 83 do caderno de atividades.

Razão entre áreas de figuras semelhantes

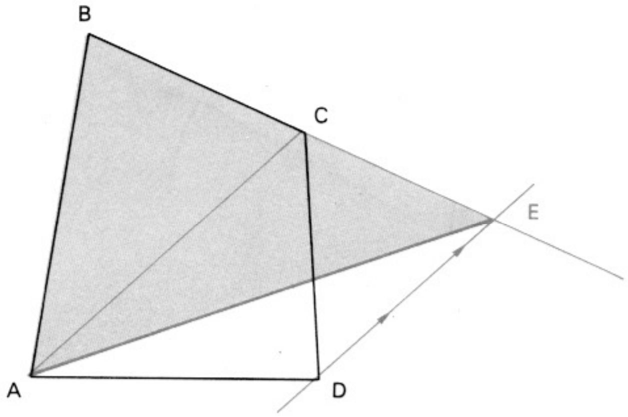
Para poder resolver os problemas de equivalência que passaremos a estudar, será preciso, antes, compreender uma propriedade sobre as áreas das figuras semelhantes.

Equivalência: transformação de polígono em triângulo

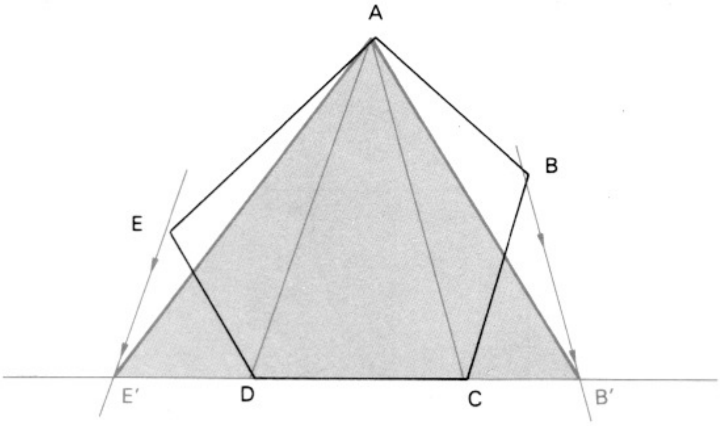
Figura auxiliar e anotações

Observação:
Insista que esse problema admite infinitas soluções, já que, se E percorrer uma reta paralela ao lado $\overline{AB}$, em qualquer posição o triângulo EAB será equivalente ao quadrilátero.

79 Transforme o quadrilátero ABCD num triângulo ABE equivalente.
Observação: Como A e B são vértices do triângulo procurado, você deve deslocar o vértice C ou o D.



80 Transforme o pentágono dado num triângulo equivalente, de modo que A seja um dos vértices e o lado oposto ao mesmo esteja contido na reta CD.

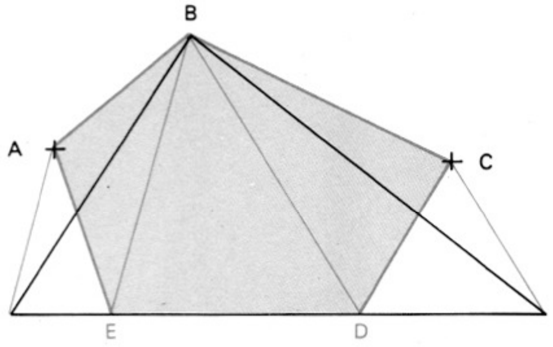


O triângulo AE'B' é a solução.

Equivalência: transformação de polígono em triângulo

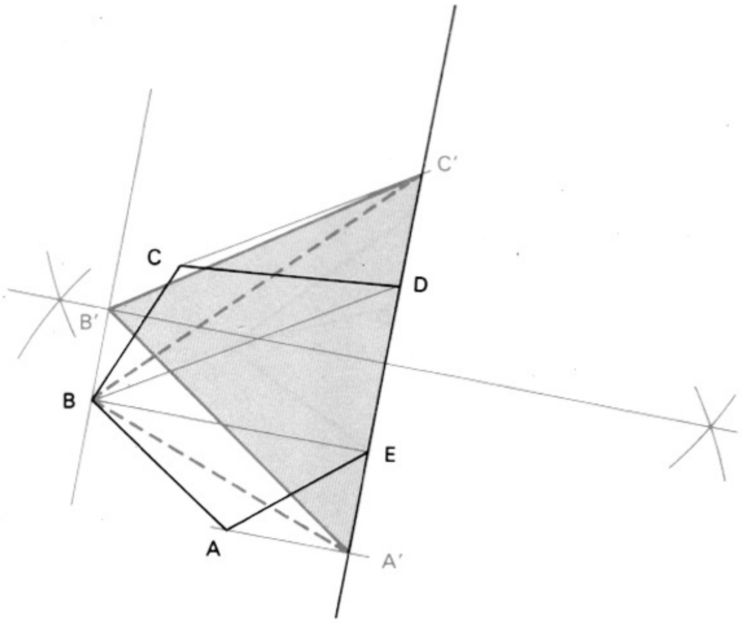
81 Transforme o triângulo dado em um pentágono equivalente, de modo que A, B e C sejam vértices do pentágono.

Sugestão: Basta usar o caminho inverso do problema anterior.



82 Transforme o pentágono dado em um triângulo isósceles equivalente, de modo que a base do triângulo esteja na reta suporte do lado $\overline{DE}$.

1.º) Transforma-se ABCDE no triângulo BA′C′ equivalente.
2.º) Transforma-se o triângulo BA′C′ no triângulo B′A′C′ isósceles equivalente.

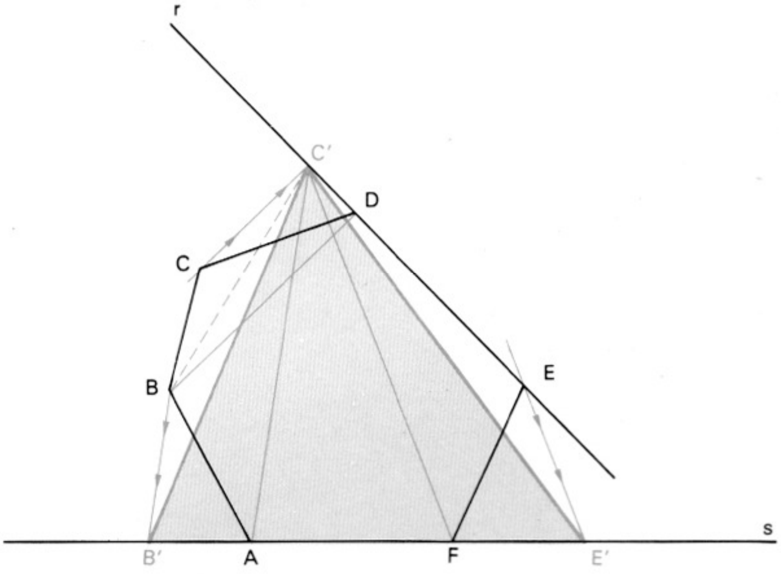


Equivalência: transformação de polígono em triângulo — primeiro problema geral

Figura auxiliar e anotações

83 Transforme o hexágono dado num triângulo equivalente, de modo que um dos seus vértices caia na reta **r** e os outros dois na reta **s**.

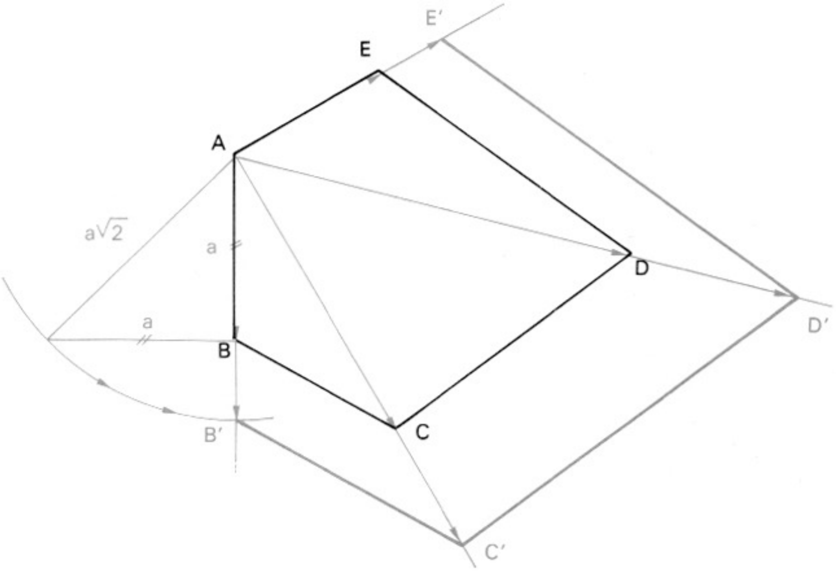
Sugestão: Comece transformando o hexágono em um pentágono equivalente, deslocando C paralelamente a $\overline{BD}$ até que ele encontre **r**.



1.°) C′
2.°) B′
3.°) E′

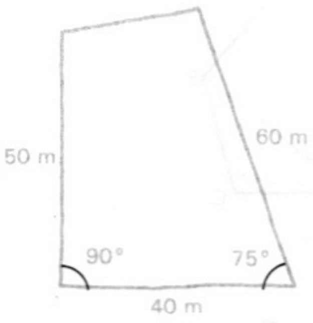
B′C′E′ é o triângulo procurado.

84 Construa um pentágono semelhante ao pentágono dado e de área igual ao dobro da área do mesmo.



1.º) transforma-se o quadrilátero em um triângulo mantendo-lhe o lado $\overline{AD}$ (triângulo ADE);
2.º) transforma-se o triângulo obtido em um triângulo isósceles de base $\overline{AD}$. (E7.18)

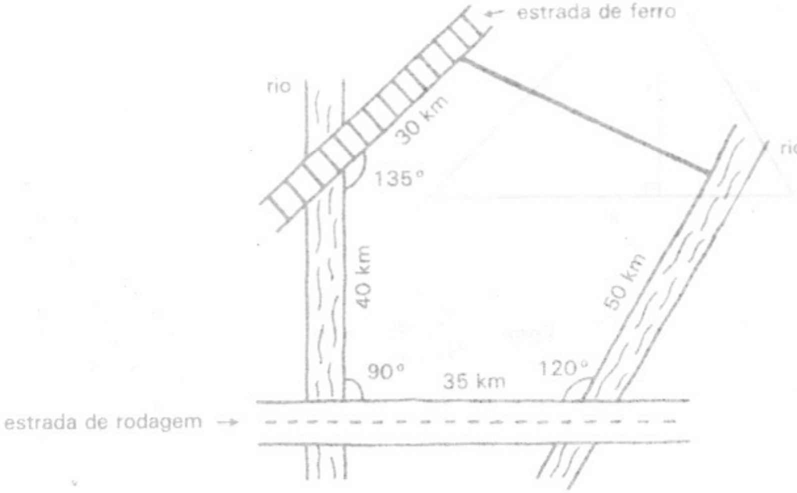
E7.25 A figura seguinte mostra um esboço da planta de um terreno. Pede-se, então:



a) Com a máxima precisão, faça uma planta do terreno na escala de 1 : 1000.
b) Transforme o quadrilátero da planta num triângulo equivalente.
c) Determine o lado de um quadrado equivalente ao quadrilátero da planta.
d) Qual é, aproximadamente, a área do terreno? (Dar a resposta em m^2.)

Sugestões:
a) Escala de 1:1000 significa que cada metro real torna-se 1 mm no desenho.
b) Um quadrado equivalente ao quadrilátero da planta é equivalente ao triângulo em que a planta foi transformada.
c) Se ℓ é o lado do quadrado obtido, então a sua área, e, portanto, a da planta, é igual a ℓ^2. Aqui, evidentemente, você terá que fazer o cálculo aritmeticamente, mas não esqueça que 1 mm no desenho é 1 m real.

E7.26 A figura seguinte é um esboço do mapa de uma reserva florestal. Com a máxima precisão, faça uma planta dessa reserva, representando 1 km por 1 mm (escala de 1 : 10^6), e determine o lado de um quadrado equivalente a ela. Qual é, aproximadamente, a área da reserva? (Dar a resposta em km^2.)



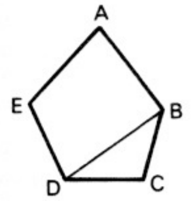
Resolva os exercícios de 79 a 83 do caderno de atividades.

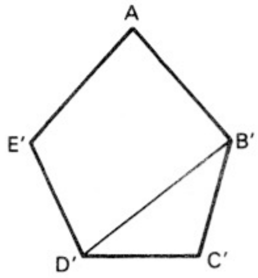
Razão entre áreas de figuras semelhantes

Para poder resolver os problemas de equivalência que passaremos a estudar, será preciso, antes, compreender uma propriedade sobre as áreas das figuras semelhantes.

Você se lembra de que a semelhança de duas figuras é caracterizada por duas propriedades:

- elementos lineares homólogos proporcionais;
- ângulos homólogos congruentes.





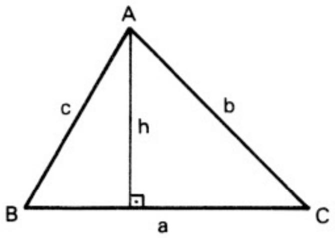
$$ABCDE \sim A'B'C'D'E' \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \ldots = \dfrac{BD}{B'D'} = \ldots \\ \measuredangle\, \hat{A} \equiv \measuredangle\, \hat{A}'; \ \measuredangle\, \hat{B} \equiv \hat{B}'; \ \ldots \end{cases}$$

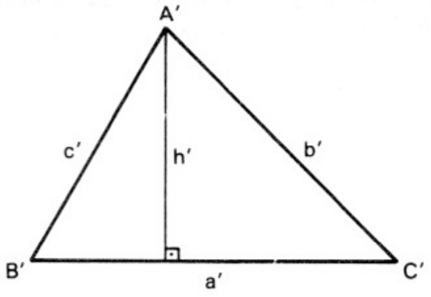
Feito esse lembrete, passemos a um teorema sobre polígonos semelhantes. Para tanto, precisamos estabelecer o seguinte lema.

Lema

Se em dois triângulos semelhantes a razão entre as linhas homólogas é igual a **k**, então a razão entre as áreas dos mesmos é igual a k^2.

Lema é uma proposição que se estabelece com o intuito de preparar um teorema. Um lema não deixa de ser também um teorema, mas ele é proposto e demonstrado para facilitar a demonstração de um outro teorema mais fecundo ou mais geral.





Hipótese $\begin{cases} \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \\ \text{com} \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \ldots = \dfrac{h}{h'} = \ldots = k \end{cases}$

Tese $\left\{ \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = k^2 \right.$

☐ **Demonstração**:

A demonstração é imediata, pois

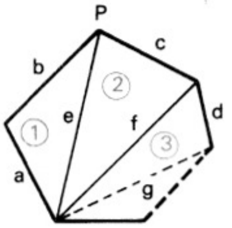
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\dfrac{a \cdot h}{2}}{\dfrac{a' \cdot h'}{2}} = \frac{a \cdot h}{a' \cdot h'} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{h}{h'}$$

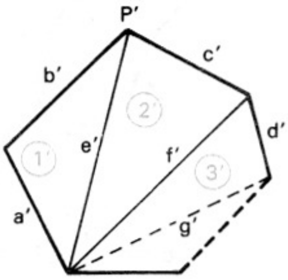
Como $\dfrac{a}{a'} = k$ e $\dfrac{h}{h'} = k$, $\boxed{\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = k^2}$

■ c.q.d.

Teorema

Se em dois polígonos semelhantes a razão entre as linhas homólogas é igual a **k**, então a razão entre as áreas dos mesmos é igual a k^2.



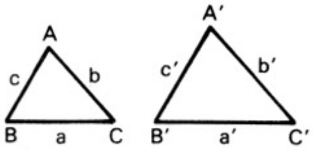


Hipótese $\begin{cases} P \sim P' \\ \text{com} \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \ldots = \dfrac{f}{f'} = \ldots = k \end{cases}$ **Tese** $\left\{ \dfrac{S_P}{S_{P'}} = k^2 \right.$

☐ **Demonstração**:

Note, inicialmente, que as diagonais que partem de dois vértices homólogos dividem os polígonos em pares de triângulos semelhantes. De fato, os triângulos **1**, **2**, **3**, ..., **n** são respectivamente semelhantes aos triângulos **1'**, **2'**, **3'**, ..., **n'**, por possuírem os lados proporcionais. (Critério LLL de semelhança.) Note, também, que para qualquer um dos pares de triângulos semelhantes, a razão linear é igual a **k**. Assim, pelo lema anterior, representando por S_1, S_2 etc. as áreas dos triângulos, temos:

Lembre-se de que o critério LLL de semelhança garante o seguinte:



Se $\left\{ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \right.$

Então $\left\{ \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \right.$

$$\frac{S_1}{S_{1'}} = k^2 \;;\quad \frac{S_2}{S_{2'}} = k^2 \;;\quad \ldots\ldots;\quad \frac{S_n}{S_{n'}} = k^2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$S_1 = k^2 \cdot S_{1'};\ S_2 = k^2 \cdot S_{2'};\quad \ldots\ldots;\ S_n = k^2 \cdot S_{n'}$$

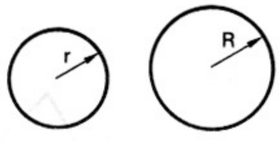
Então:

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = k^2 (S_{1'} + S_{2'} + \ldots + S_{n'}) \Rightarrow$$

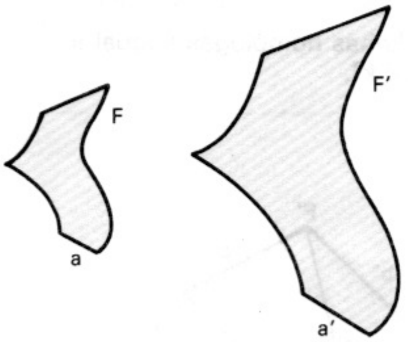
$$\Rightarrow \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{S_{1'} + S_{2'} + \ldots + S_{n'}} = k^2 \Rightarrow \quad \boxed{\frac{S_P}{S_{P'}} = k^2}$$

■ c.q.d.

Observação: É bastante simples demonstrar a validade dessa propriedade para os círculos, setores circulares semelhantes etc. Na realidade ela é válida para figuras semelhantes quaisquer, mas uma demonstração de caráter geral está fora do alcance da Matemática elementar. Desta feita, vamos admitir como verdadeira a proposição no caso geral.



$$\frac{r}{R} = k \Rightarrow \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2} = k^2$$

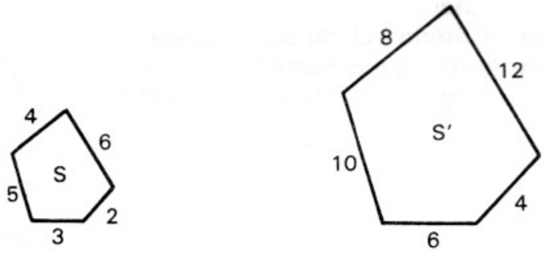


$$\text{Se}\begin{cases} F \sim F' \\ \text{com} \\ \dfrac{a}{a'} = k \end{cases} \qquad \text{Então}\left\{ \dfrac{S_F}{S_{F'}} = k^2 \right.$$

Convém que você abandone temporariamente a régua e o compasso e resolva alguns exercícios sobre essa propriedade, para se familiarizar com ela.

Exercícios

E7.**27** Na figura seguinte, os pentágonos são semelhantes. Calcule a razão entre suas áreas.



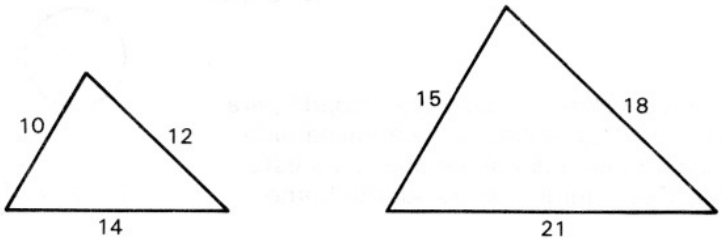
Resolução: A razão entre as linhas homólogas é $k = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{6} = \dfrac{2}{4} = \right.$ $= \left.\dfrac{6}{12} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}\right)$. Assim, a razão entre as áreas será

$$\frac{S}{S'} = k^2 \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{1}{4}$$

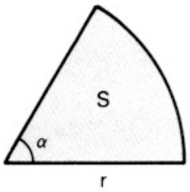
Resposta: $\dfrac{1}{4}$

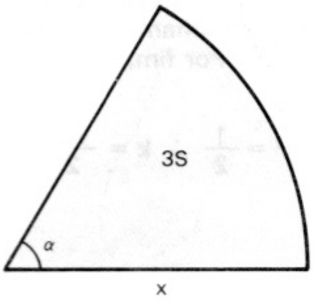
Note que os lados do pentágono maior são os dobros dos lados homólogos do menor, mas a área é o quádruplo da área daquele.

E7.**28** Calcule a razão entre as áreas dos triângulos.



E7.29 São dados dois setores circulares semelhantes. Se a área do maior é o triplo da área do menor, calcule o raio do maior em função do raio **r** do menor.





Resolução: Sendo S a área do setor menor, a do maior será 3S. Então, podemos calcular a razão entre suas áreas.

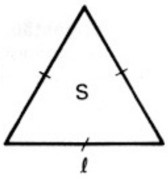
$$k^2 = \frac{3S}{S} \Rightarrow k^2 = 3 \therefore \boxed{k = \sqrt{3}}$$

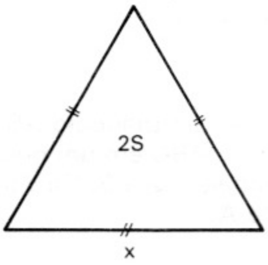
Como os raios são elementos lineares, a razão entre eles é igual a **k**, isto é,

$$\frac{x}{r} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{x = r\sqrt{3}}$$

Resposta: $r\sqrt{3}$

E7.30 São dados dois triângulos eqüiláteros, sendo a área de um o dobro da área do outro. Calcule o lado do maior em função do lado ℓ do menor.

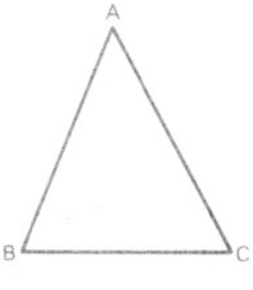


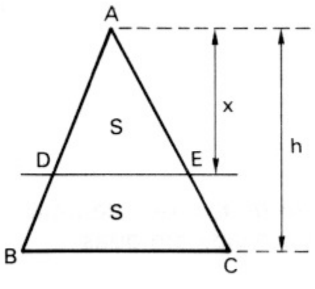


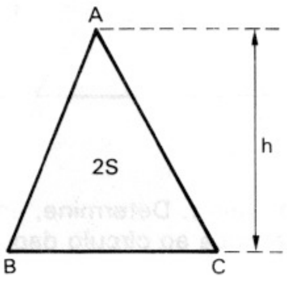
E7.31 Sendo **a** o lado de um quadrado de área S, qual é a medida do lado de um quadrado de área 5S?

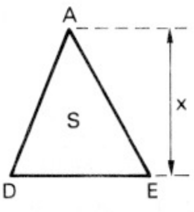
E7.32 Os lados de um triângulo medem 8 cm, 10 cm e 12 cm, e um segundo triângulo, semelhante ao primeiro, tem a sua área igual à metade da área do primeiro. Calcule as medidas dos lados do segundo triângulo.

E7.33 É dado um triângulo ABC cuja altura relativa a $\overline{BC}$ é igual a **h**. Calcule, em função de **h**, a que distância do vértice A deve-se traçar uma paralela a $\overline{BC}$ para dividir o triângulo ABC em dois polígonos equivalentes.









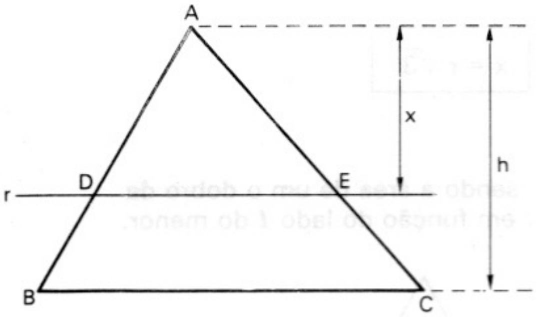
Resolução: Sejam D e E os pontos em que a reta procurada intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Queremos calcular a distância **x** dessa reta ao vértice A, para que o triângulo ADE e o trapézio DBCE sejam equivalentes, isto é, para que ambos tenham a mesma área S. Assim, a área do triângulo ABC é igual a 2S. Por fim, da semelhança dos triângulos ABC e ADE, temos:

$$k^2 = \frac{S}{2S} \Rightarrow k^2 = \frac{1}{2} \therefore k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, $\frac{x}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{h\sqrt{2}}{2}$

Resposta: $\frac{h\sqrt{2}}{2}$

E7.**34** Na figura seguinte, **r** é paralela a $\overline{BC}$. Calcule a distância **x** de **r** ao vértice A, em função de **h**, para que a área do trapézio DBCE seja o dobro da área do triângulo ADE.

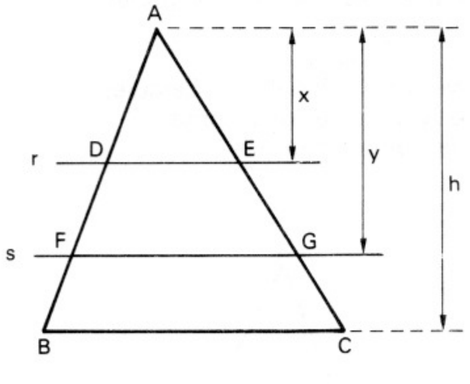


E7.**35** Seja **h** a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC. Uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ divide o triângulo ABC em um novo triângulo e um trapézio, cujas áreas são proporcionais a 2 e 3. Calcule, em função de **h**, a distância dessa reta ao vértice A.

Sugestão: As áreas proporcionais a 2 e 3 podem ser representadas por 2S e 3S.

E7.**36** Na figura seguinte, calcule as distâncias **x** e **y** em função de **h**, sabendo que as retas **r** e **s** dividem o triângulo ABC em três polígonos equivalentes. (**r** e **s** são paralelas a $\overline{BC}$.)

Sugestão: Para calcular **x** use a semelhança dos triângulos ADE e ABC, e para **y** os triângulos AFG e ABC.
São dois problemas em um só.



E7.**37** É dado um círculo de raio **r**. Determine, em função de **r**, o raio de uma circunferência concêntrica ao círculo dado e que o divide em duas partes equivalentes.

Problemas gerais de equivalência

Primeiro problema geral

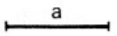
Problema

Construir uma figura **semelhante** a outra figura dada, cuja área seja **m** vezes a área da figura dada.

Exemplo: Construir um pentágono semelhante ao pentágono dado e de área igual ao dobro da área do mesmo.

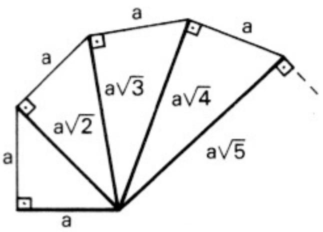
Para os problemas que recaem nesse caso geral, você terá que usar, com freqüência, uma construção estudada no volume 1.

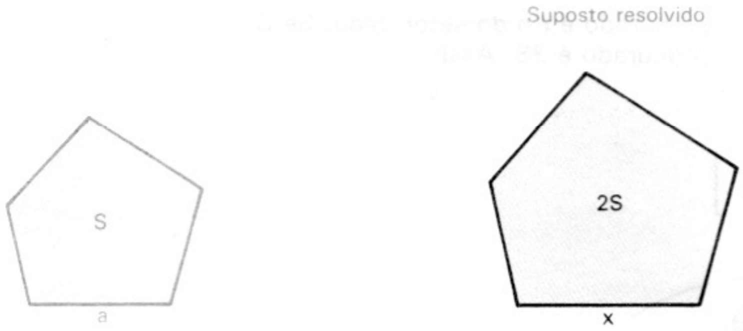
"Dado o segmento **a**, obter os segmentos $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$, ..."



(Se necessário, volte ao volume 1 para reestudar o problema.)

Resolução:



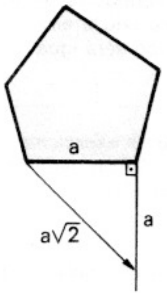


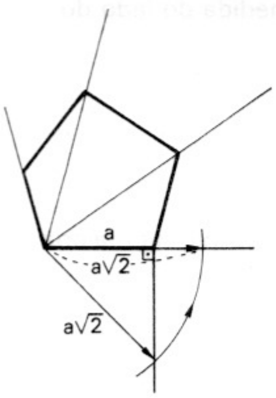
Resolução: Se S é a área do pentágono dado, a área do procurado é igual a 2S. Sendo **a** um lado qualquer do pentágono dado, vamos determinar, algebricamente, o lado homólogo do procurado. Temos, então:

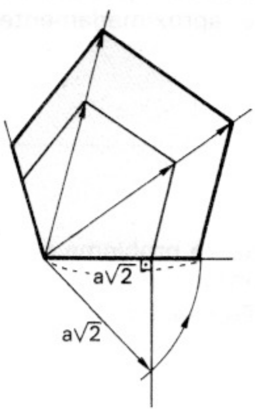
$$k^2 = \frac{2S}{S} \Rightarrow k^2 = 2 \therefore k = \sqrt{2}$$

Logo, $\frac{x}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow \boxed{x = a\sqrt{2}}$

Usando a própria figura dada, construímos o segmento $a\sqrt{2}$. Então construímos o pentágono procurado através de uma homotetia.



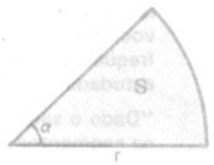




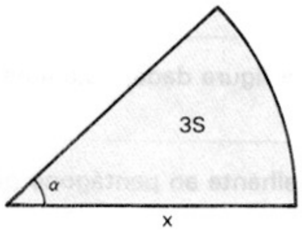
Exercícios

E7.38 Construa um triângulo eqüilátero de lado ℓ = 41 mm e, em seguida, construa um segundo triângulo eqüilátero de área igual ao dobro da área do primeiro. Qual é a medida do lado do segundo triângulo?

E7.**39** Construa um setor circular semelhante ao setor dado e de área igual a três vezes a área do mesmo.



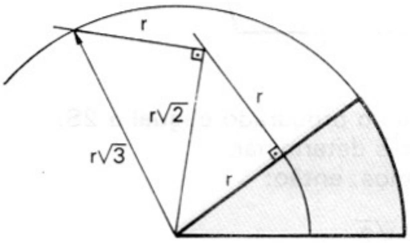
Suposto resolvido



Resolução: Seja **x** o raio do setor procurado e **r** o do setor dado. Se S é a área do setor dado, a área do procurado é 3S. Assim,

$$k^2 = \frac{3S}{S} \Rightarrow k^2 = 3 \therefore k = \sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } \frac{x}{r} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{x = r\sqrt{3}}$$



E7.**40** É dado um setor circular de 60° e raio r = 31 mm. Construa um setor circular semelhante ao primeiro e de área igual ao dobro da área daquele. Qual é, aproximadamente, o comprimento do arco que limita o setor obtido?

Observação: Após construir o setor circular pedido, você deve retificar o seu arco para medir o comprimento.

E7.**41** Construa um triângulo eqüilátero equivalente a um hexágono regular de lado $\ell = 27$ mm. Qual é, aproximadamente, a medida do lado do triângulo?

Sugestão: Sendo S a área de um qualquer dos seis triângulos eqüiláteros em que o hexágono regular pode ser decomposto, a área do triângulo eqüilátero procurado será igual a 6S.

Uma construção importante

Como veremos logo adiante, o segundo problema geral nos obriga, na maioria das vezes, a construir segmentos proporcionais a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}$.
Para tanto, vamos estudar a questão seguinte.

Resolva os exercícios de 84 a 87 do caderno de atividades.

Problema

Dado um segmento ℓ, construir os segmentos $\frac{\ell\sqrt{1}}{\sqrt{n}}, \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \frac{\ell\sqrt{3}}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{\ell\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$.

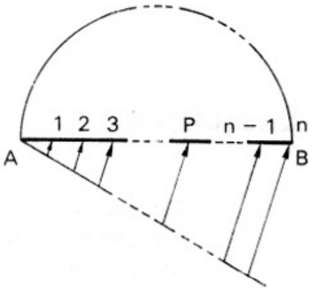
Resolução: Seja AB = ℓ

1.º) Constrói-se a semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$ e divide-se $\overline{AB}$ em **n** partes iguais, obtendo os pontos 1, 2, 3, ..., p, ..., n, conforme a figura.

2.º) Por 1, 2, ..., n levantam-se as perpendiculares a $\overline{AB}$, as quais determinam os pontos A_1, A_2, A_3, ..., A_p, A_n na semicircunferência.

Evolução do traçado

1.º passo

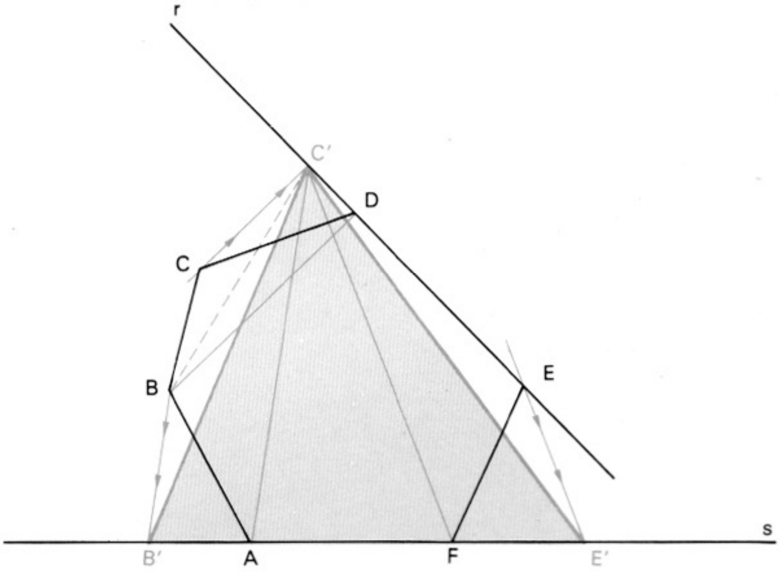


Equivalência: transformação de polígono em triângulo — primeiro problema geral

Figura auxiliar e anotações

83 Transforme o hexágono dado num triângulo equivalente, de modo que um dos seus vértices caia na reta **r** e os outros dois na reta **s**.

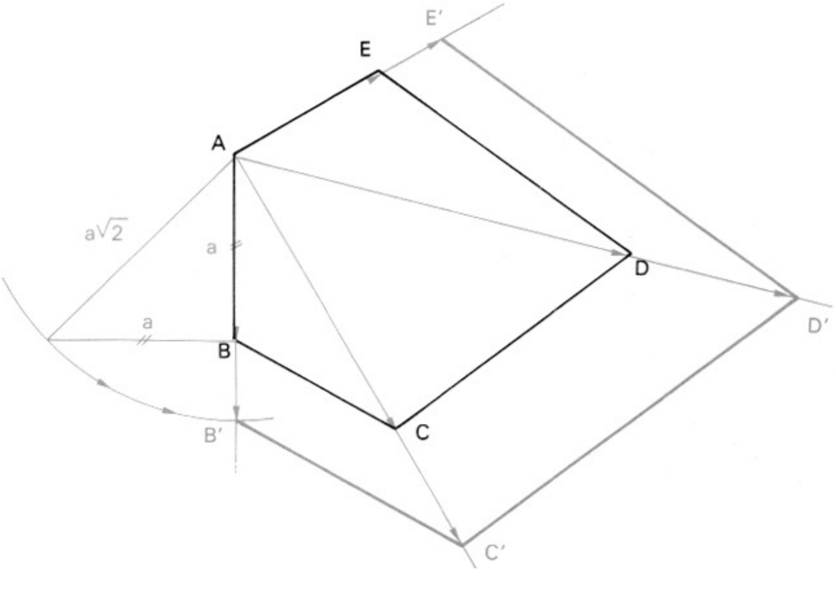
Sugestão: Comece transformando o hexágono em um pentágono equivalente, deslocando C paralelamente a $\overline{BD}$ até que ele encontre **r**.



1.º) C′
2.º) B′
3.º) E′

B′C′E′ é o triângulo procurado.

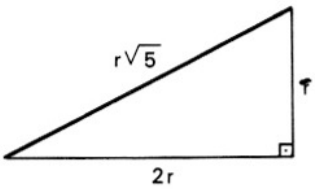
84 Construa um pentágono semelhante ao pentágono dado e de área igual ao dobro da área do mesmo.

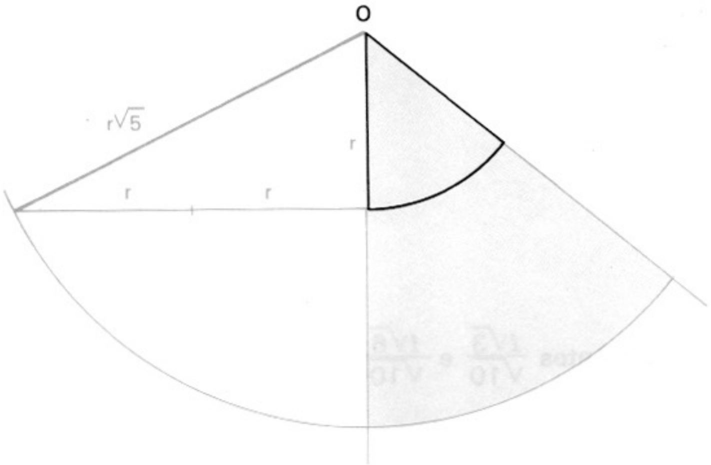


Equivalência: primeiro problema geral

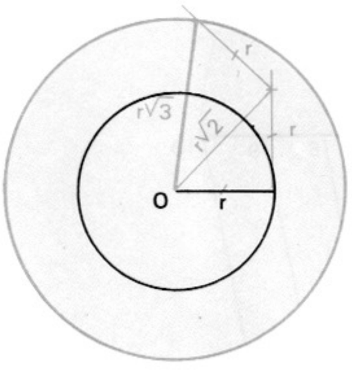
Figura auxiliar e anotações

85 Construa um setor circular semelhante ao setor dado e de área igual ao quíntuplo da área do mesmo.
Sugestão: Para obter o segmento $r\sqrt{5}$, é mais fácil executar a seguinte construção:



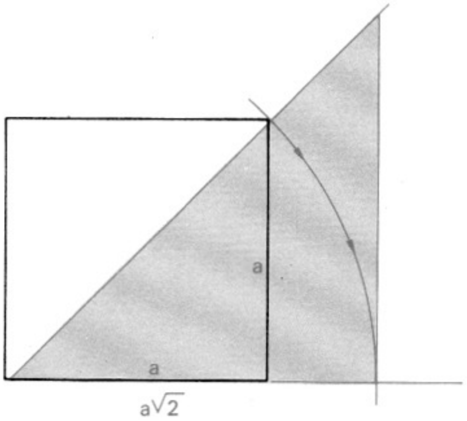

O
$r\sqrt{5}$
r
r
r

86 Construa um círculo de área igual ao triplo da área do círculo dado.


r
$r\sqrt{3}$
$r\sqrt{2}$
r
O
r

Equivalência: primeiro problema geral

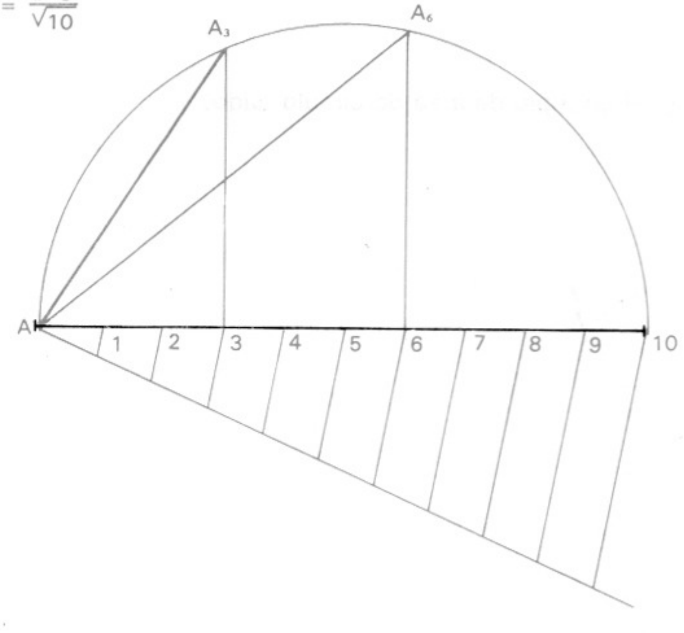
87 Construa um triângulo retângulo isósceles equivalente ao quadrado dado.
Sugestão: Observe que o quadrado pode ser decomposto em dois triângulos retângulos isósceles congruentes. Sendo S a área de cada um deles, o triângulo procurado terá área igual a 2S.



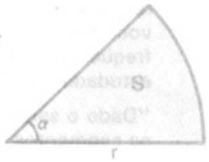
88 Dado o segmento ℓ, obtenha os segmentos $\frac{\ell\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$ e $\frac{\ell\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$.

$AA_3 = \frac{\ell\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$

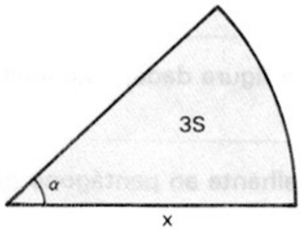
$AA_6 = \frac{\ell\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$



E7.**39** Construa um setor circular semelhante ao setor dado e de área igual a três vezes a área do mesmo.



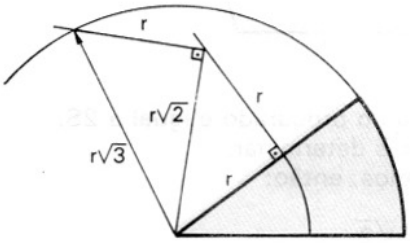
Suposto resolvido



Resolução: Seja **x** o raio do setor procurado e **r** o do setor dado. Se S é a área do setor dado, a área do procurado é 3S. Assim,

$$k^2 = \frac{3S}{S} \Rightarrow k^2 = 3 \therefore k = \sqrt{3}$$

$$\text{Logo, } \frac{x}{r} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{x = r\sqrt{3}}$$



E7.**40** É dado um setor circular de 60° e raio r = 31 mm. Construa um setor circular semelhante ao primeiro e de área igual ao dobro da área daquele. Qual é, aproximadamente, o comprimento do arco que limita o setor obtido?

Observação: Após construir o setor circular pedido, você deve retificar o seu arco para medir o comprimento.

E7.**41** Construa um triângulo eqüilátero equivalente a um hexágono regular de lado $\ell = 27$ mm. Qual é, aproximadamente, a medida do lado do triângulo?

Sugestão: Sendo S a área de um qualquer dos seis triângulos eqüiláteros em que o hexágono regular pode ser decomposto, a área do triângulo eqüilátero procurado será igual a 6S.

Resolva os exercícios de 84 a 87 do caderno de atividades.

Uma construção importante

Como veremos logo adiante, o segundo problema geral nos obriga, na maioria das vezes, a construir segmentos proporcionais a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}$.

Para tanto, vamos estudar a questão seguinte.

Problema

Dado um segmento ℓ, construir os segmentos $\frac{\ell\sqrt{1}}{\sqrt{n}}, \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{n}}, \frac{\ell\sqrt{3}}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{\ell\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$.

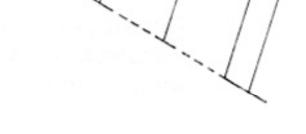
Resolução: Seja AB = ℓ

1.º) Constrói-se a semicircunferência de diâmetro $\overline{AB}$ e divide-se $\overline{AB}$ em **n** partes iguais, obtendo os pontos 1, 2, 3, ..., p, ..., n, conforme a figura.

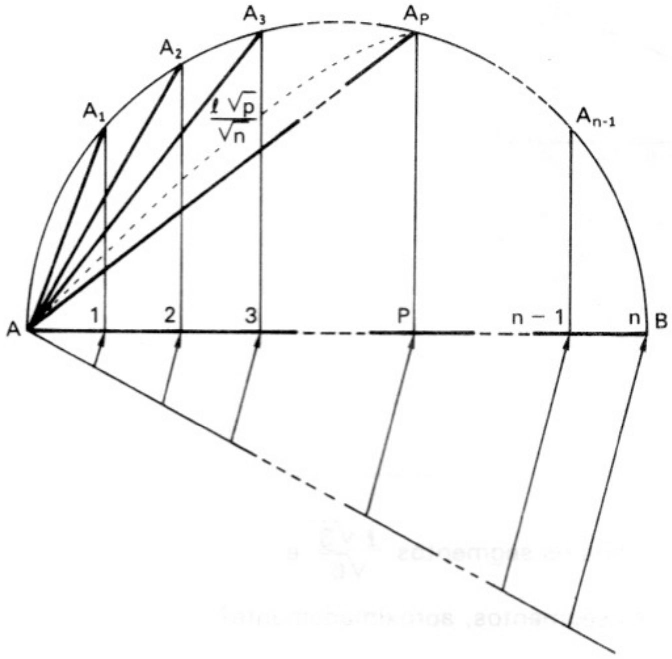
2.º) Por 1, 2, ..., n levantam-se as perpendiculares a $\overline{AB}$, as quais determinam os pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p, A_n$ na semicircunferência.

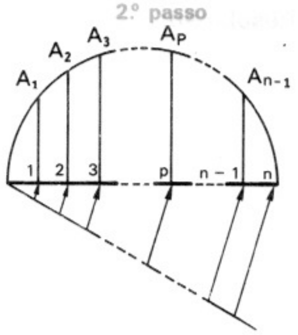
Evolução do traçado

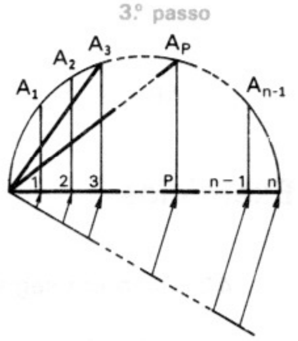
1.º passo



3.º) Então, $AA_1 = \frac{\ell\sqrt{1}}{\sqrt{n}}$, $AA_2 = \frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$, ..., $AA_p = \frac{\ell\sqrt{p}}{\sqrt{n}}$.


A₃
Aₚ
A₂
A₁
ℓ√p / √n
Aₙ₋₁
A
1
2
3
P
n − 1
n
B


2.º passo
A₃
Aₚ
A₂
A₁
Aₙ₋₁
1
2
3
p
n − 1
n

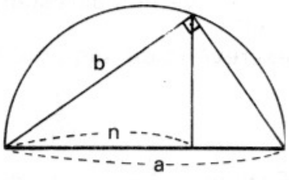

3.º passo
A₃
Aₚ
A₂
A₁
Aₙ₋₁
1
2
3
P
n − 1
n

Justificativa: Como ℓ foi dividido em **n** partes iguais, cada uma das partes é igual a $\frac{\ell}{n}$. Então, o segmento que tem um extremo em A e outro no p-ésimo ponto de divisão de $\overline{AB}$ mede $p \cdot \frac{\ell}{n}$. Assim, no triângulo retângulo ABA_p, podemos escrever:

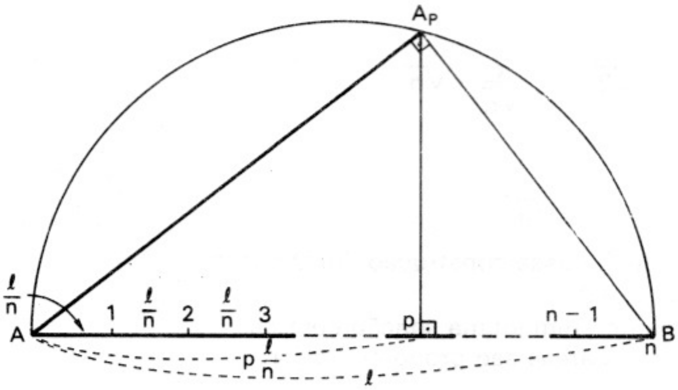
$$(AA_p)^2 = \ell \cdot p \cdot \frac{\ell}{n}$$

$$(AA_p)^2 = \frac{\ell^2 p}{n} \quad \therefore \quad AA_p = \frac{\ell \cdot \sqrt{p}}{\sqrt{n}}$$

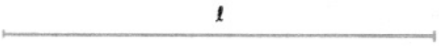
Aqui, está se usando a propriedade bastante conhecida de que **"num triângulo retângulo, cada cateto é média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela".**



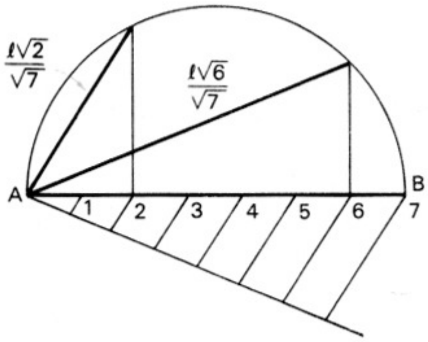
$$\boxed{b^2 = a \cdot n}$$


Aₚ
ℓ/n
A
1
ℓ/n
2
ℓ/n
3
p
n − 1
B
n
p ℓ/n
ℓ

Exemplo: Dado o segmento ℓ, obter os segmentos $\frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ e $\frac{\ell\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.



Resolução:


$\frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$
$\frac{\ell\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$
A
B
1
2
3
4
5
6
7

AB = ℓ

Exercícios

E7.**42** Dado um segmento ℓ de 65 mm, obtenha os segmentos $\frac{\ell\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ e e $\frac{\ell\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$. Quais são as medidas desses segmentos, aproximadamente?

E7.**43** Dado um segmento ℓ de 80 mm, obtenha o segmento $\frac{\ell\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. Qual é, aproximadamente, a medida desse segmento?

Resolva os exercícios 88 e 89 do caderno de atividades.

Uma observação importante:

Você acabou de aprender a construir a família $\frac{\ell\sqrt{1}}{\sqrt{n}}$, $\frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$, $\frac{\ell\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$, ..., $\frac{\ell\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$, a partir de um segmento ℓ dado. Como ℓ pode ser escrito na forma $\frac{\ell\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$, vamos acrescentar este último segmento na família acima e escrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{\ell}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1}\,,\ \frac{\ell}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{2}\,,\ \frac{\ell}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{3}\,,\ \ldots,\ \frac{\ell}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}$$

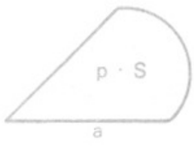
Fazendo $\frac{\ell}{\sqrt{n}} = u$, a seqüência acima fica:

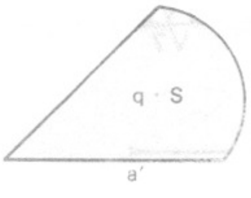
$$u\sqrt{1}\,,\ u\sqrt{2}\,,\ u\sqrt{3}\,,\ \ldots,\ u\sqrt{n}$$

Isto é, os segmentos que se obtêm a partir de ℓ, nessa construção, incluindo o próprio ℓ, são proporcionais a $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt{n}$.

Ora, a propriedade de que gozam tais segmentos tem íntima ligação com os elementos lineares de figuras semelhantes cujas áreas são proporcionais a números inteiros.

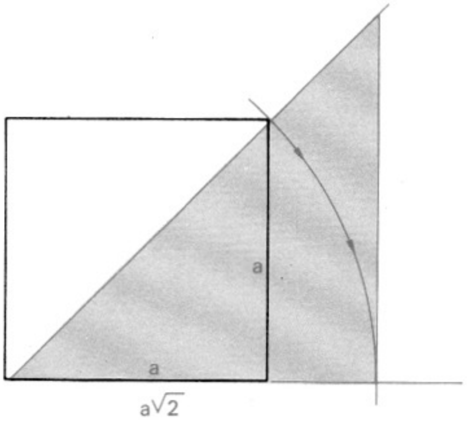
De fato, sejam duas figuras semelhantes de áreas iguais a p · S e q · S, isto é, de áreas proporcionais a **p** e **q**.





Equivalência: primeiro problema geral

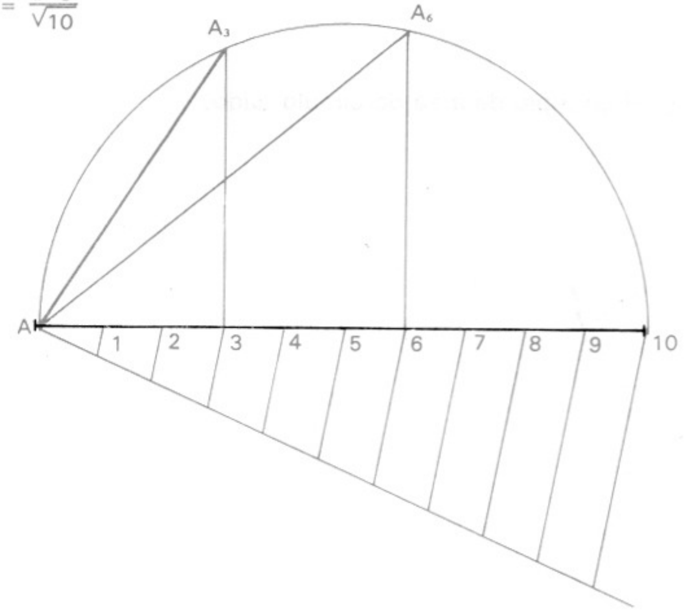
87 Construa um triângulo retângulo isósceles equivalente ao quadrado dado.
Sugestão: Observe que o quadrado pode ser decomposto em dois triângulos retângulos isósceles congruentes. Sendo S a área de cada um deles, o triângulo procurado terá área igual a 2S.



88 Dado o segmento ℓ, obtenha os segmentos $\frac{\ell\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$ e $\frac{\ell\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$.

$AA_3 = \frac{\ell\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$

$AA_6 = \frac{\ell\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$

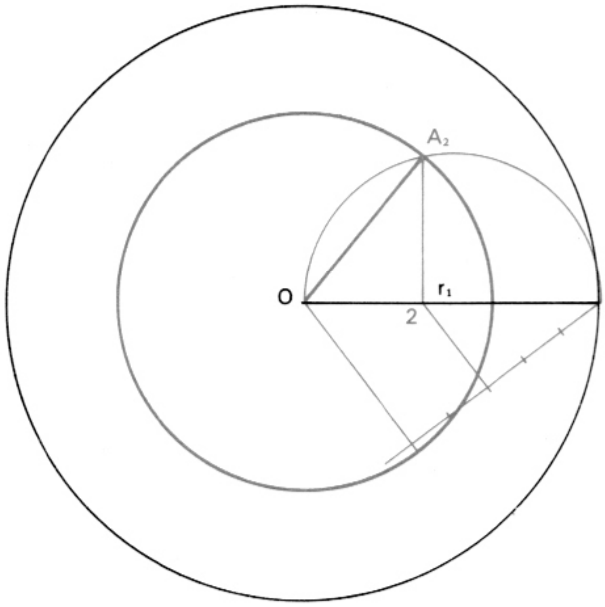


Equivalência: primeiro problema geral — segundo problema geral

Figura auxiliar e anotações

89 É dada uma circunferência de raio **r** e centro O. Construa uma circunferência de centro O e raio igual a $\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

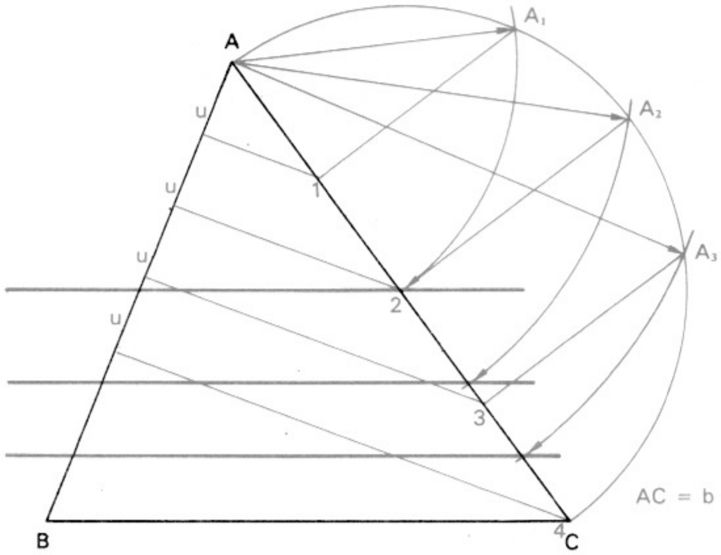
Sugestão: Proponha o cálculo da razão entre as áreas dos círculos.



$OA_2 = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

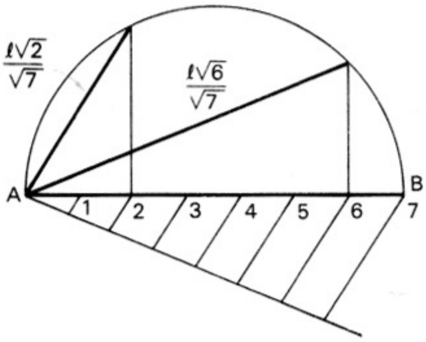
90 Através de retas paralelas ao lado $\overline{BC}$, decomponha o triângulo ABC dado em quatro partes equivalentes.

Observação: Comente que, para dividir $\overline{AC}$ em quatro partes iguais, é prático tomar quatro unidades iguais a **u** no próprio lado $\overline{AB}$.



$$AC = b \begin{cases} AA_1 = \frac{b\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{b}{2} \\ AA_2 = \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{4}} \\ AA_3 = \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \end{cases}$$

Resolução:



$\frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$
$\frac{\ell\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$
A
B
1
2
3
4
5
6
7

AB = ℓ

Exercícios

E7.**42** Dado um segmento ℓ de 65 mm, obtenha os segmentos $\frac{\ell\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ e e $\frac{\ell\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$. Quais são as medidas desses segmentos, aproximadamente?

E7.**43** Dado um segmento ℓ de 80 mm, obtenha o segmento $\frac{\ell\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. Qual é, aproximadamente, a medida desse segmento?

Resolva os exercícios 88 e 89 do caderno de atividades.

Uma observação importante:

Você acabou de aprender a construir a família $\frac{\ell\sqrt{1}}{\sqrt{n}}$, $\frac{\ell\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$, $\frac{\ell\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$, ..., $\frac{\ell\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}}$, a partir de um segmento ℓ dado. Como ℓ pode ser escrito na forma $\frac{\ell\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$, vamos acrescentar este último segmento na família acima e escrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{\ell}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1}\,,\ \frac{\ell}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{2}\,,\ \frac{\ell}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{3}\,,\ \ldots,\ \frac{\ell}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}$$

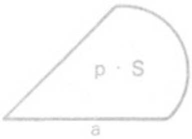
Fazendo $\frac{\ell}{\sqrt{n}} = u$, a seqüência acima fica:

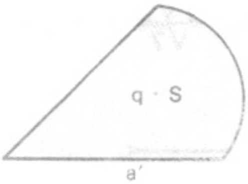
$$u\sqrt{1}\,,\ u\sqrt{2}\,,\ u\sqrt{3}\,,\ \ldots,\ u\sqrt{n}$$

Isto é, os segmentos que se obtêm a partir de ℓ, nessa construção, incluindo o próprio ℓ, são proporcionais a $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt{n}$.

Ora, a propriedade de que gozam tais segmentos tem íntima ligação com os elementos lineares de figuras semelhantes cujas áreas são proporcionais a números inteiros.

De fato, sejam duas figuras semelhantes de áreas iguais a $p \cdot S$ e $q \cdot S$, isto é, de áreas proporcionais a **p** e **q**.



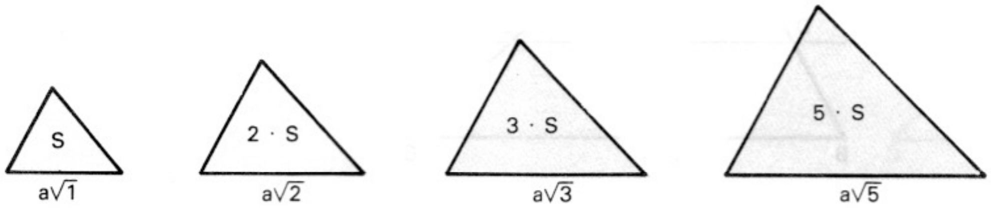


Então, $k^2 = \frac{p \cdot S}{q \cdot S} \Rightarrow k^2 = \frac{p}{q} \therefore k = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$

Logo, $\frac{a}{a'} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$

Isto é, se as áreas de duas figuras semelhantes são proporcionais a **p** e **q**, então seus elementos lineares homólogos são proporcionais a $\sqrt{p}$ e $\sqrt{q}$.

Assim, por exemplo, se um conjunto de triângulos semelhantes tem suas áreas proporcionais a 1, 2, 3 e 5, seus lados homólogos serão proporcionais a $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$.



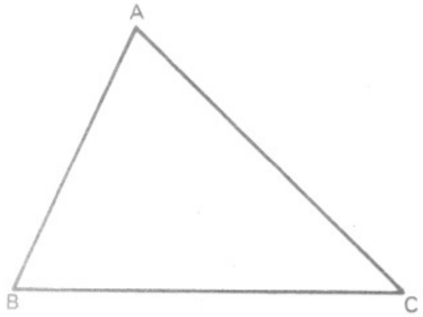
A partir disso, podemos enunciar e resolver o problema que segue.

Segundo problema geral

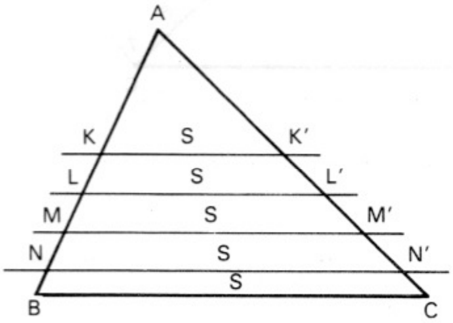
Problema

Através de retas paralelas a um dos lados de um triângulo, dividi-lo em partes de áreas iguais ou proporcionais a números inteiros dados.

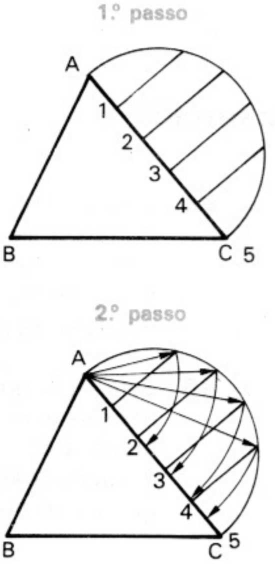
Exemplo 1: Dividir o triângulo ABC dado em cinco partes de áreas iguais, através de retas paralelas ao lado $\overline{BC}$.



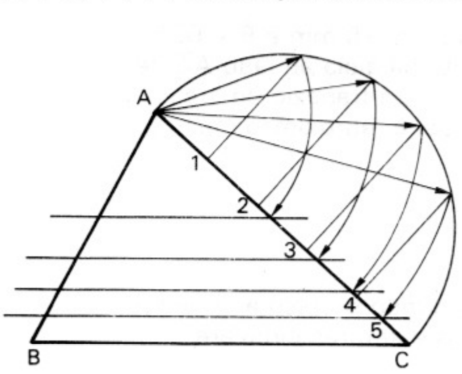
Suposto resolvido



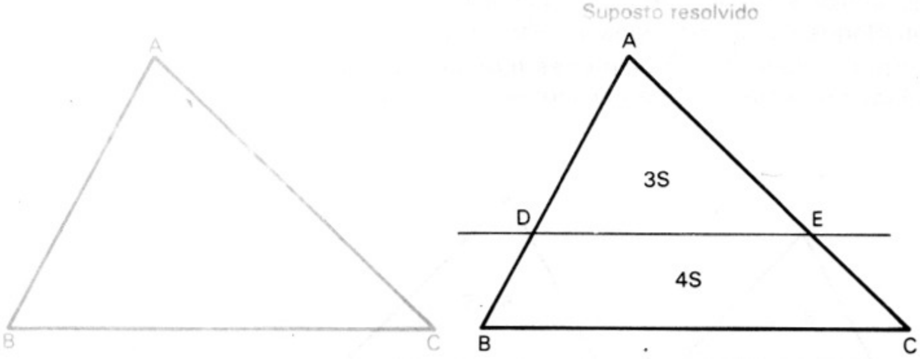
Evolução do traçado



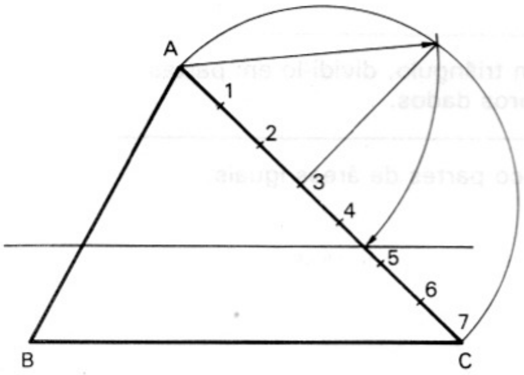
Resolução: Na figura onde se supõe o problema já resolvido, note que os triângulos AKK', ALL', AMM', ANN' e ABC têm áreas respectivamente iguais a S, 2S, 3S, 4S e 5S. Então, os lados homólogos AK', AL', AM', AN' e AB' são proporcionais a $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ e $\sqrt{5}$. Isso justifica a construção seguinte.



Exemplo 2: Dado o triângulo ABC, seccioná-lo por uma paralela ao lado $\overline{BC}$, de modo que o novo triângulo e o trapézio obtidos tenham suas áreas proporcionais a 3 e 4.



Resolução: Na figura onde se supõe o problema resolvido, note que os triângulos ADE e ABC têm suas áreas iguais a 3S e 7S. Logo, os seus lados homólogos são proporcionais a $\sqrt{3}$ e $\sqrt{7}$. Assim, a construção seguinte fica justificada.



Exercícios

E7.**44** Seja ABC um triângulo em que a = 80 mm, b = 70 mm e c = 83 mm. Conduza as retas **r** e **s** paralelamente a $\overline{BC}$, de modo a dividir o triângulo em três partes equivalentes. Entre as figuras em que o triângulo foi decomposto, qual é, aproximadamente, o perímetro do trapézio de bases contidas nas retas **r** e **s**?

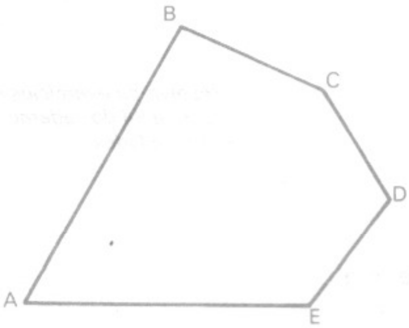
E7.**45** Seja ABC um triângulo em que a = 68 mm, c = 75 mm e $\hat{B} = 60°$. Seccione esse triângulo através de uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$ de modo a decompô-lo em um novo triângulo e um trapézio de áreas proporcionais a 2 e 5, respectivamente. Qual é, aproximadamente, o perímetro do trapézio?

Extensão do segundo problema geral

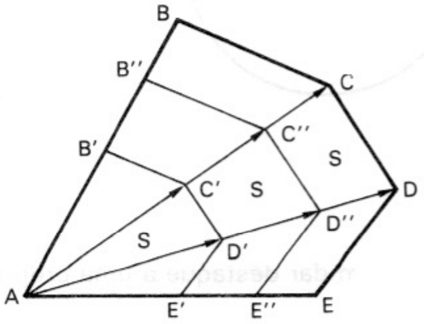
Mantendo os mesmos princípios, com os quais o segundo problema geral foi enunciado, podemos estendê-lo a polígonos, círculos e setores circulares. Vejamos alguns exercícios para exemplificar.

Exercícios

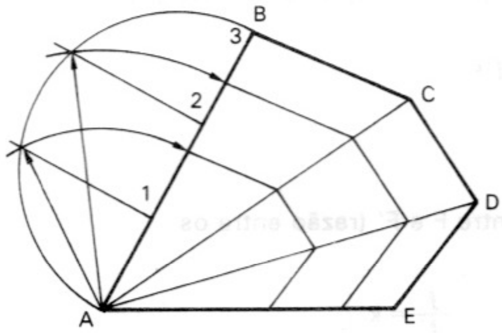
E7.46 Seja ABCDE um pentágono. Com centro de homotetia no vértice A, construa segmentos homotéticos aos lados $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$, de modo a dividir o pentágono em três partes equivalentes.



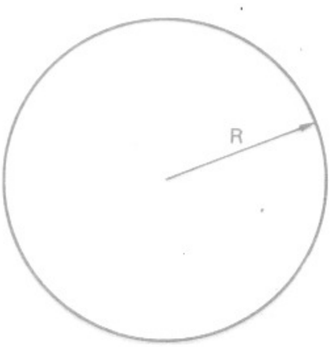
Suposto resolvido



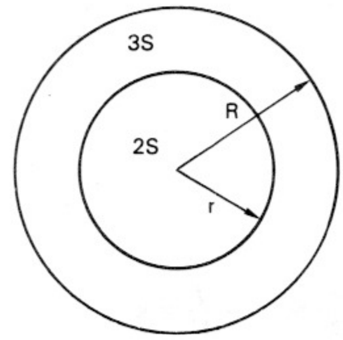
Resolução: Na figura em que se supõe o problema já resolvido, os pentágonos AB'C'D'E', AB''C''D''E'' e ABCDE têm suas áreas iguais a S, 2S e 3S. Como eles são semelhantes, os seus lados homólogos são proporcionais a $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. Donde a construção seguinte se justifica.



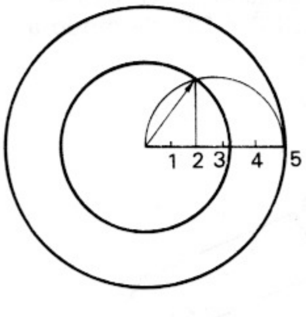
E7.47 Decomponha um círculo dado, através de uma circunferência concêntrica, em um novo círculo e uma coroa circular de áreas proporcionais a 2 e 3, respectivamente.



Suposto resolvido



Resolução: Seja R o raio do círculo dado e **r** o da circunferência procurada. Então, os círculos de raios **r** e R têm áreas iguais a 2S e 5S, donde **r** e R são proporcionais a $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$. Logo:



Resolva os exercícios de 90 a 94 do caderno de atividades.

Terceiro problema geral

Antes de enunciar o problema, convém dar destaque a uma propriedade que será utilizada para resolvê-lo.

Teorema

Se F e F′ são duas figuras semelhantes, e ℓ e ℓ' são os lados dos seus respectivos quadrados equivalentes, então a razão entre ℓ e ℓ' é igual à razão **k** de semelhança entre F e F′.

☐ **Demonstração:**

Sejam S_F e $S_{F'}$ as áreas das figuras F e F′. Como ℓ e ℓ' são os lados dos seus respectivos quadrados equivalentes, tem-se:

$$S_F = \ell^2 \text{ e } S_{F'} = \ell'^2$$

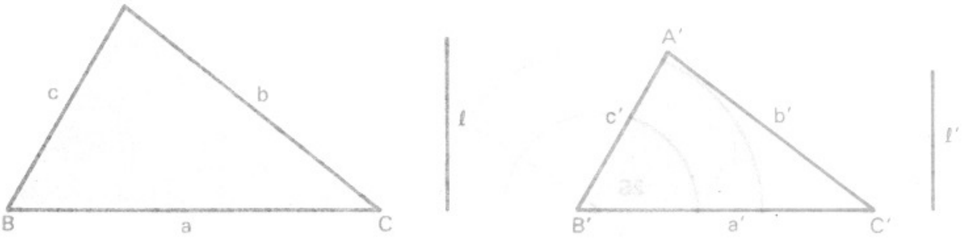
Donde: $\boxed{\dfrac{S_F}{S_{F'}} = \dfrac{\ell^2}{\ell'^2}}$ (1)

Por outro lado, se **k** é a razão de semelhança entre F e F′ (razão entre os elementos lineares homólogos), então:

$$\frac{S_F}{S_{F'}} = k^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\ell^2}{\ell'^2} = k^2 \therefore \boxed{\frac{\ell}{\ell'} = k}$$

■ c.q.d.

Por exemplo, sejam ABC e A′B′C′ dois triângulos semelhantes e ℓ e ℓ' os lados dos seus respectivos quadrados equivalentes.



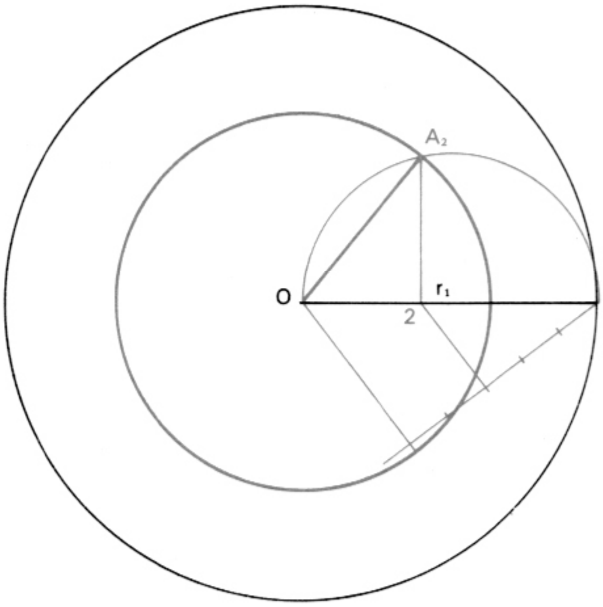
$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots = \frac{\ell}{\ell'} = k}$$

Equivalência: primeiro problema geral — segundo problema geral

Figura auxiliar e anotações

89 É dada uma circunferência de raio **r** e centro O. Construa uma circunferência de centro O e raio igual a $\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

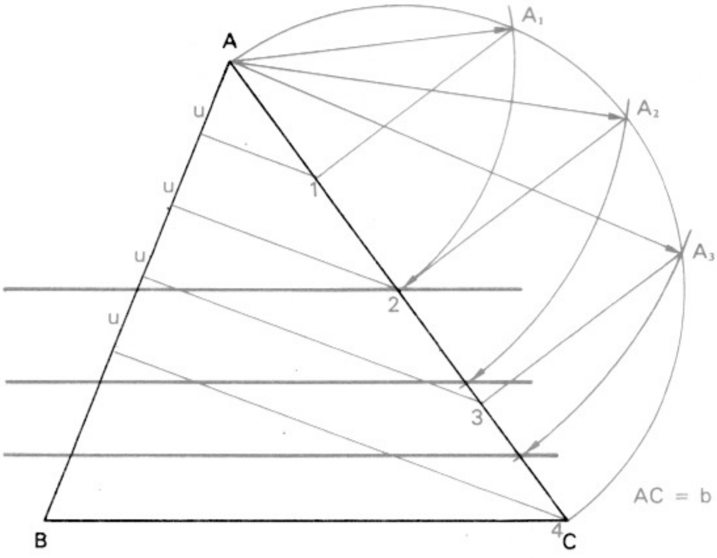
Sugestão:
Proponha o cálculo da razão entre as áreas dos círculos.



$OA_2 = \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

90 Através de retas paralelas ao lado $\overline{BC}$, decomponha o triângulo ABC dado em quatro partes equivalentes.

Observação:
Comente que, para dividir $\overline{AC}$ em quatro partes iguais, é prático tomar quatro unidades iguais a **u** no próprio lado $\overline{AB}$.



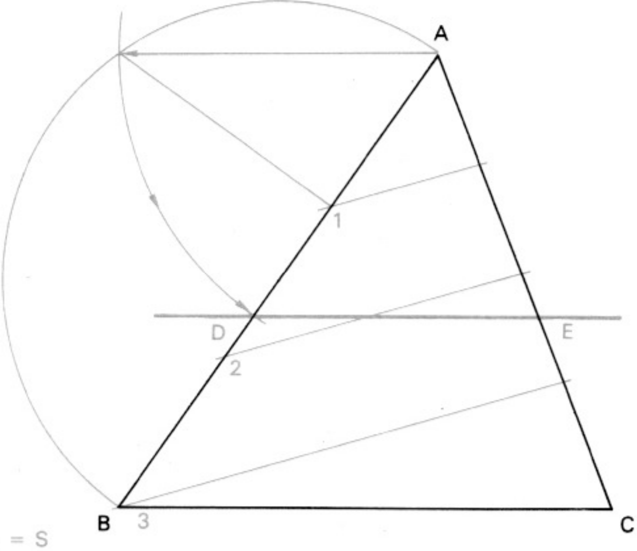
$$AC = b \begin{cases} AA_1 = \frac{b\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{b}{2} \\ AA_2 = \frac{b\sqrt{2}}{\sqrt{4}} \\ AA_3 = \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \end{cases}$$

Equivalência: segundo problema geral

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Reforce que, em figuras semelhantes, se a razão entre as áreas é igual a $\frac{m}{n}$, então a razão entre as linhas homólogas é igual a $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}}$.

91 Através de uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$, decomponha o triângulo ABC em um novo triângulo e um trapézio de áreas proporcionais a 1 e 2, respectivamente.

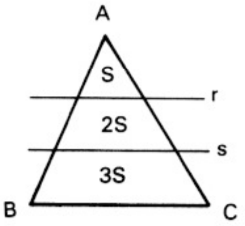


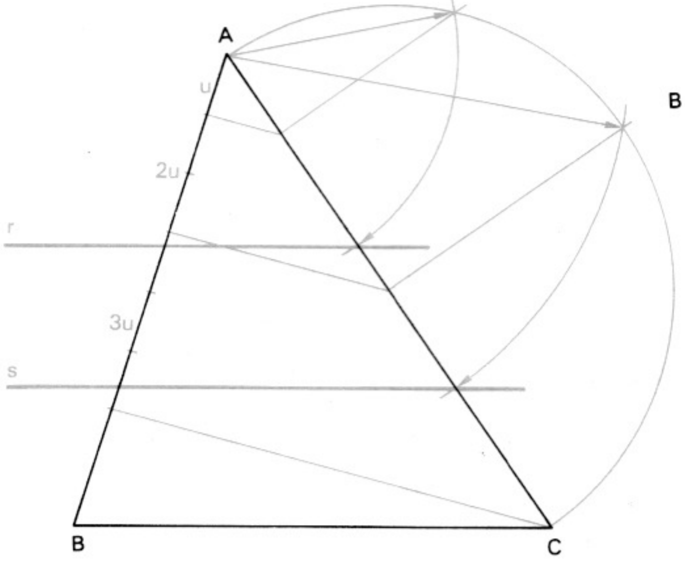
$$\begin{cases} S_{ADE} = S \\ S_{DBCE} = 2S \end{cases}$$

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \frac{\cancel{S}}{3\cancel{S}}$$

$$\therefore \ \frac{AD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

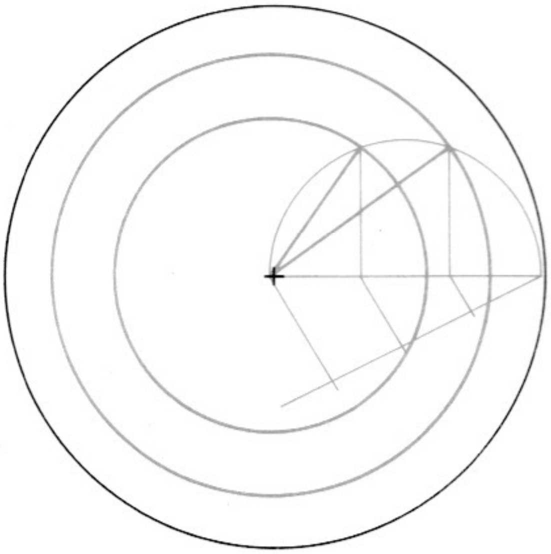
92 Através de duas retas **r** e **s**, paralelas ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC, decomponha-o em um novo triângulo e dois trapézios de áreas proporcionais a 1, 2 e 3, conforme a figura abaixo.





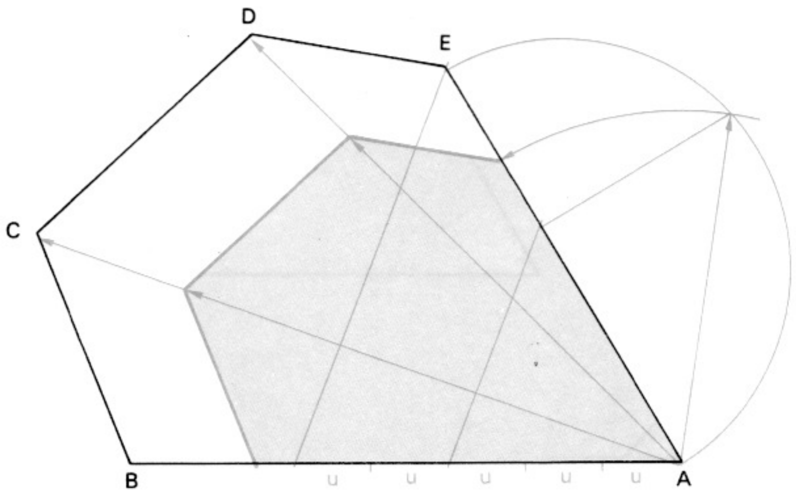
Equivalência: segundo problema geral

93 Através de circunferências concêntricas ao círculo dado, decomponha esse círculo em três partes equivalentes.

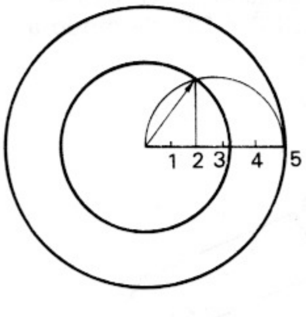


94 Construa um pentágono semelhante ao pentágono dado e de área igual a $\frac{3}{5}$ da área do mesmo.

Sugestão: Sendo 5S a área do pentágono dado, a do procurado será 3S. Utilize homotetia.



Resolução: Seja R o raio do círculo dado e **r** o da circunferência procurada. Então, os círculos de raios **r** e R têm áreas iguais a 2S e 5S, donde **r** e R são proporcionais a $\sqrt{2}$ e $\sqrt{5}$. Logo:



Resolva os exercícios de 90 a 94 do caderno de atividades.

Terceiro problema geral

Antes de enunciar o problema, convém dar destaque a uma propriedade que será utilizada para resolvê-lo.

Teorema

Se F e F′ são duas figuras semelhantes, e ℓ e ℓ' são os lados dos seus respectivos quadrados equivalentes, então a razão entre ℓ e ℓ' é igual à razão **k** de semelhança entre F e F′.

☐ **Demonstração:**

Sejam S_F e $S_{F'}$ as áreas das figuras F e F′. Como ℓ e ℓ' são os lados dos seus respectivos quadrados equivalentes, tem-se:

$$S_F = \ell^2 \text{ e } S_{F'} = \ell'^2$$

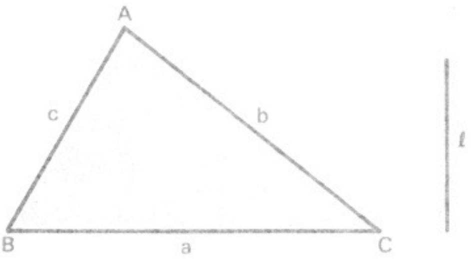
Donde: $\boxed{\frac{S_F}{S_{F'}} = \frac{\ell^2}{\ell'^2}}$ (1)

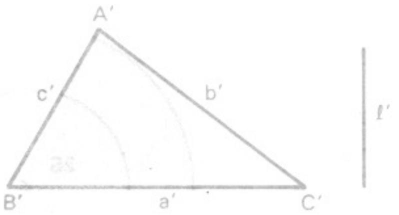
Por outro lado, se **k** é a razão de semelhança entre F e F′ (razão entre os elementos lineares homólogos), então:

$$\frac{S_F}{S_{F'}} = k^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\ell^2}{\ell'^2} = k^2 \therefore \boxed{\frac{\ell}{\ell'} = k}$$

■ c.q.d.

Por exemplo, sejam ABC e A′B′C′ dois triângulos semelhantes e ℓ e ℓ' os lados dos seus respectivos quadrados equivalentes.





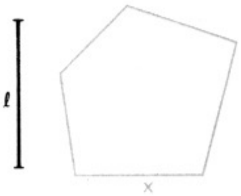
$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots = \frac{\ell}{\ell'} = k}$$

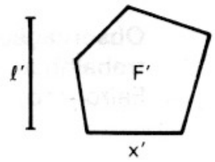
Essa propriedade é a chave para a resolução do terceiro problema geral, cujo enunciado vem a seguir.

Problema

Construir uma figura **de forma conhecida** e **de área dada.**

F → figura procurada
F' → figura auxiliar





Em resumo, o procedimento para a resolução do problema é o seguinte:

1.º) Constrói-se o lado ℓ do quadrado equivalente à figura procurada (isso é possível, já que sua área é dada).

2.º) Com tamanho arbitrário, constrói-se uma figura auxiliar semelhante à procurada (isso é possível, já que a sua forma é conhecida).

3.º) Constrói-se o lado ℓ' do quadrado equivalente à figura auxiliar.

4.º) Escolhe-se um elemento linear conveniente x' da figura auxiliar e obtém-se, por quarta proporcional, o seu homólogo **x** da figura procurada, pois, pelo teorema precedente:

$$\boxed{\frac{\ell'}{\ell} = \frac{x'}{\textcircled{x}}}$$

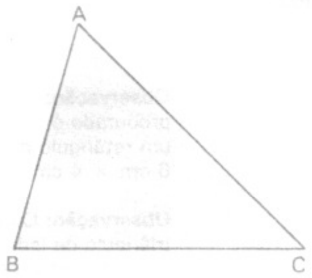
5.º) A partir do elemento linear **x**, constrói-se a figura procurada.

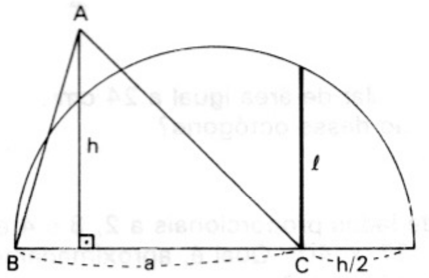
Elementos conhecidos:
ℓ → lado do quadrado equivalente a F.
ℓ' → lado do quadrado equivalente a F'.
x' → elemento linear de F'.
A partir de ℓ, ℓ' e x' determina-se **x** e, então, constrói-se F.

Exercícios

E7.**48** Construa um pentágono regular equivalente ao triângulo ABC dado.

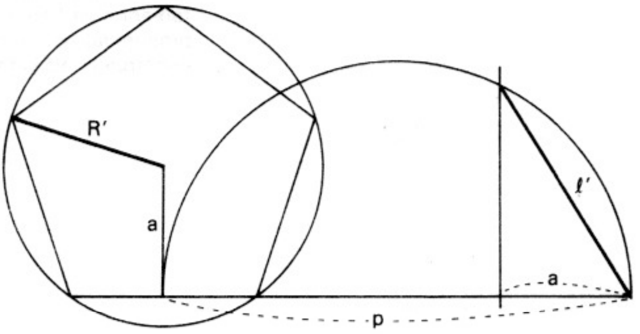
Observação: Note que a figura procurada tem forma conhecida (pentágono regular) e área dada (sua área é igual à do triângulo ABC dado).

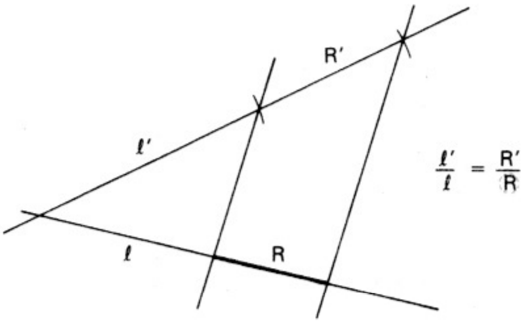




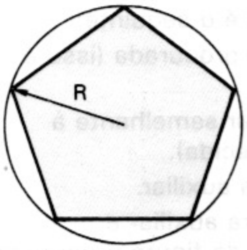
Resolução: Como o pentágono regular procurado e o triângulo dado são equivalentes, eles possuem o mesmo quadrado equivalente. Então, obtém-se ℓ a partir do triângulo ABC (E7.1).

Agora, constrói-se um pentágono regular auxiliar (de tamanho arbitrário) e obtém-se o lado ℓ' do quadrado que lhe é equivalente (E7.8).

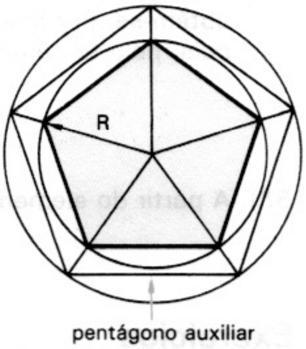




Por fim, escolhe-se um elemento linear do pentágono auxiliar (pode ser o lado, o apótema etc., mas no caso do polígono regular é bastante conveniente escolher o raio da circunferência circunscrita) e obtém-se, por quarta proporcional, o elemento homólogo do pentágono procurado, a partir do qual ele é construído.



Para obter maior clareza de exposição, o pentágono procurado poderia ser construído a partir do pentágono auxiliar, por homotetia.



Observação: Como você pode notar, o problema é relativamente trabalhoso. Volte a estudar o problema anterior até entendê-lo bem. Feito isso, passe para os exercícios seguintes.

E7.**49** Construa um triângulo eqüilátero equivalente a um retângulo de dimensões 42 mm × 30 mm. Qual é, aproximadamente, a medida do lado do triângulo?

E7.**50** Construa um hexágono regular de área igual a 16 cm². Qual é a medida do lado do hexágono, aproximadamente?

Observação: O lado do quadrado equivalente ao hexágono já foi dado. $l = 4$ cm.

E7.**51** Construa um triângulo eqüilátero equivalente a um círculo de raio igual a 23 mm. Qual é, aproximadamente, a medida do lado do triângulo?

E7.**52** Construa um octógono regular de área igual a 24 cm². Qual é a medida aproximada do lado desse octógono?

Observação: O octógono procurado é equivalente a um retângulo de dimensões 6 cm × 4 cm.

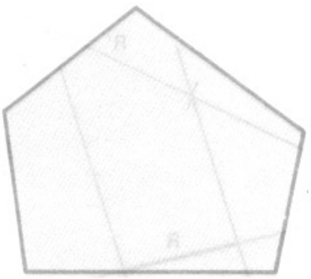
E7.**53** Construa um triângulo de lados proporcionais a 2, 3 e 4 e de área igual a 940 mm² (940 = 27 × 40). Qual é, aproximadamente, a medida do maior lado do triângulo?

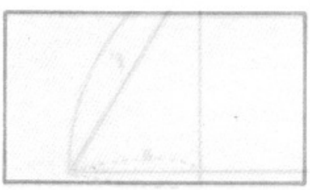
Observação: Qualquer triângulo de lados 2u, 3u e 4u (**u** arbitrário) tem a forma do triângulo procurado.

E7.**54** Construa um círculo de área igual a 900 mm². Qual é a medida do raio, aproximadamente?

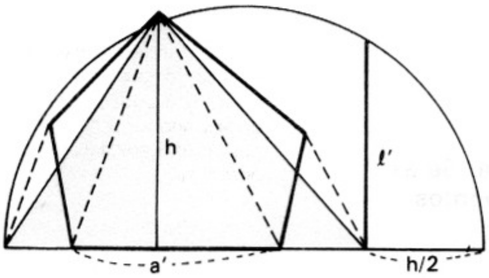
E7.**55** Construa um polígono semelhante ao polígono dado e que seja equivalente ao retângulo dado.

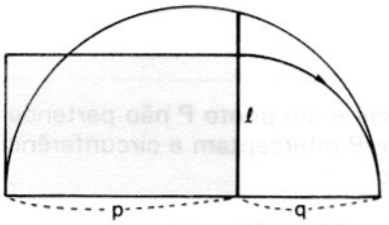
Note que a figura auxiliar (a que tem a forma, mas não o tamanho da figura procurada) não tem que ser construída; ela já foi dada.





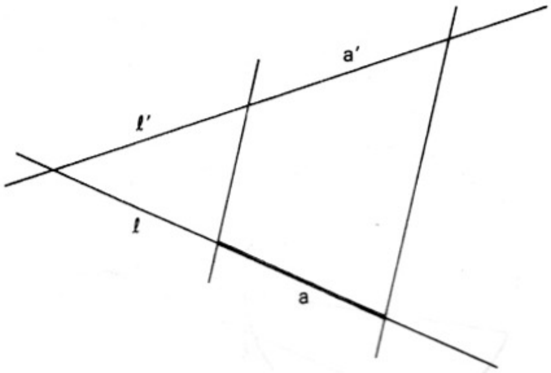
Resolução: Obtém-se o lado ℓ do quadrado equivalente ao polígono procurado através do retângulo, e o lado ℓ' do quadrado equivalente à figura auxiliar. (Para obter ℓ' primeiro temos que transformar o polígono num triângulo equivalente.)



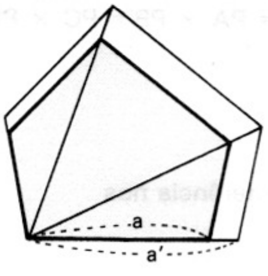


Por fim, a partir de um lado a' da figura auxiliar obtém-se o lado **a** da figura procurada e, por homotetia, constrói-se a mesma.

Convém insistir que as construções de ℓ, ℓ' e da própria figura procurada devem ser feitas **sobre** as figuras dadas.
Aqui você vê o pentágono dado desenhado três vezes (quando foi dado, na obtenção de ℓ' e na construção da resposta), mas isso foi feito apenas para destacar as várias etapas da resolução.



$$\frac{\ell'}{\ell} = \frac{a'}{a}$$

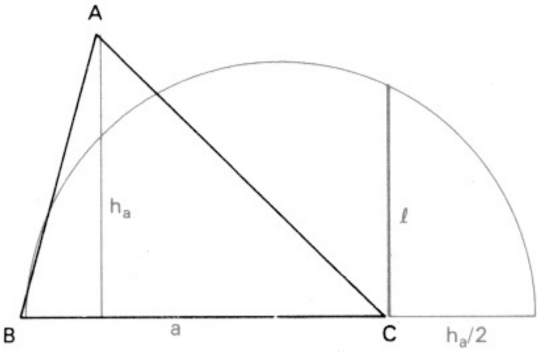


Resolva os exercícios de 95 a 98 do caderno de atividades.

Equivalência: terceiro problema geral

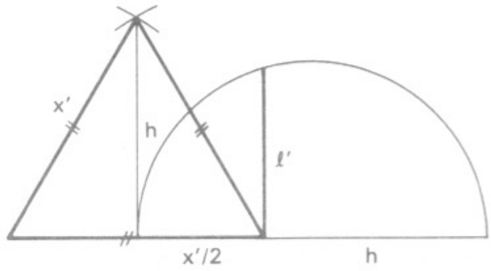
95 Construa um triângulo eqüilátero equivalente ao triângulo ABC.

1.º)



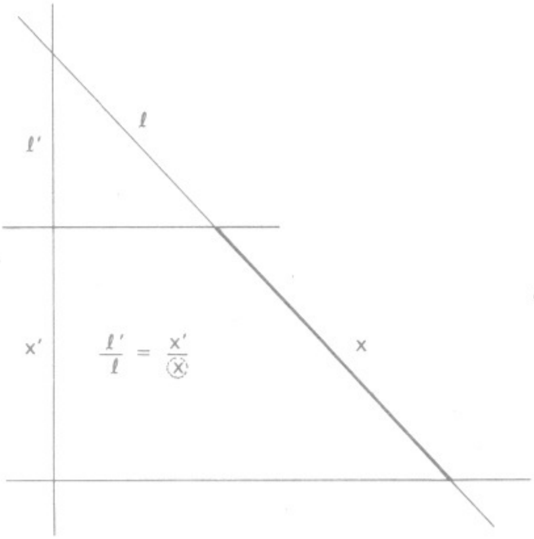
$$\ell^2 = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

2.º)



$$\ell'^2 = \frac{x' \cdot h}{2}$$

3.º)



$$\frac{\ell'}{\ell} = \frac{x'}{ⓧ}$$

4.º)

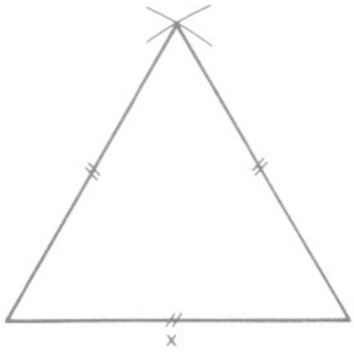


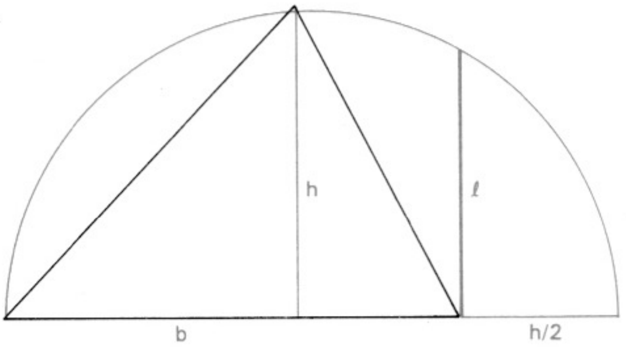
Figura auxiliar e anotações

Sugestão:
Ao término da construção, proponha a construção de um triângulo eqüilátero de área igual à metade da área do triângulo ABC.

Equivalência: terceiro problema geral

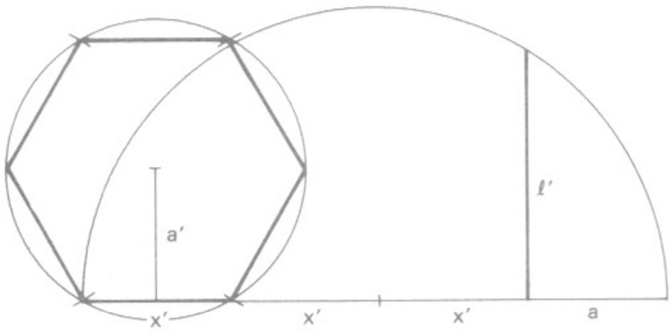
96 Construa um hexágono regular equivalente ao triângulo dado.

1.º)



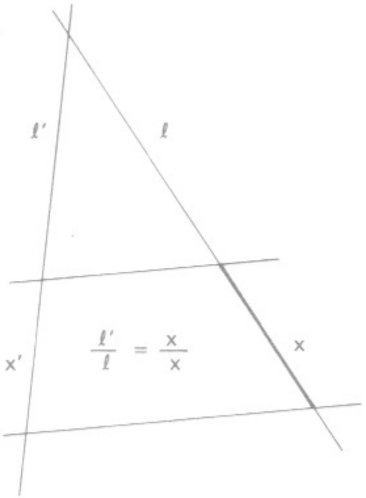
$$\ell^2 = \frac{b \cdot h}{2}$$

2.º)



$$\ell'^2 = p' \cdot a'$$

3.º)



$$\frac{\ell'}{\ell} = \frac{x'}{x}$$

4.º)

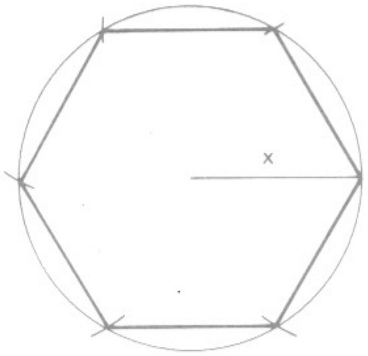


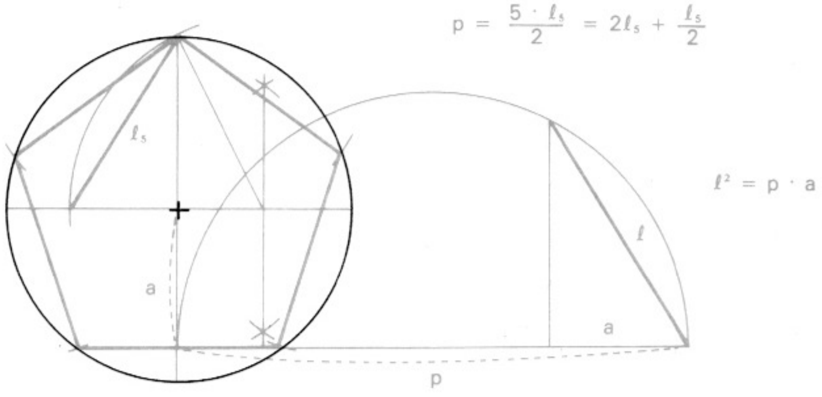
Figura auxiliar e anotações

Observação:
Reforce que, para os polígonos regulares, é conveniente determinar o raio da circunferência circunscrita para, a partir dela, construir o próprio polígono procurado. Em particular, no caso do hexágono regular, o lado é congruente ao raio.

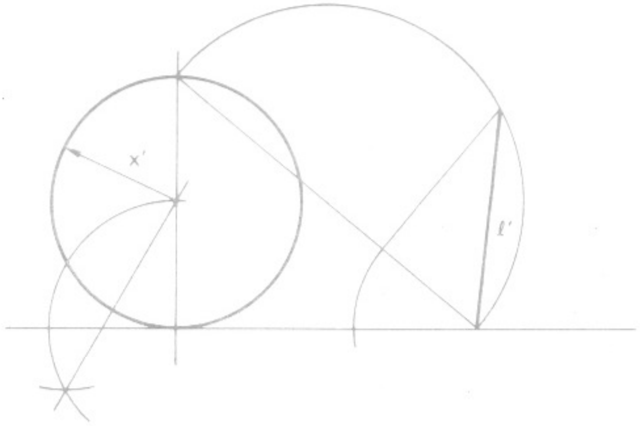
Equivalência: terceiro problema geral

97 Construa um círculo equivalente ao pentágono regular que se inscreve na circunferência dada.

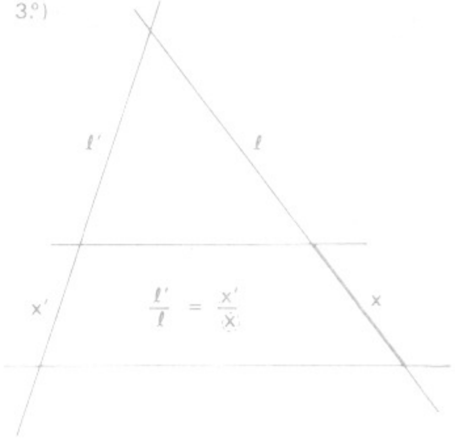
1.º)


$p = \frac{5 \cdot \ell_5}{2} = 2\ell_5 + \frac{\ell_5}{2}$
ℓ_5
$\ell^2 = p \cdot a$
ℓ
a
a
p

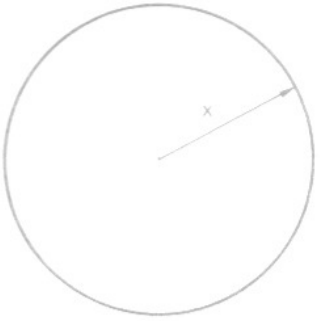
2.º)



3.º)


ℓ'
ℓ
x'
$\frac{\ell'}{\ell} = \frac{x'}{x}$
x

4.º)

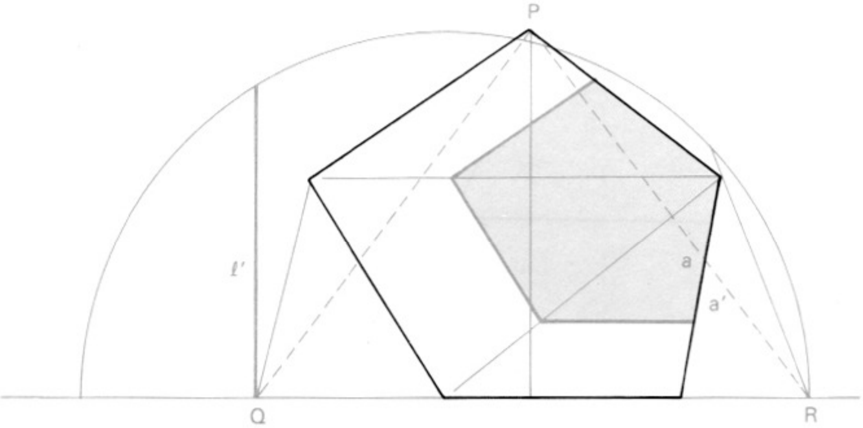


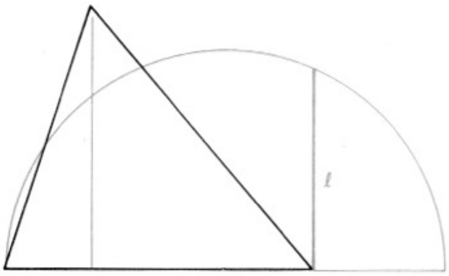
Equivalência: terceiro problema geral

Figura auxiliar e anotações

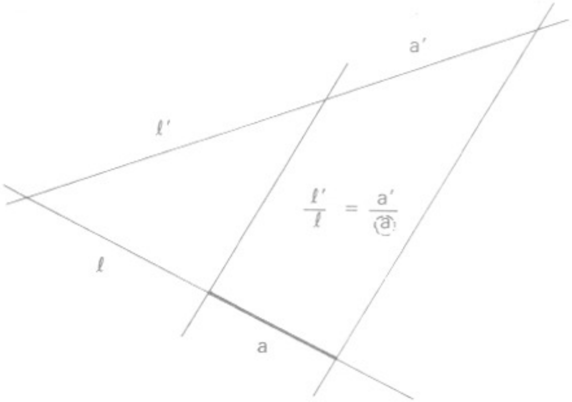
98 Construa um pentágono que seja semelhante ao pentágono dado e equivalente ao triângulo também dado.

Observação: Tanto para obter o lado ℓ' do quadrado equivalente ao pentágono auxiliar (dado), quanto para construir, por homotetia, o pentágono procurado, recorra exclusivamente ao pentágono dado. Para tanto, faça os traçados auxiliares bem leves, a fim de que a resposta não se apresente muito "poluída".





1.º) Transforma-se o pentágono dado no $\bar{\triangle}$PQR equivalente.
2.º) ℓ', lado do quadrado equivalente ao △PQR e, portanto, ao pentágono dado.
3.º) ℓ, lado do quadrado equivalente ao triângulo dado.
4.º) **a**, elemento linear homólogo de **a'**.
5.º) Por homotetia, constrói-se o pentágono procurado a partir de **a'**.



8

Potência de um ponto em relação a uma circunferência

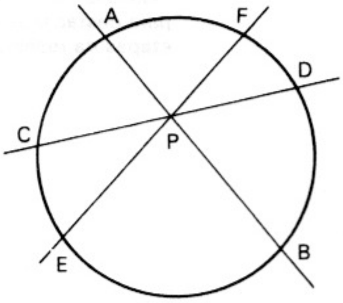
Teorema

Sejam dados uma circunferência e um ponto P não pertencente a ela. Se as retas que são concorrentes em P interceptam a circunferência nos pontos A e B, C e D, E e F etc., então

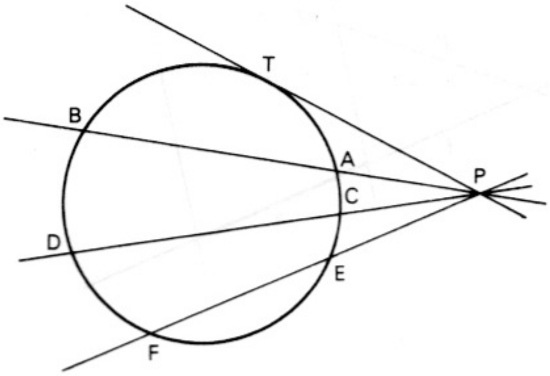
$$PA \times PB = PC \times PD = PE \times PF = \dots$$

Caso o ponto P seja externo à circunferência, e a reta **t**, passando por P, a tangencie no ponto T, então têm-se também:

$$(PT)^2 = PA \times PB = PC \times PD = \dots$$



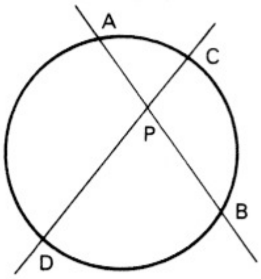
$$PA \times PB = PC \times PD = PE \times PF = \dots$$

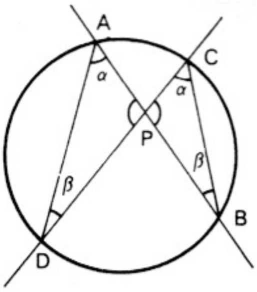


$$(PT)^2 = PA \times PB = PC \times PD = PE \times PF = \dots$$

☐ **Demonstração**:

1.º caso: O ponto P é interno à circunferência.
Tomemos duas retas passando por P e interceptando a circunferência nos pontos A e B, C e D.





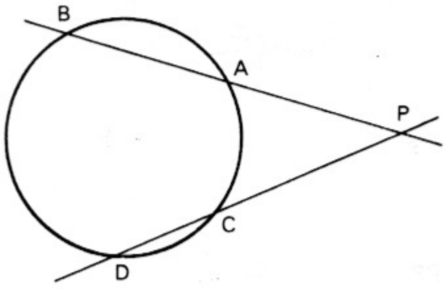
Os triângulos PAD e PCB são semelhantes, pois:

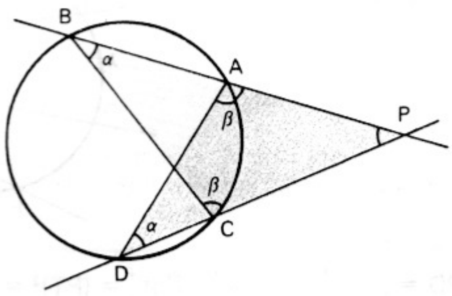
$$\begin{cases} \measuredangle P\hat{A}D \equiv \measuredangle P\hat{C}B \left(P\hat{A}B = P\hat{C}B = \dfrac{\widehat{BD}}{2}\right) \\ \measuredangle A\hat{P}D \equiv \measuredangle C\hat{P}B \text{ (o.p.v.)} \end{cases}$$

Como as retas passando por P são quaisquer, fica demonstrado o teorema no caso geral, isto é,
$PA \times PB = PC \times PD = \dots$

$$\text{Logo, } \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow \boxed{PA \times PB = PC \times PD}$$

2.º Caso: O ponto P é externo à circunferência.
Consideremos duas secantes passando por P e interceptando as circunferências em A e B, C e D.



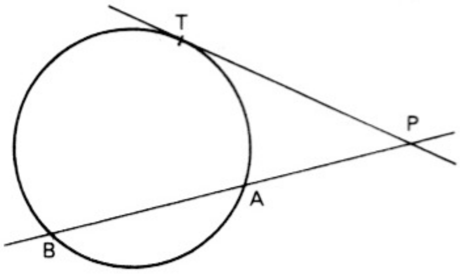


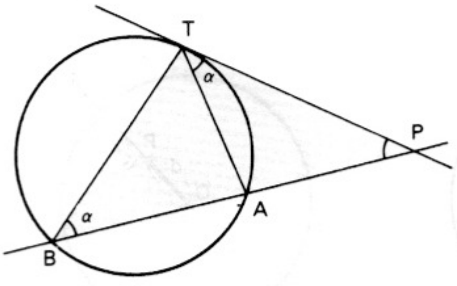
Os triângulos PAD e PCB são semelhantes, pois:

$$\begin{cases} \measuredangle P\hat{D}A \equiv \measuredangle P\hat{B}C \left(P\hat{D}A = P\hat{B}C = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}\right) \\ \measuredangle \hat{P} \text{ é comum} \end{cases}$$

$$\text{Então, } \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow \boxed{PA \times PB = PC \times PD}$$

Falta apenas o caso de uma tangente e uma secante, ambos passando por P.





Os triângulos PTA e PBT são semelhantes, pois:

$$\begin{cases} \measuredangle P\hat{T}A \equiv \measuredangle P\hat{B}T \left(P\hat{T}A = P\hat{B}T = \dfrac{\overset{\frown}{AT}}{2}\right) \\ \measuredangle \hat{P} \text{ é comum} \end{cases}$$

$$\text{Logo, } \frac{PT}{PB} = \frac{PA}{PT} \Rightarrow \boxed{(PT)^2 = PA \times PB}$$

■ c.q.d.

Note que $P\hat{T}A$ é um ângulo de segmento. É aquele que utilizamos para construir um arco capaz.

Em função do que estabelece esse teorema, pode-se definir a potência de um ponto em relação a uma circunferência.

O conceito de potência de um ponto

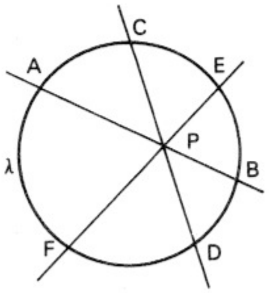
Definição

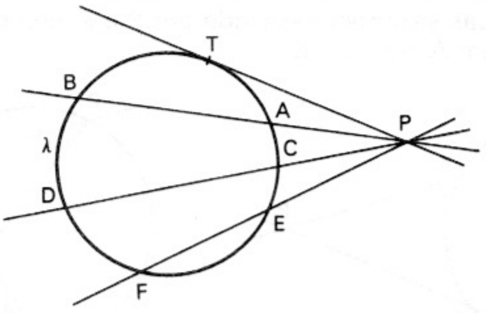
Sejam dados uma circunferência λ e um ponto P não-pertencente a ela. Chama-se potência de P em relação a λ o produto PA × PB, onde A e B são os pontos de intersecção de uma reta qualquer com λ, conduzida por P.

Caso P pertença à circunferência, a sua potência é igual a zero, já que, nesse caso, P coincide com A (ou B) e o segmento PA (ou PB) é nulo.

Notação: Vamos denotar a potência de um ponto P em relação a uma circunferência λ com o símbolo:

$$\boxed{\text{Pot}_\lambda^P}$$





$$\boxed{\text{Pot}_\lambda^P = PA \times PB = PC \times PD = \ldots}$$

$$\boxed{\text{Pot}_\lambda^P = (PT)^2 = PA \times PB = PC \times PD = \ldots}$$

Teorema

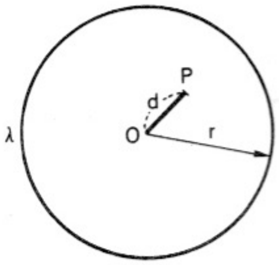
Sejam dados uma circunferência λ de raio **r** e um ponto P não-pertencente a ela. Se **d** é a distância de P ao centro da circunferência, então:

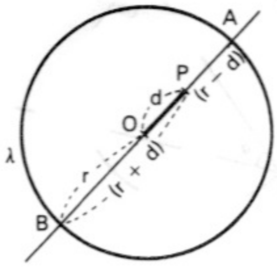
1.º) $\text{Pot}_\lambda^P = r^2 - d^2$ se P é interno a λ;

2.º) $\text{Pot}_\lambda^P = d^2 - r^2$ se P é externo a λ.

☐ **Demonstração**:

1.º) O ponto P é interno a λ.



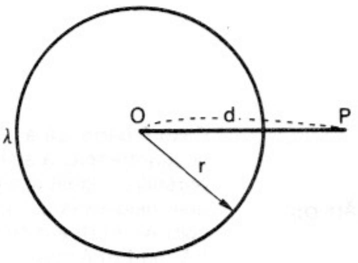


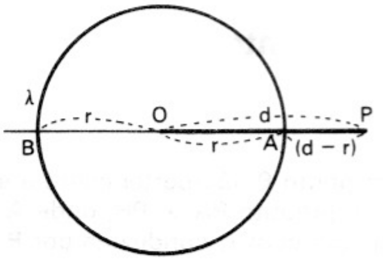
Sejam A e B os pontos em que a reta conduzida por P e O intercepta λ. Então,

$$PA = r + d \text{ e } PB = r - d$$

Logo, $PA \times PB = r^2 - d^2 \Rightarrow \boxed{\text{Pot}_\lambda^P = r^2 - d^2}$

2.º) O ponto P é externo a λ.





Sejam A e B os pontos em que a reta conduzida por P e O intercepta λ.
Então:

$$PA = d - r \text{ e } PB = d + r$$

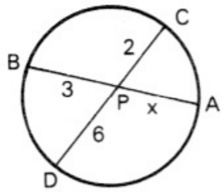
Logo, $PA \times PB = d^2 - r^2 \Rightarrow \boxed{\text{Pot}_{\lambda}^{P} = d^2 - r^2}$

■ c.q.d.

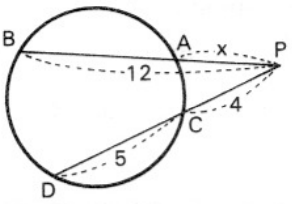
Exercícios

E8.1 Calcule **x** nos seguintes casos.

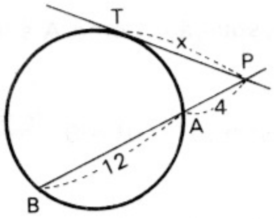
a)



b)


B
A
x
P
12
4
C
5
D

c)



Resolução:

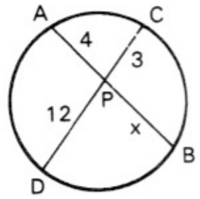
a) $PA \times PB = PC \times PD \Rightarrow 3x = 6 \cdot 2 \;\therefore\; \boxed{x = 4}$

b) $PA \times PB = PC \times PD \Rightarrow 12x = 4 \cdot 9 \;\therefore\; \boxed{x = 3}$

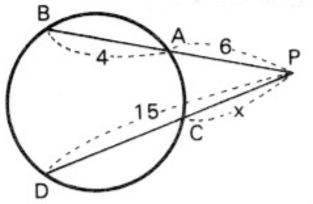
c) $(PT)^2 = PA \times PB \Rightarrow x^2 = 4 \cdot 16 \;\therefore\; \boxed{x = 8}$

E8.2 Calcule **x** nos seguintes casos.

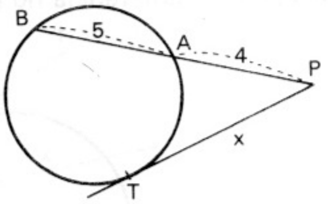
a)


A
C
4
3
P
12
x
B
D

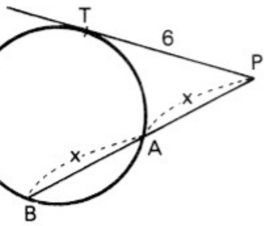
b)


B
A
6
4
P
15
x
C
D

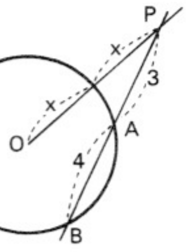
c)



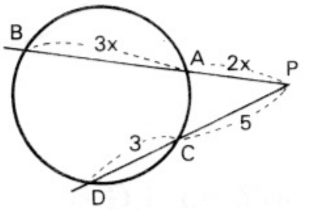
d)



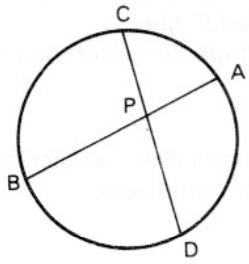
e)



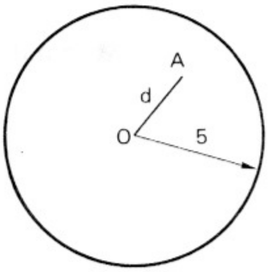
f)


B
3x
A
2x
P
5
3
C
D

E8.3 Na figura seguinte, PC e PD são proporcionais a 2 e 3. Calcule as medidas desses segmentos sabendo que PA = 3 e PB = 8.



E8.4 A potência de um ponto A, em relação a uma circunferência λ é igual a 9. Se A é interno a λ e se o raio de λ é $r = 5$, calcule a distância de A ao centro.



Resolução: Como A é interno a λ, tem-se:

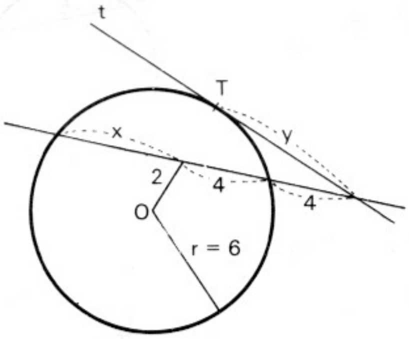
$$\text{Pot}_{\lambda}^{A} = r^2 - d^2$$

Assim, $r^2 - d^2 = 9 \xRightarrow{(r = 5)} 25 - d^2 = 9 \therefore \boxed{d = 4}$

E8.5 A distância de um ponto A ao centro de uma circunferência λ é $d = 13$. Se A é externo a λ e se $\text{Pot}_{\lambda}^{A} = 144$, determine o raio dessa circunferência.

E8.6 São dados uma circunferência de centro O e raio $r = 6$ e um ponto P tal que $OP = 4$. Uma corda $\overline{AB}$ que passa por P se divide em dois segmentos PA e PB. Calcule PB sabendo que $PA = 5$.

E8.7 Na figura seguinte, a circunferência tem centro O e raio $r = 6$. A reta **t** tangencia a circunferência no ponto T. Calcule **x** e **y**.

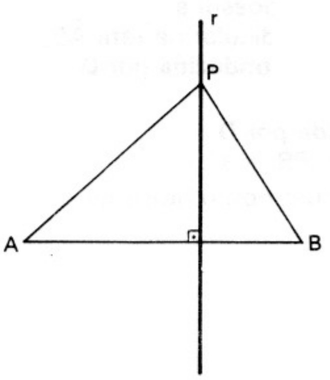


Reta de Apolônio: LG 6

O lugar geométrico que vamos definir agora não é muito importante para os problemas de construções geométricas, embora seja conveniente sabê-lo. A sua importância veremos logo adiante, pois é a partir desse LG que estabeleceremos aquilo que será chamado eixo radical de duas circunferências.

LG 6

O lugar geométrico dos pontos cujas diferenças dos quadrados das distâncias a dois pontos fixos A e B é igual a uma constante k^2 constitui uma reta perpendicular à reta AB.



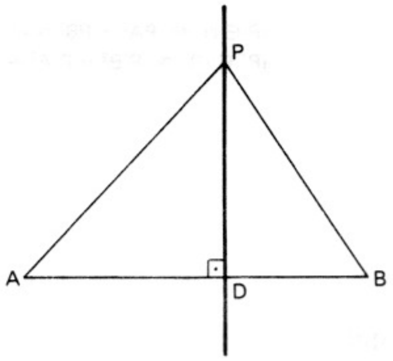
Lembre-se de que ao afirmar que a reta **r** é o referido lugar geométrico, está se dizendo que:

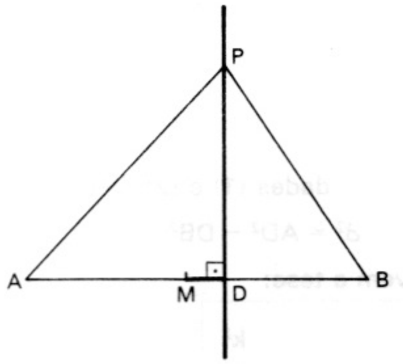
- **todo** ponto P pertencente a **r** tem a propriedade $PA^2 - PB^2 = k^2$;
- **somente** os pontos da reta **r** possuem essa propriedade.

$$\boxed{(P \in r) \Leftrightarrow PA^2 - PB^2 = k^2}$$

☐ **Demonstração:**

Seja P um ponto que possui a propriedade, isto é, $PA^2 - PB^2 = k^2$, e seja D a sua projeção perpendicular sobre a reta AB.





Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$\triangle$ PAD: $PA^2 = PD^2 + AD^2$ (1)
$\triangle$ PBD: $PB^2 = PD^2 + DB^2$ (2)

Subtraindo membro a membro as igualdades (1) e (2), obtemos:

$$\boxed{PA^2 - PB^2 = AD^2 - DB^2}$$

Note-se, então, que $\boxed{AD^2 - DB^2 = k^2}$

Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$. Então:

$$AD^2 - DB^2 = k^2$$
$$(AD + DB)(AD - DB) = k^2$$

$$\boxed{AD + DB = AB}$$
$$\boxed{AD - DB} = \underline{AM} + \underline{MD} - DB = \underline{BM - DB} + MD = MD + MD = \boxed{2MD}$$

Assim, $(AD + DB)(AD - DB) = k^2 \Rightarrow AB \cdot 2MD = k^2$

$$\therefore \boxed{MD = \frac{k^2}{2AB}}$$

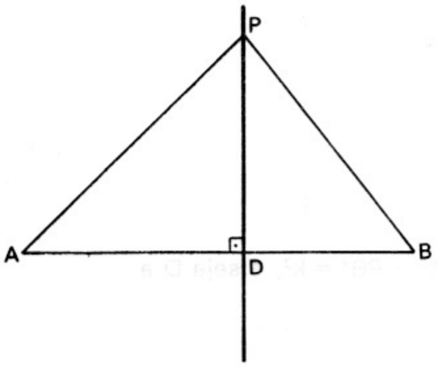
Nesta última igualdade, k^2 é constante e 2AB também o é, donde se deduz que MD é constante.

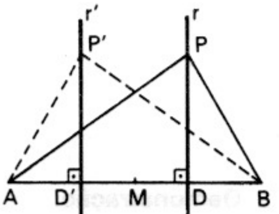
Mas se MD é constante, fica provado que todo ponto P que possui a propriedade $PA^2 - PB^2 = k^2$ tem em D a sua projeção perpendicular na reta AB, **isto é, todo ponto que possui a propriedade pertence à reta conduzida por D perpendicularmente à reta AB.**

Reciprocamente, todo ponto que pertence à reta conduzida por D perpendicularmente à reta AB possui a propriedade $PA^2 - PB^2 = k^2$.

A demonstração do recíproco é imediata. De fato, seja P um ponto qualquer da reta.

A rigor, existe na reta AB um ponto D', distinto do ponto D, tal que $\overline{MD'} \equiv \overline{MD}$. Porém a reta conduzida por D', perpendicularmente à reta AB, é uma reta r' que constitui o LG dos pontos P' tais que $P'B^2 - P'A^2 = k^2$. O que é diferente de $PA^2 - PB^2 = k^2$.





$(P \in r) \Leftrightarrow PA^2 - PB^2 = k^2$

$(P' \in r') \Leftrightarrow P'B^2 - P'A^2 = k^2$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

Δ PAD: $PA^2 = PD^2 + AD^2$ (1)

Δ PBD: $PB^2 = PD^2 + DB^2$ (2)

Subtraindo membro a membro as igualdades (1) e (2), vem:

$$PA^2 - PB^2 = AD^2 - DB^2$$

Como AD e BD são constantes, vem a tese:

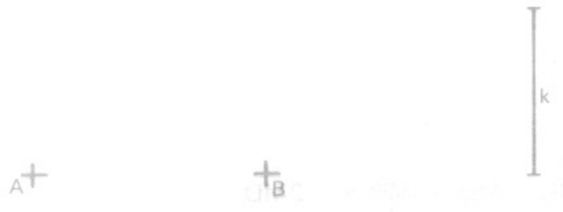
$$\boxed{PA^2 - PB^2 = k^2}$$

■ c.q.d.

Construção do LG 6

Problema

Construir o lugar geométrico dos pontos cujas diferenças dos quadrados das distâncias a dois pontos A e B dados é igual a k^2, onde **k** é um segmento dado.



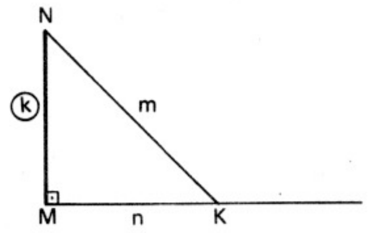
Resolução: Como o lugar a ser construído é uma reta, precisamos apenas de dois de seus pontos, P e Q, para traçá-la.

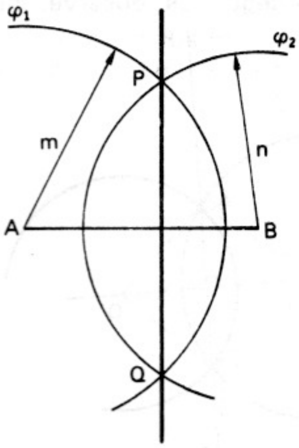
1.º) Constrói-se um triângulo retângulo KMN arbitrário, no qual um dos catetos é **k**. Sejam **m** a sua hipotenusa e **n** o outro cateto.

2.º) Com centro em A e raio **m**, descreve-se a circunferência φ_1.

3.º) Com centro em B e raio **n**, descreve-se a circunferência φ_2.

4.º) Conduz-se a reta procurada pelos pontos de intersecção das circunferências φ_1 e φ_2.





Justificativa: Pelo teorema de Pitágoras, no triângulo retângulo KMN temos:

$$m^2 = n^2 + k^2 \Rightarrow \boxed{m^2 - n^2 = k^2} \quad (1)$$

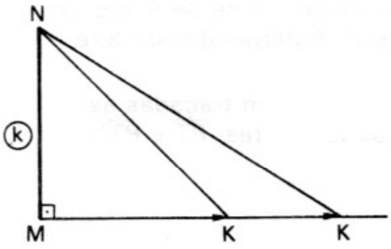
Ora, como PA = m e PB = n, QA = m e QB = n, de (1) vem:

$$PA^2 - PB^2 = k^2 \text{ e } QA^2 - QB^2 = k^2$$

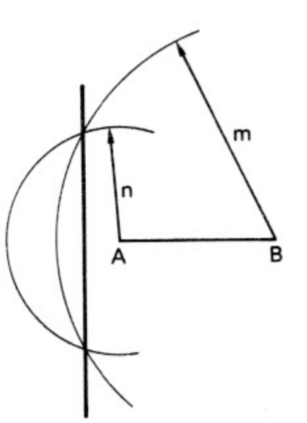
Assim, P e Q pertencem à reta procurada.

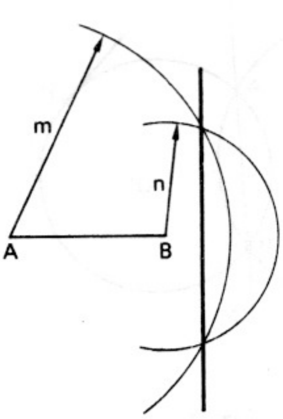
Observações:

- Na construção do LG 6, caso as circunferências φ_1 e φ_2 não se interceptem, bastará, na construção do triângulo retângulo KMN, escolher um ponto K mais afastado de M. Assim se aumentam os raios **m** e **n** daquelas circunferências.



- Dependendo do **k** e da distância de A a B, a reta do LG 6 pode ser externa ao segmento AB.





$$\boxed{PB^2 - PA^2 = k^2}$$

$$\boxed{PA^2 - PB^2 = k^2}$$

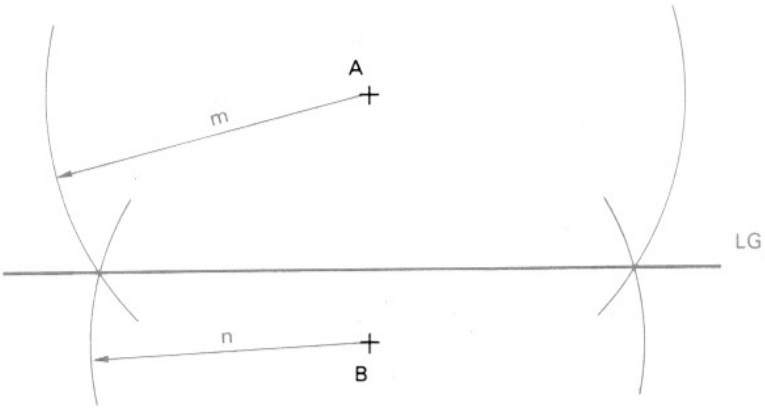
Resolva os exercícios de 99 a 102 do caderno de atividades.

Potência de um ponto: LG 6

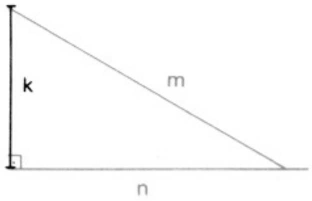
Figura auxiliar e anotações

99 Dados os pontos A e B e o segmento **k**, construa o LG dos pontos P tais que $PA^2 - PB^2 = k^2$.

Observação:
Oriente o aluno para que ele descubra, antes da construção, que a reta procurada ficará mais próxima de B do que de A, pois $PA^2 = k^2 + PB^2$, isto é, um ponto P qualquer da reta está mais afastado de A do que de B, já que desta igualdade se deduz que $PA > PB$.



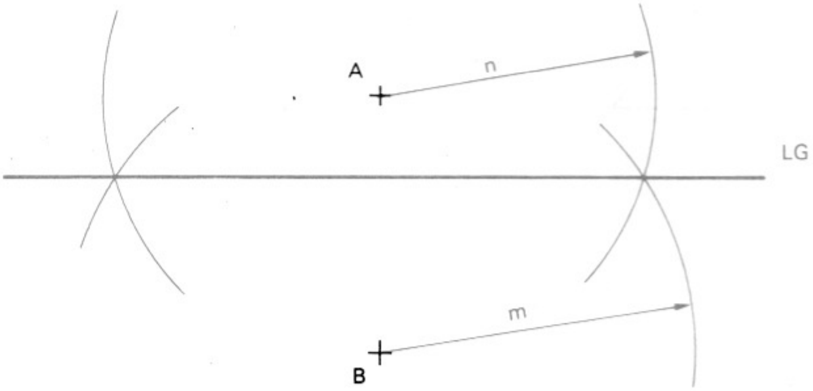
$m^2 - n^2 = k^2$

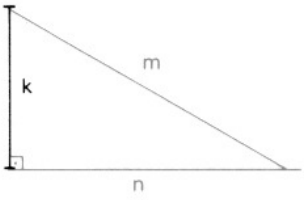


100 Dados os pontos A e B e o segmento **k**, construa o LG dos pontos P tais que $PB^2 - PA^2 = k^2$.

Observação:
Comente que a mediatriz de $\overline{AB}$ é um caso particular de LG 6, pois, para todo ponto P dela, verifica-se

$$PA^2 - PB^2 = 0$$





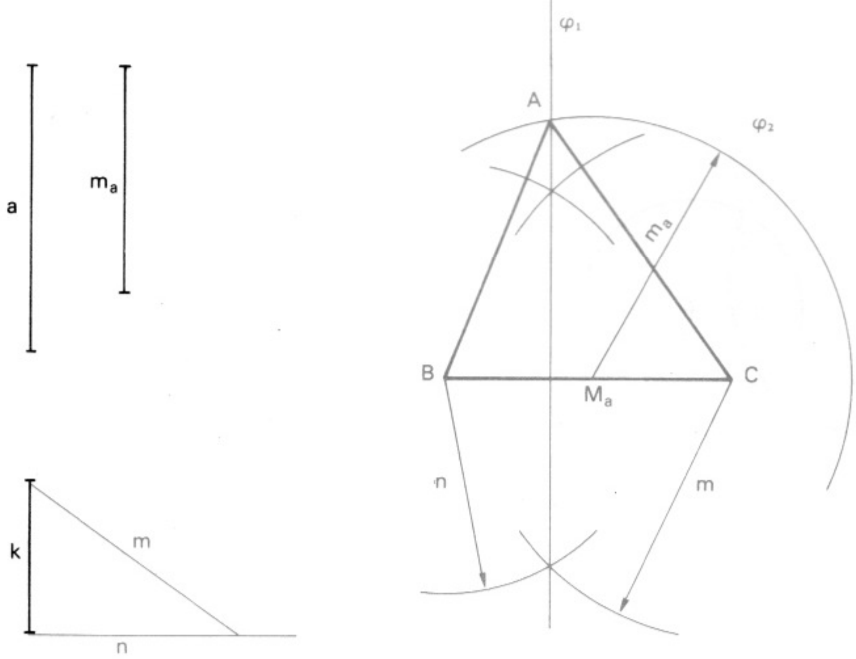
Potência de um ponto: LG 6

Figura auxiliar e anotações

101 Construa um triângulo ABC, dados **a**, m_a e $b^2 - c^2 = k^2$, onde **k** é um segmento dado.

Sugestão: Após colocar **a** (ou seja, os vértices B e C), para o vértice A você tem duas propriedades:

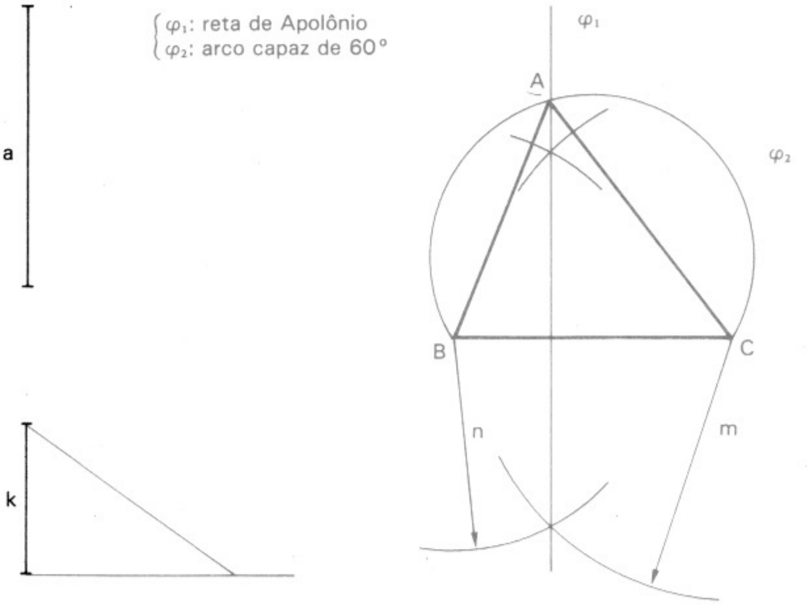
$$\begin{cases} \varphi_1: AC^2 - AB^2 = k^2 \text{ (LG 6)} \\ \varphi_2: AM_a = m_a \text{ (LG 1)} \end{cases}$$



Observação:
Comente que, embora φ_1 e φ_2 possuam um segundo ponto de intersecção (A') "abaixo" de $\overline{BC}$, o triângulo A'BC gerado a partir de A' é congruente ao triângulo ABC. Como o problema não é de posição, ele admite solução única.

102 Construa um triângulo ABC, dados **a**, $\hat{A} = 60°$ e $b^2 - c^2 = k^2$, onde **k** é um segmento dado.

Sugestão: Após colocar **a**, você conhece duas propriedades para o vértice A: LG 6 e LG 5 (arco capaz).

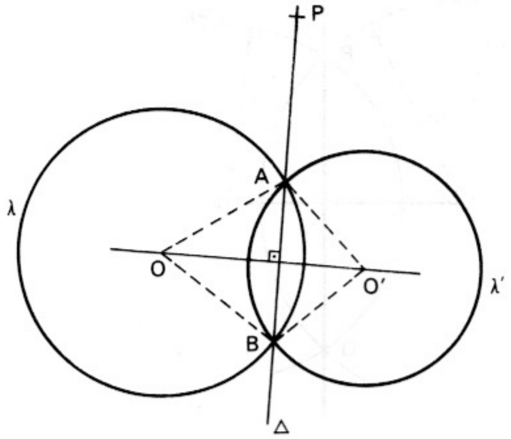


$$\begin{cases} \varphi_1: \text{reta de Apolônio} \\ \varphi_2: \text{arco capaz de } 60° \end{cases}$$

Observação:
A exemplo do que ocorre no exercício anterior, se traçarmos o segundo arco capaz, obteremos uma outra solução, simétrica à que foi registrada aqui.

Eixo radical

Para melhor introduzir os conceitos seguintes, observe, inicialmente, a figura.



A figura é composta de duas circunferências λ e λ′, de centros O e O′, que se interceptam em A e B. A reta △ é conduzida por A e B.

1.º) Note que cada ponto de △ tem a mesma potência em relação a λ e λ′. De fato:

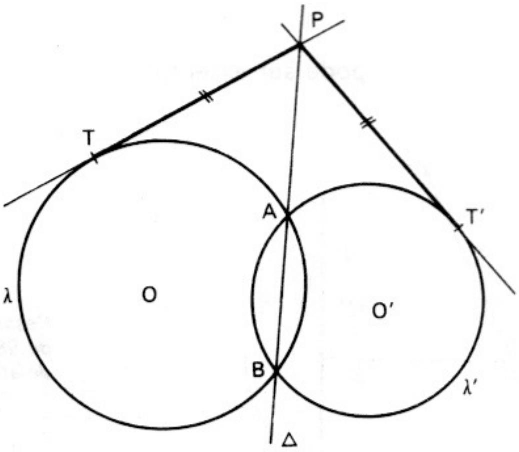
$$\left.\begin{array}{l} \text{Pot}_{\lambda}^{P} = PA \times PB \\ \text{Pot}_{\lambda'}^{P} = PA \times PB \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{Pot}_{\lambda}^{P} = \text{Pot}_{\lambda'}^{P}}$$

Quando um ponto tem a mesma potência em relação a duas circunferências, **dizemos que o ponto é eqüipotente em relação a essas circunferências.**

Assim, podemos dizer que cada ponto da reta △ é eqüipotente em relação a λ e λ′.

2.º) Como O é eqüidistante de A e B, e O′ é também eqüidistante de A e B, a reta OO′ é a mediatriz de $\overline{AB}$. Daí se conclui que △ é perpendicular à reta OO′.

3.º) Note, também, que se de **um ponto P qualquer de** △ forem traçadas as tangentes **t** e **t′**, a λ e λ′, então os segmentos das tangentes, $\overline{PT}$ e $\overline{PT'}$, serão congruentes.



$\text{Pot}_{\lambda}^{P} = (PT)^2$ e $\text{Pot}_{\lambda'}^{P} = (PT')^2$

Como $\text{Pot}_{\lambda}^{P} = \text{Pot}_{\lambda'}^{P}$, tem-se $(PT)^2 = (PT')^2$

$$\therefore \quad \boxed{\overline{PT} \equiv \overline{PT'}}$$

Pois bem, a reta Δ em questão é denominada **eixo radical** das circunferências λ e λ'. Porém, algumas perguntas ainda devem ser respondidas sobre o eixo radical. Tais como:

- Se as circunferências forem tangentes, ou exteriores, ou interiores, elas admitirão um eixo radical?
- O eixo radical é o lugar geométrico dos pontos eqüipotentes em relação a duas circunferências? (Note que se for, então **todo ponto do eixo** terá que ser eqüipotente e **nenhum ponto fora do eixo** poderá ser eqüipotente em relação às circunferências.)

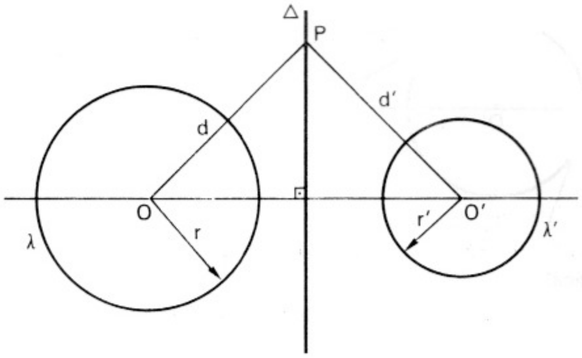
Às duas perguntas a resposta é **Sim**, e, para respondê-las, passaremos a um teorema que estabelece o eixo radical como lugar geométrico.

LG 7

O lugar geométrico dos pontos eqüipotentes em relação a duas circunferências λ e λ', de centros O e O', é uma reta perpendicular à reta conduzida por O e O'.

☐ **Demonstração**:

Seja P um ponto qualquer eqüipotente em relação a λ e λ'. Sejam **d** e **d'** as distâncias de P a O e O', e sejam **r** e **r'** os raios das circunferências.



Como vimos, $\text{Pot}_{\lambda}^{P} = d^2 - r^2$ e $\text{Pot}_{\lambda'}^{P} = d'^2 - r'^2$.

Mas, por hipótese, P é eqüipotente em relação a λ e λ'. Logo:

$$\text{Pot}_{\lambda}^{P} = \text{Pot}_{\lambda'}^{P} \Rightarrow d^2 - r^2 = d'^2 - r'^2$$

Donde: $d^2 - d'^2 = r^2 - r'^2$

Ora, **r** e **r'** são constantes, portanto $r^2 - r'^2$ também é constante. Daí, podemos escrever:

$$\boxed{d^2 - d'^2 = k^2} \quad (k^2 = r^2 - r'^2 = \text{constante})$$

$$\text{ou,} \quad \boxed{PO^2 - PO'^2 = k^2}$$

Esta última igualdade nos mostra que todo ponto P eqüipotente em relação a λ e λ' possui a diferença dos quadrados de suas distâncias a O e O' constante.

Logo, pelo **LG 6**, **todo ponto eqüipotente em relação a λ e λ' pertence a uma mesma reta Δ perpendicular à reta OO'**.

Reciprocamente, é imediata a demonstração de que **todo ponto P pertencente à reta Δ é eqüipotente em relação a λ e λ'**. De fato, ainda pelo LG 6, temos:

$$(P \in s) \Rightarrow PO^2 - PO'^2 = k^2$$

Como $k^2 = r^2 - r'^2$, temos:

$$PO^2 - PO'^2 = r^2 - r'^2 \Rightarrow PO^2 - r^2 = PO'^2 - r'^2$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{Pot}_{\lambda}^{P} = \text{Pot}_{\lambda'}^{P}}$$

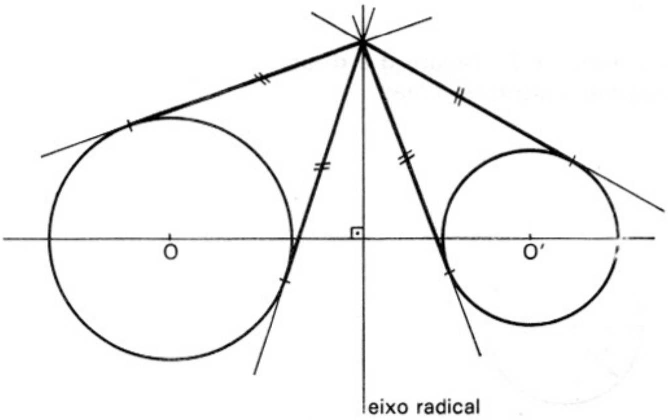
■ c.q.d.

Definição

O lugar geométrico dos pontos eqüipotentes em relação a duas circunferências não-concêntricas é denominado **eixo radical** das mesmas.

Observações:

- Note que as circunferências não podem ser concêntricas, pois, se forem O e O′ coincidem e nada do que foi demonstrado será válido.
- Excluído o caso das circunferências concêntricas, observe que a demonstração não depende da posição das mesmas, isto é, **em qualquer posição (exceto quando concêntricas) duas circunferências sempre possuem eixo radical.**
- Convém insistir que **se de um ponto qualquer do eixo radical forem traçadas retas tangentes às duas circunferências, então os segmentos das tangentes serão congruentes.**



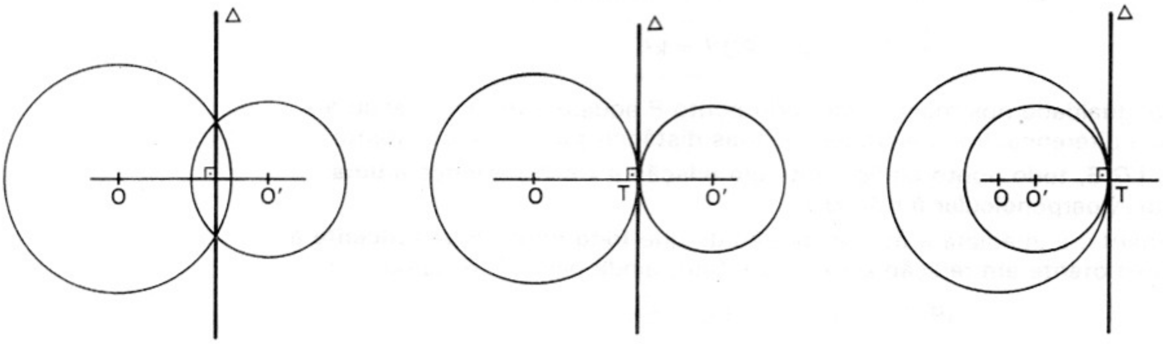
Construção do eixo radical

1.º Caso: As circunferências são secantes.

O eixo radical é a reta que passa pelos pontos de intersecção das circunferências.

2.º Caso: As circunferências são tangentes em T.

O eixo radical é a tangente comum às circunferências conduzida pelo ponto T.



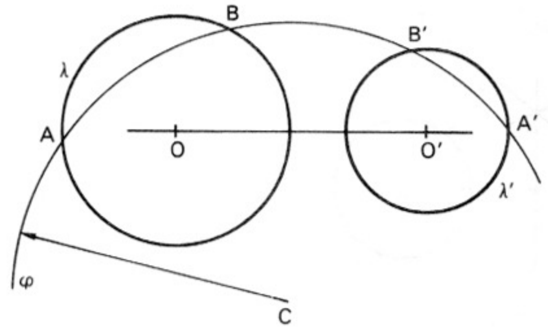
3.º Caso: As circunferências são exteriores.

Para esse caso, a construção é a seguinte:

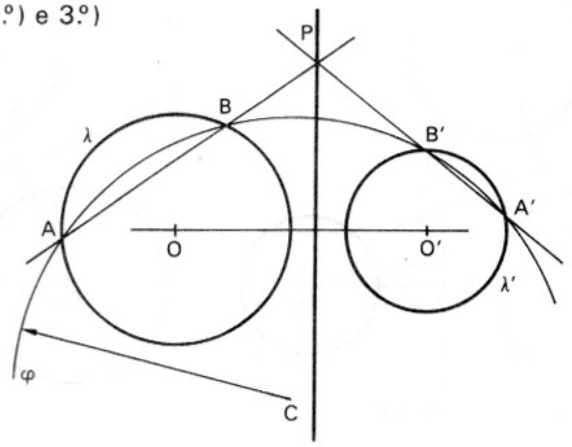
1.º) Com centro C arbitrário e raio também arbitrário, traça-se uma circunferência φ que intercepte λ em A e B, e λ' em A′ e B′.

2.º) Traçam-se as retas AB e A′B′, as quais interceptam-se em P.
3.º) O eixo radical é a reta conduzida por P perpendicularmente à reta OO′.

1.º)



2.º) e 3.º)



Justificativa: Observemos inicialmente que por ser o eixo radical uma reta perpendicular à reta OO′, é suficiente determinar um de seus pontos e, por ele, conduzir o eixo radical perpendicularmente a $\overleftrightarrow{OO'}$. Assim, para justificar a construção, basta provar que o ponto P pertence ao eixo radical. De fato, com relação à circunferência φ, temos:

$$\text{Pot}_{\varphi}^{P} = PA \times PB = PA' \times PB' \quad (1)$$

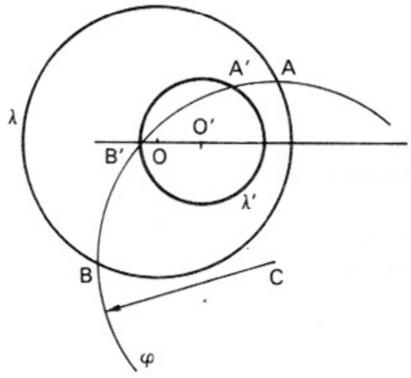
Mas, $\text{Pot}_{\lambda}^{P} = PA \times PB$ e $\text{Pot}_{\lambda'}^{P} = PA' \times PB'$

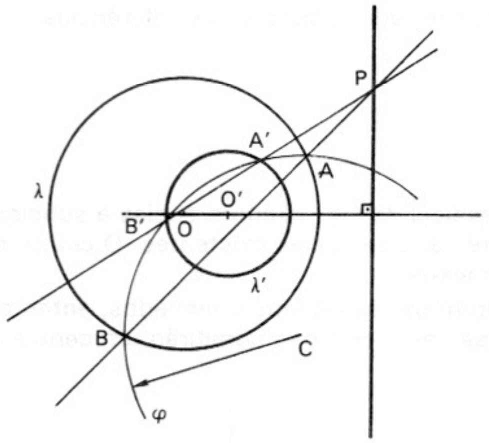
E, de (1), $\boxed{\text{Pot}_{\lambda}^{P} = \text{Pot}_{\lambda'}^{P}}$

Logo, P é eqüipotente em relação a λ e λ′, isto é, P pertence ao eixo radical.

4.º Caso: As circunferências são interiores.

Nesse caso procede-se a construção exatamente como no caso anterior (circunferências exteriores). O mesmo vale para a justificativa.





Resolva os exercícios de 103 a 108 do caderno de atividades.

Centro radical

Teorema

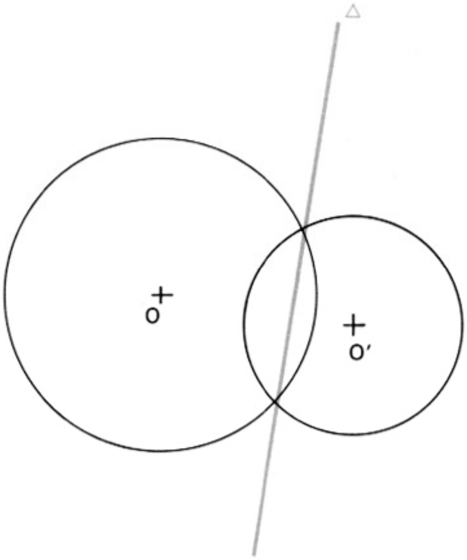
Sejam três circunferências λ_1, λ_2 e λ_3 cujos centros não estão alinhados. Então, os eixos radicais dessas circunferências, tomadas duas a duas, interceptam-se num mesmo ponto $\mathcal{C}$.

Potência de um ponto: eixo radical

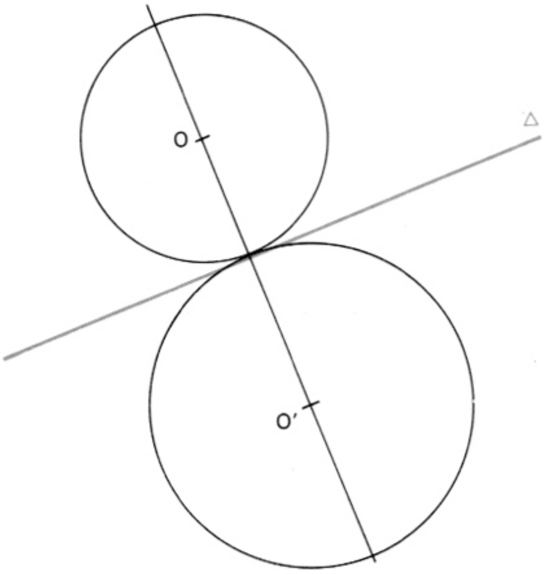
Figura auxiliar e anotações

Para os exercícios de 103 a 107, construa o eixo radical das circunferências de centros O e O' dadas.

103



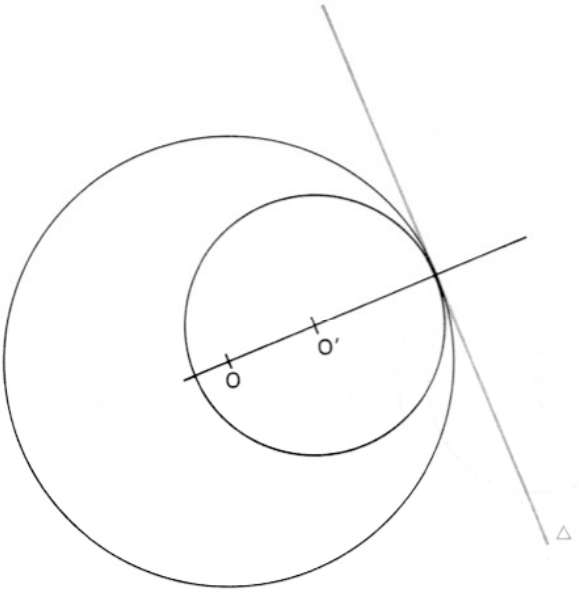
104



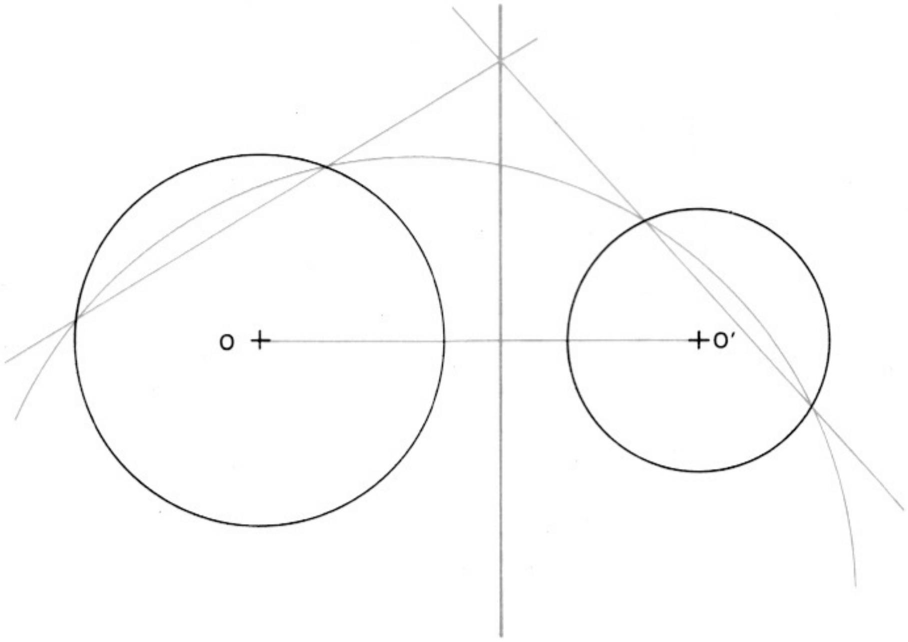
Potência de um ponto: eixo radical

Figura auxiliar e anotações

105



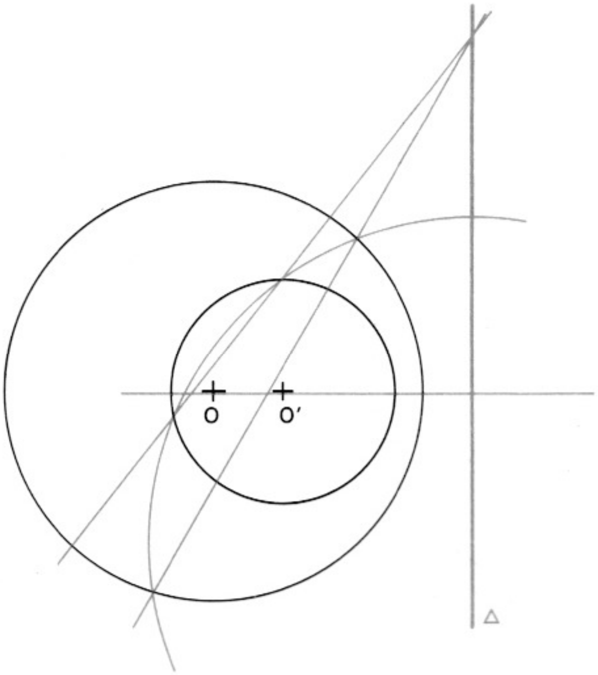
106



Potência de um ponto: eixo radical

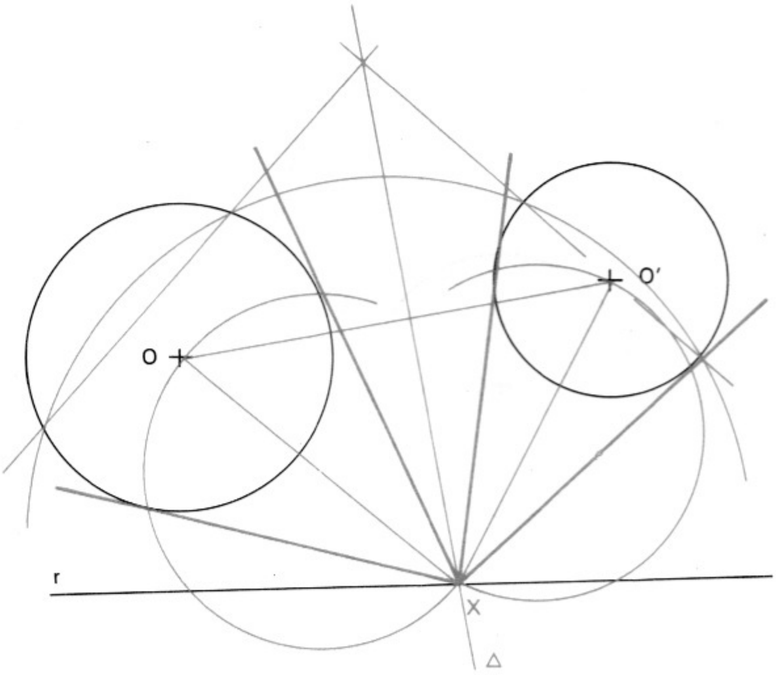
Figura auxiliar e anotações

107



108 São dadas duas circunferências, de centros O e O′, e uma reta **r**. Determine um ponto X de **r**, de modo que os segmentos das tangentes conduzidas de X às circunferências sejam congruentes. Trace essas tangentes a partir do ponto X obtido.

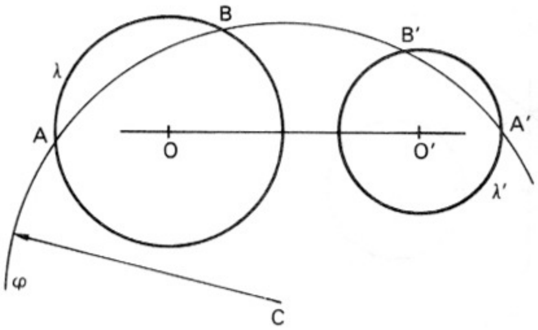
Observação:
Aproveite esse exercício para relembrar ao aluno o traçado da tangente a uma circunferência por um ponto externo à mesma. Essa construção será usada com muita freqüência no capítulo de Tangência, de modo que o aluno deverá sabê-la muito bem.



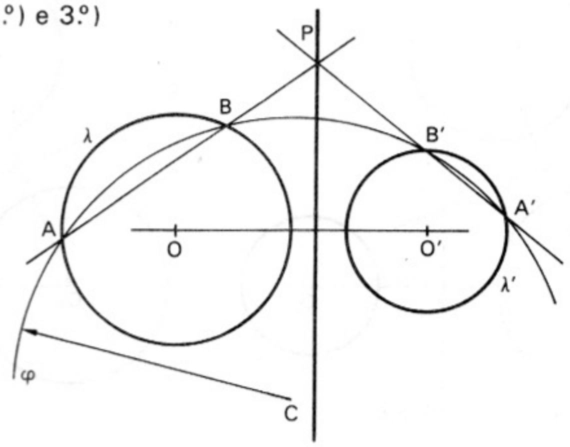
2.º) Traçam-se as retas AB e A'B', as quais interceptam-se em P.

3.º) O eixo radical é a reta conduzida por P perpendicularmente à reta OO'.

1.º)



2.º) e 3.º)



Justificativa: Observemos inicialmente que por ser o eixo radical uma reta perpendicular à reta OO', é suficiente determinar um de seus pontos e, por ele, conduzir o eixo radical perpendicularmente a $\overleftrightarrow{OO'}$. Assim, para justificar a construção, basta provar que o ponto P pertence ao eixo radical. De fato, com relação à circunferência φ, temos:

$$\text{Pot}_{\varphi}^{P} = PA \times PB = PA' \times PB' \quad (1)$$

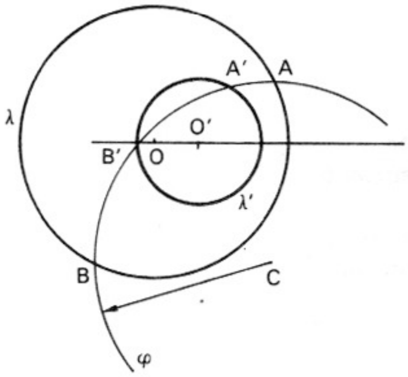
Mas, $\text{Pot}_{\lambda}^{P} = PA \times PB$ e $\text{Pot}_{\lambda'}^{P} = PA' \times PB'$

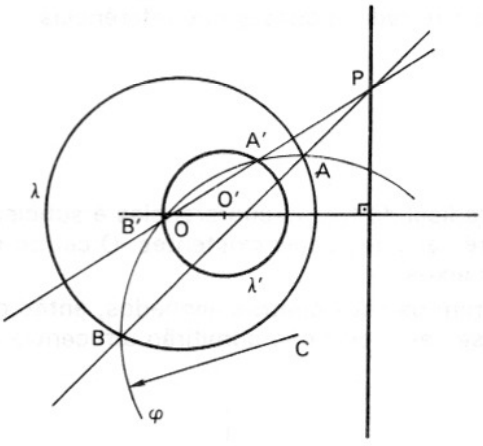
E, de (1), $\boxed{\text{Pot}_{\lambda}^{P} = \text{Pot}_{\lambda'}^{P}}$

Logo, P é eqüipotente em relação a λ e λ', isto é, P pertence ao eixo radical.

4.º Caso: As circunferências são interiores.

Nesse caso procede-se a construção exatamente como no caso anterior (circunferências exteriores). O mesmo vale para a justificativa.



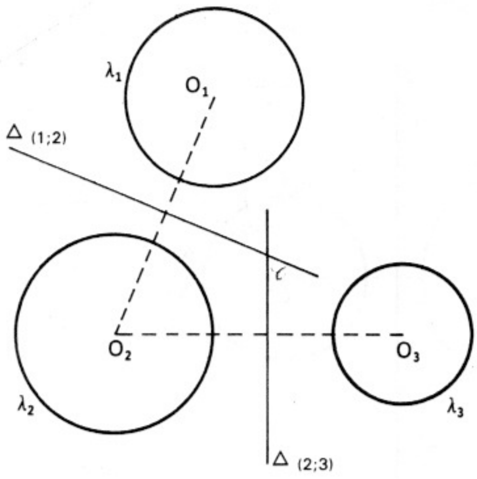


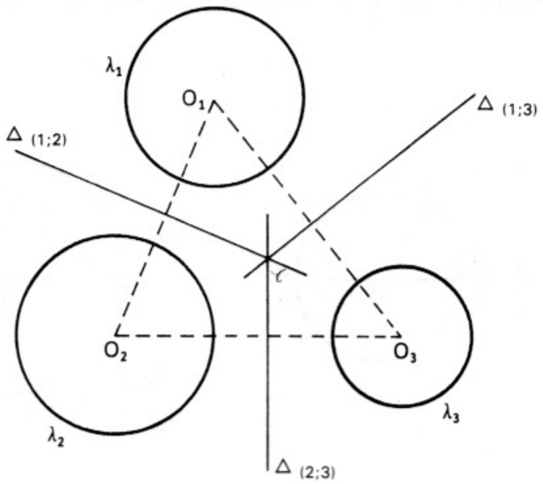
Resolva os exercícios de 103 a 108 do caderno de atividades.

Centro radical

Teorema

Sejam três circunferências λ_1, λ_2 e λ_3 cujos centros não estão alinhados. Então, os eixos radicais dessas circunferências, tomadas duas a duas, interceptam-se num mesmo ponto $\mathcal{C}$.





☐ **Demonstração**:

Seja $\mathcal{C}$ o ponto de intersecção dos eixos radicais de λ_1 e λ_2, e de λ_2 e λ_3. Ora, então podemos concluir que:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Pot}_{\lambda_1}^{\mathcal{C}} = \text{Pot}_{\lambda_2}^{\mathcal{C}} \\ \text{Pot}_{\lambda_3}^{\mathcal{C}} = \text{Pot}_{\lambda_2}^{\mathcal{C}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{Pot}_{\lambda_1}^{\mathcal{C}} = \text{Pot}_{\lambda_3}^{\mathcal{C}} \qquad (1)$$

A notação Δ (1; 2) indica o eixo radical das circunferências λ_1 e λ_2.

Assim, a igualdade (1) nos mostra que $\mathcal{C}$ é eqüipotente em relação a λ_1 e λ_3, ou seja, **o eixo radical de λ_1 e λ_3 também passa por $\mathcal{C}$**.

■ c.q.d.

Note que $\mathcal{C}$ é eqüipotente em relação às três circunferências.

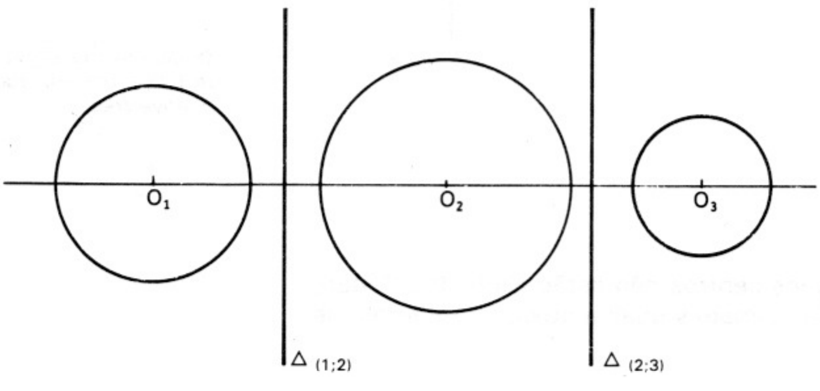
$$\text{Pot}_{\lambda_1}^{\mathcal{C}} = \text{Pot}_{\lambda_2}^{\mathcal{C}} = \text{Pot}_{\lambda_3}^{\mathcal{C}}$$

Definição

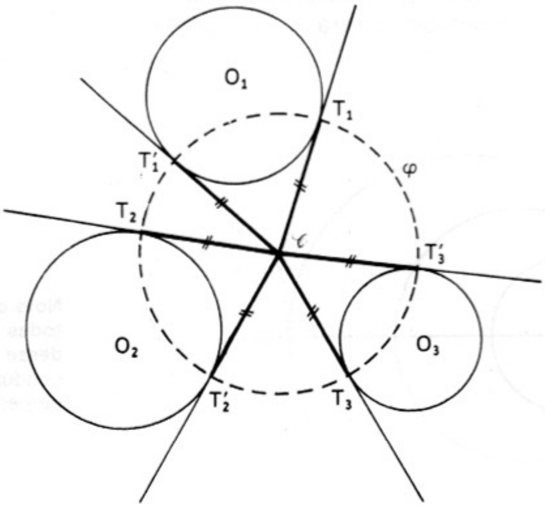
O ponto $\mathcal{C}$, eqüipotente em relação a três circunferências cujos centros não estão alinhados, é denominado **centro radical** dessas circunferências.

Observações:

- Note que para obter o centro radical de três circunferências é suficiente construir dois quaisquer dos três eixos radicais existentes. O centro radical é o ponto de intersecção desses eixos.
- Se as três circunferências tiverem os seus centros alinhados, então os eixos radicais serão paralelos e, nesse caso, elas não admitirão um centro radical.



- Os segmentos das tangentes conduzidas a três circunferências a partir do centro radical são congruentes.



Observe que para traçar as tangentes às circunferências a partir de 𝒞, basta traçar uma delas, por exemplo $\overleftrightarrow{PT_1}$. Os demais pontos de tangência, T_2, T'_2, T_3 e T'_3, obtêm-se traçando a circunferência φ de centro 𝒞 e raio $\overline{PT_1}$.

Resolva os exercícios 109 e 110 do caderno de atividades.

Feixe de circunferências

Para os problemas de construções geométricas, o estudo a seguir, sobre feixes de circunferências, representa a parte mais importante do tópico **potência de ponto**. Através das propriedades que agora serão expostas, vamos poder resolver vários problemas de tangência que envolvem circunferências e retas. Estude com bastante atenção a teoria seguinte, até certificar-se de que você a compreendeu plenamente.

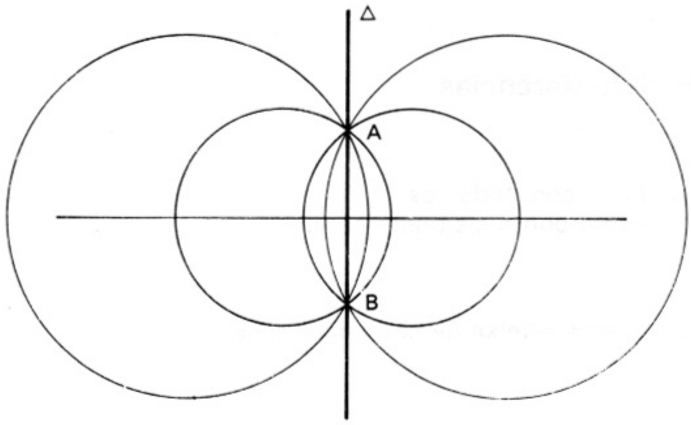
Definição

Chama-se **feixe de circunferências** toda família de circunferências que admitem duas a duas o mesmo eixo radical.

Há dois tipos de feixes de circunferências que nos interessam.

1.º Tipo: Feixe de circunferências secantes.

O conjunto de todas as circunferências que passam por dois pontos fixos A e B constitui um feixe de circunferências secantes. De fato, para quaisquer duas circunferências de um tal conjunto, o eixo radical é sempre a reta Δ que passa por A e B.



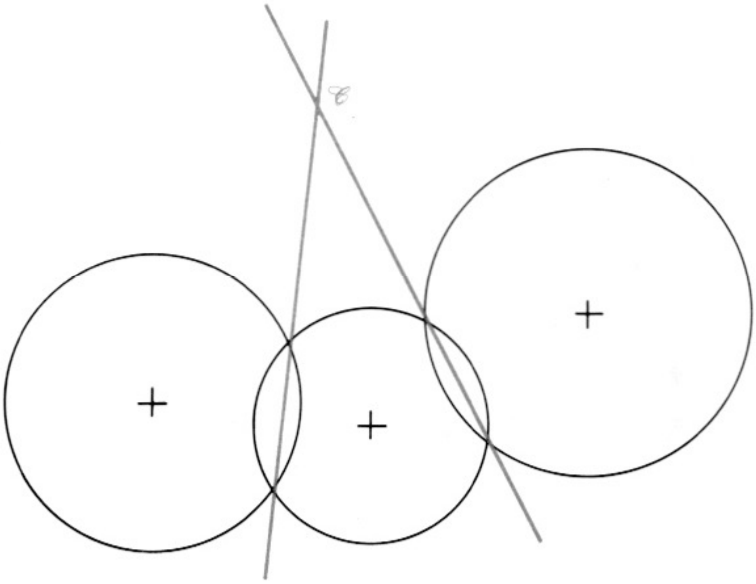
Note que os centros de todas as circunferências desse feixe estão na mediatriz de $\overline{AB}$.

A e B são denominados **pontos de base**.

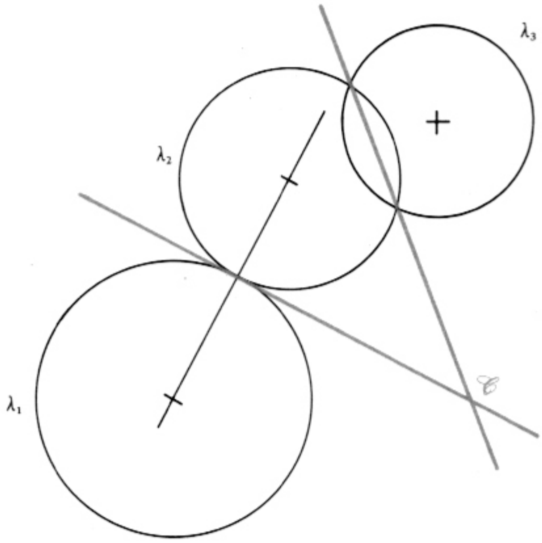
Potência de um ponto: centro radical

Figura auxiliar e anotações

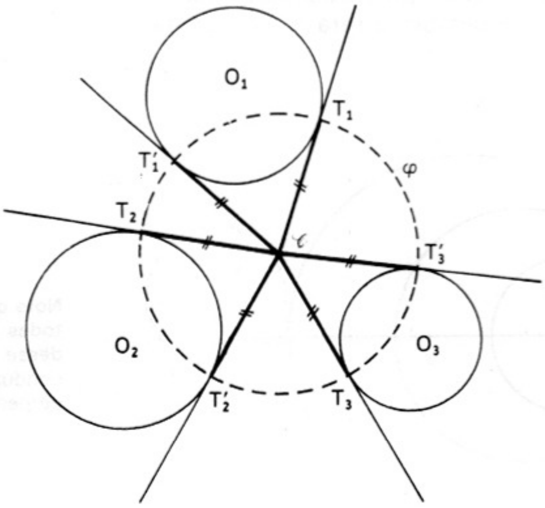
109 Determine o centro radical das três circunferências dadas.



110 Determine o centro radical das três circunferências dadas. (λ_1 e λ_2 são tangentes.)


λ_3
λ_2
λ_1
𝒞

- Os segmentos das tangentes conduzidas a três circunferências a partir do centro radical são congruentes.



Observe que para traçar as tangentes às circunferências a partir de 𝒞, basta traçar uma delas, por exemplo $\overleftrightarrow{PT_1}$. Os demais pontos de tangência, T_2, T'_2, T_3 e T'_3, obtêm-se traçando a circunferência φ de centro 𝒞 e raio $\overline{PT_1}$.

Resolva os exercícios 109 e 110 do caderno de atividades.

Feixe de circunferências

Para os problemas de construções geométricas, o estudo a seguir, sobre feixes de circunferências, representa a parte mais importante do tópico **potência de ponto**. Através das propriedades que agora serão expostas, vamos poder resolver vários problemas de tangência que envolvem circunferências e retas. Estude com bastante atenção a teoria seguinte, até certificar-se de que você a compreendeu plenamente.

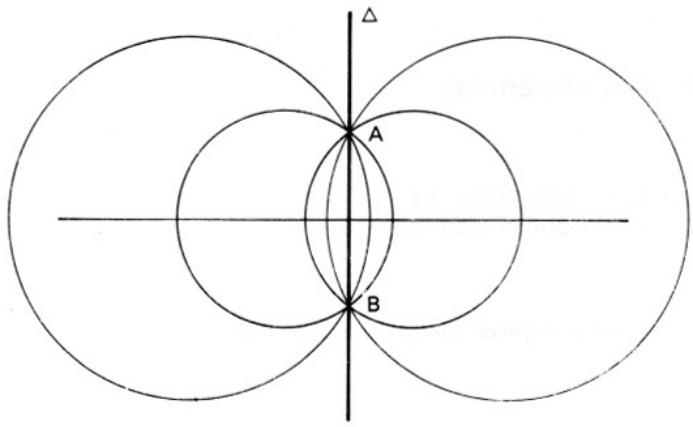
Definição

Chama-se **feixe de circunferências** toda família de circunferências que admitem duas a duas o mesmo eixo radical.

Há dois tipos de feixes de circunferências que nos interessam.

1.º Tipo: Feixe de circunferências secantes.

O conjunto de todas as circunferências que passam por dois pontos fixos A e B constitui um feixe de circunferências secantes. De fato, para quaisquer duas circunferências de um tal conjunto, o eixo radical é sempre a reta Δ que passa por A e B.

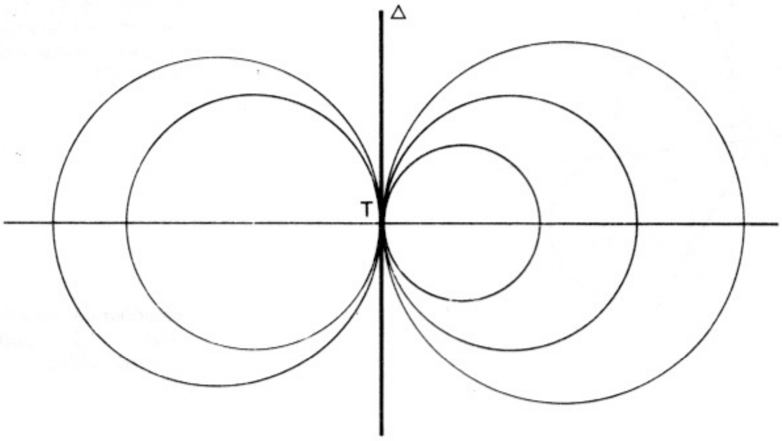


Note que os centros de todas as circunferências desse feixe estão na mediatriz de $\overline{AB}$.

A e B são denominados **pontos de base**.

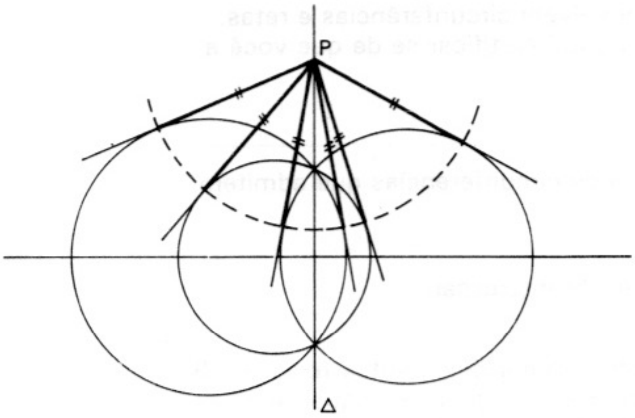
2.º Tipo: Feixe de circunferências tangentes.

O conjunto de todas as circunferências tangentes entre si num mesmo ponto T constitui um feixe de circunferências tangentes. De fato, para quaisquer duas circunferências de um tal conjunto, o eixo radical é sempre a reta △ , tangente comum conduzida pelo ponto T.



Note que os centros de todas as circunferências desse feixe estão na reta conduzida por T perpendicularmente a △ .

Observação: Note que se de um ponto qualquer do eixo radical de um feixe de circunferências traçarmos as retas tangentes a essas circunferências, então os segmentos das tangentes serão congruentes. Isso ocorre porque um ponto P qualquer do eixo radical do feixe é **eqüipotente em relação a todas circunferências desse feixe.**



Essa propriedade do feixe de circunferências será usada com muita freqüência nos problemas de construção.

Propriedade fundamental do feixe de circunferências

Propriedade

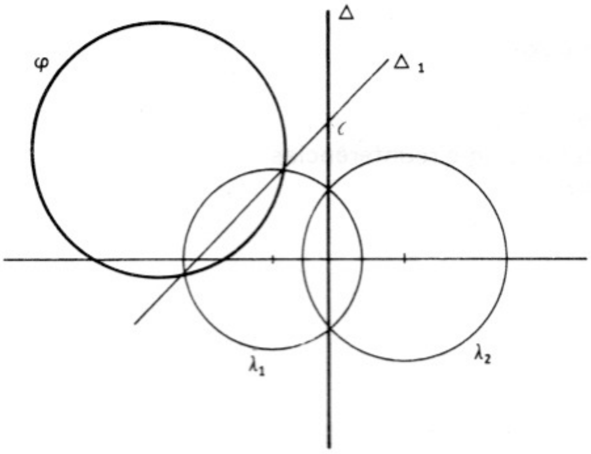
Os eixos radicais de uma circunferência φ qualquer com todas as circunferências de um feixe concorrem num mesmo ponto $\mathscr{C}$ situado no eixo radical △ desse feixe.

O ponto $\mathscr{C}$ é o centro radical da circunferência φ com o feixe de circunferências.

☐ **Demonstração:**

Sejam λ_1 e λ_2 duas circunferências quaisquer do feixe e Δ_1 o eixo radical de φ e λ_1. Então, como vimos, o centro radical de φ, λ_1 e λ_2 é o ponto $\mathscr{C}$ de intersecção de Δ e Δ ₁. Assim, $\mathscr{C}$ é eqüipotente em relação a essas três circunferências, isto é:

$$\boxed{\text{Pot}_{\varphi}^{\mathscr{C}} = \text{Pot}_{\lambda_1}^{\mathscr{C}} = \text{Pot}_{\lambda_2}^{\mathscr{C}} \qquad (1)}$$



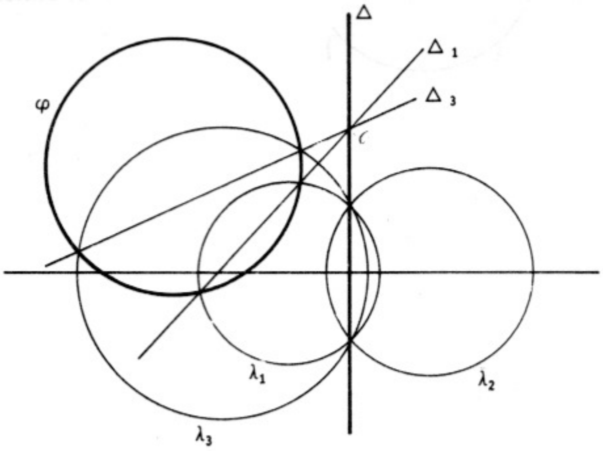
Ora, como $\mathscr{C}$ pertence ao eixo radical Δ do feixe, ele é eqüipotente em relação a todas as circunferências do mesmo. Assim, sendo λ_3 uma outra circunferência qualquer do feixe, pode-se escrever:

$$\boxed{\text{Pot}_{\lambda_1}^{\mathscr{C}} = \text{Pot}_{\lambda_2}^{\mathscr{C}} = \text{Pot}_{\lambda_3}^{\mathscr{C}} \qquad (2)}$$

Das igualdades (1) e (2), conclui-se que:

$$\boxed{\text{Pot}_{\varphi}^{\mathscr{C}} = \text{Pot}_{\lambda_3}^{\mathscr{C}}}$$

Ou seja, o ponto $\mathscr{C}$ é eqüipotente em relação às circunferências φ e λ_3. Logo, o eixo radical de φ e λ_3 passa por $\mathscr{C}$.



■ c.q.d.

Antes de passarmos ao estudo de alguns problemas importantes de tangência, convém que você aprenda uma construção que você terá que realizar com freqüência. É preciso se familiarizar muito bem com ela.

Problema

Dada uma circunferência φ e um feixe de circunferências, determinar o centro radical $\mathscr{C}$ de φ com o feixe.

Resolução:

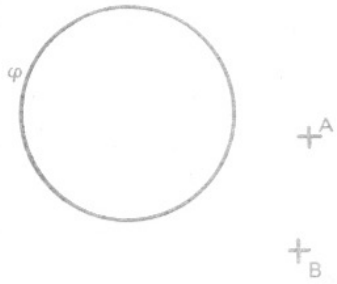
1.º) Traça-se o eixo radical Δ do feixe.

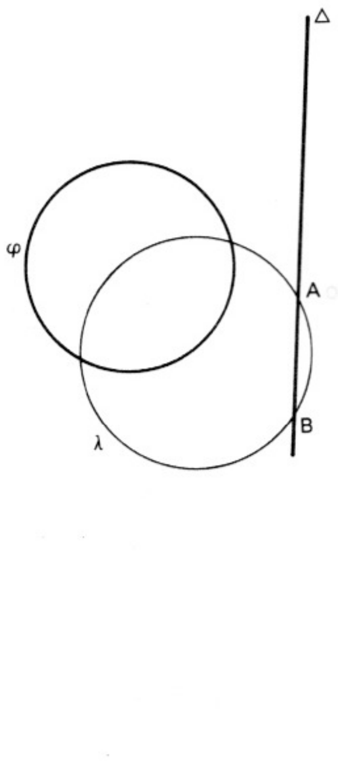
2.º) Traça-se uma circunferência λ qualquer do feixe.

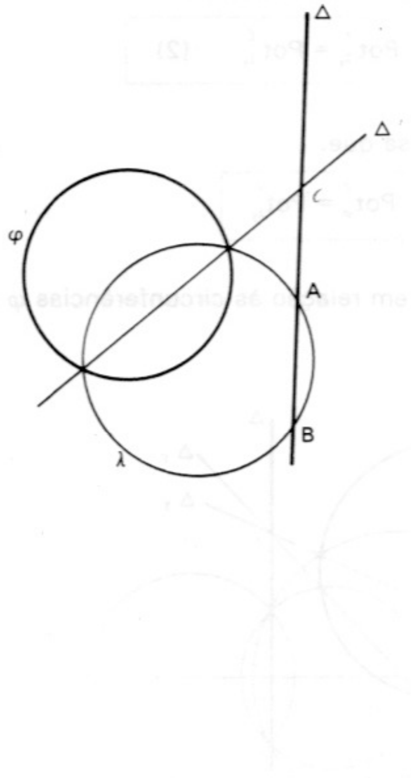
3.º) Traça-se o eixo radical Δ' de λ e φ.

4.º) O ponto $\mathscr{C}$ procurado é a intersecção de Δ e Δ'.

Como exemplo, vamos supor que seja dado um feixe de circunferências secantes através dos seus pontos A e B de base.







Resolva os exercícios de 111 a 114 do caderno de atividades.

Potência de um ponto: feixe de circunferências

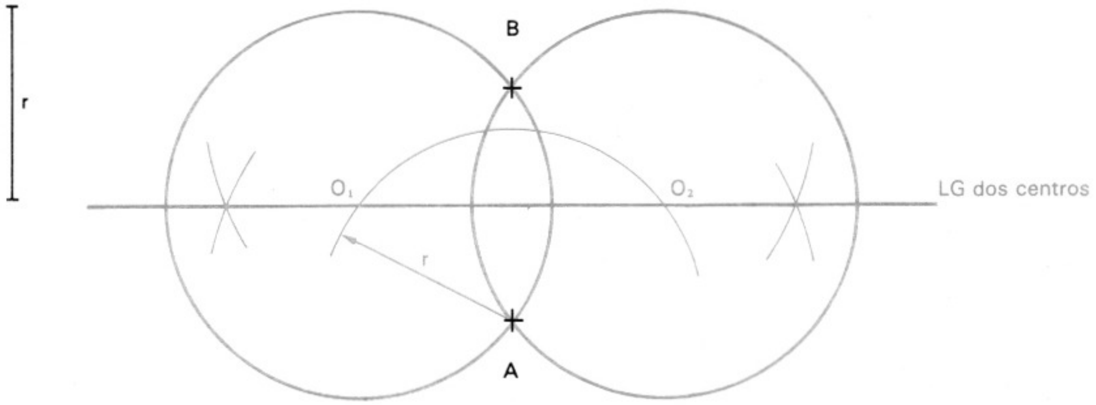
Figura auxiliar e anotações

111 De um feixe de circunferências secantes são dados os pontos de base A e B.

a) Construa a reta que contém os centros de todas as circunferências desse feixe.

b) Construa uma circunferência de raio **r** desse feixe. (**r** dado.)

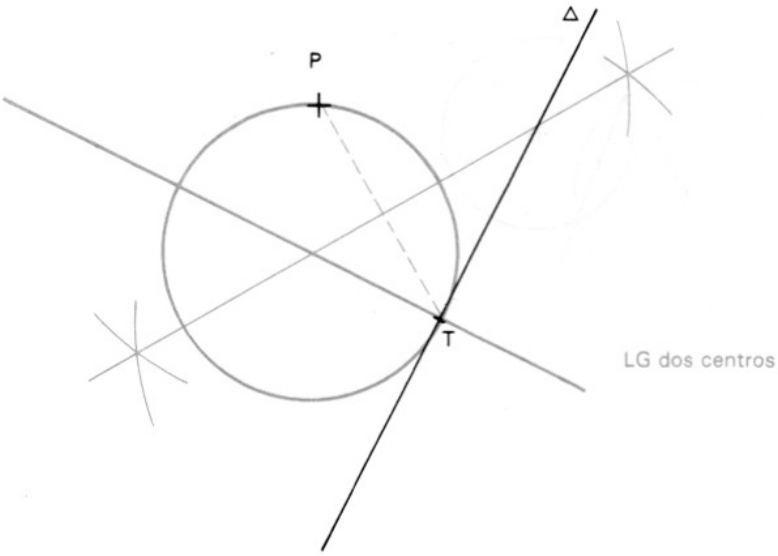
Observação:
Comente que o problema é de posição, na medida em que ele vincula as circunferências procuradas a pontos impressos, isto é, não se pode fazer a construção a partir de uma posição arbitrária.



112 De um feixe de circunferências tangentes é dado o eixo radical Δ e o ponto T de tangência.

a) Construa a reta que contém os centros de todas as circunferências desse feixe.

b) Desse feixe, construa a circunferência que passa pelo ponto P dado.

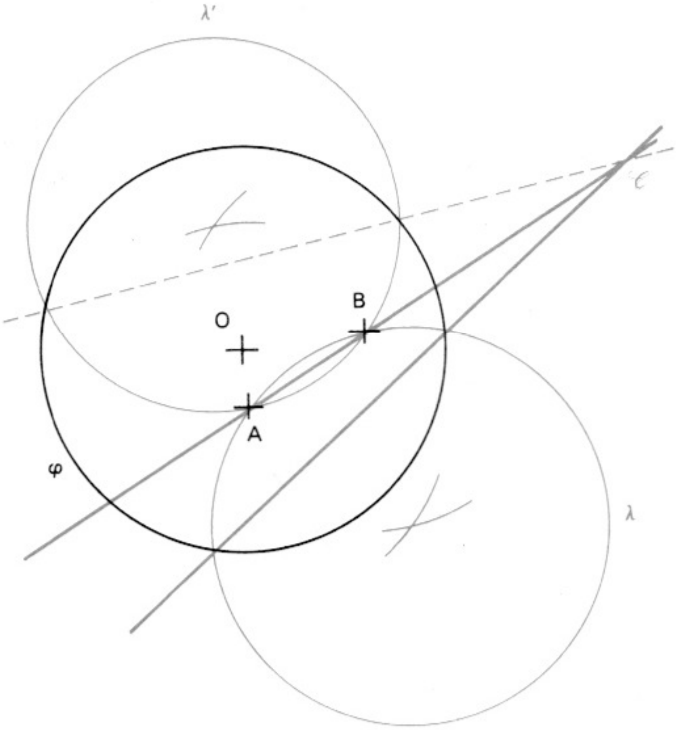


Potência de um ponto: feixe de circunferências

Figura auxiliar e anotações

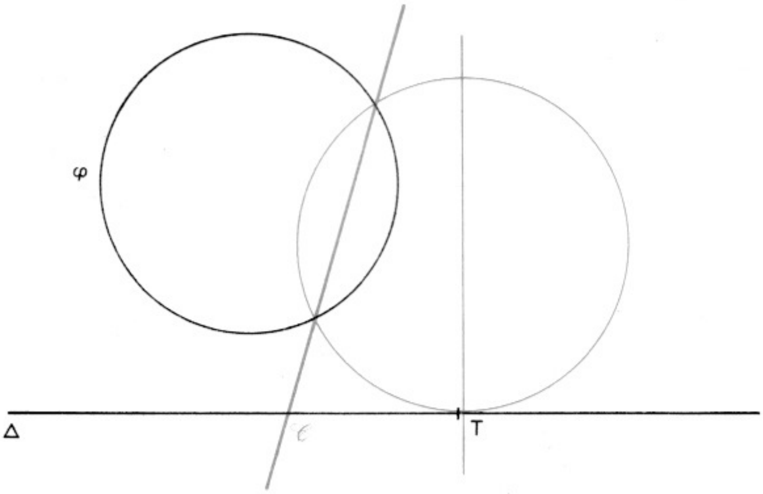
113 São dados os pontos A e B e uma circunferência φ. Determine o centro radical de φ com o feixe de circunferências secantes que têm em A e B os seus pontos de base.

Sugestão:
Após a determinação de $\mathcal{C}$, com a utilização de uma circunferência λ do feixe, proponha que se construa uma segunda circunferência λ' qualquer do feixe, para que o aluno verifique que ela determina o mesmo centro radical obtido através de λ.



114 De um feixe de circunferências tangentes são dados o eixo radical Δ e o ponto T de tangência. Além disso, é dada uma circunferência φ. Determine o centro radical de φ com o feixe.

Sugestão:
Proponha o mesmo que se sugeriu no problema anterior.



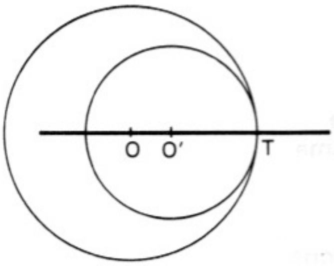
9

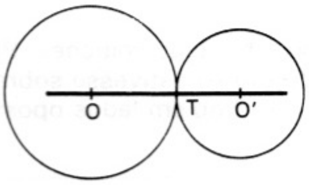
Tangência

Método dos feixes de circunferências

Para facilitar possíveis referências futuras aos problemas que agora passaremos a estudar, vamos denotá-los por **pt** (problema de tangência). Em particular, dois desses problemas serão de extrema importância quando, mais adiante, estudarmos as **Cônicas**.

Várias vezes será utilizada a propriedade: **se duas circunferências são tangentes, então o ponto de tangência e os centros estão alinhados**. É bom você ter isso sempre em mente, para não encontrar dificuldades.





Nota histórica

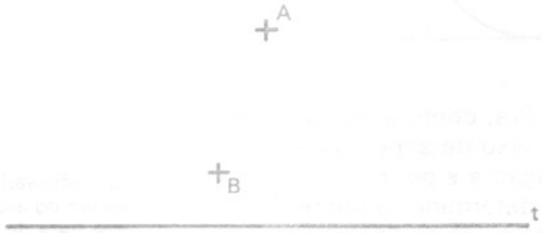
Alguns dos problemas de tangência que aqui serão estudados enquadram-se na categoria de **problema de Apolônio**, o qual se enuncia assim:

"Dados três elementos, podendo cada um deles ser um ponto, uma reta ou uma circunferência, construir uma circunferência que seja tangente a esses três elementos". (Onde tangência a um ponto significa passar pelo ponto.)

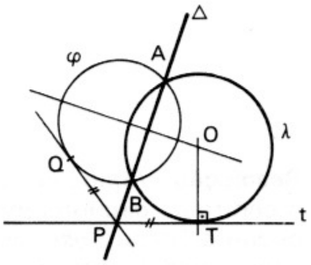
Apolônio de Perga (aproximadamente 262 a 194 a.C.), e não Euclides, foi quem recebeu o título de "O grande geômetra". Isso já dá uma noção da dimensão dos estudos que realizou.

pt 1

Dados dois pontos A e B e uma reta **t**, construir uma circunferência tangente à reta **t** e que passa pelos pontos A e B.



Suposto resolvido



Resolução: De início, note que o problema pode ser "traduzido" para a seguinte forma:

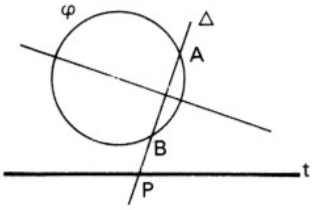
De um feixe de circunferências secantes nos pontos de base A e B, construir uma que seja tangente à reta t.

Vamos imaginar o problema já resolvido. Sejam φ uma circunferência qualquer do feixe e P o ponto de intersecção do eixo radical do feixe com **t**. Ora, como P é eqüipotente em relação a todas as circunferências do feixe, o segmento PQ, da tangente conduzida a φ, é congruente ao segmento PT, onde T é o ponto em que a circunferência λ procurada tangencia a reta T. Daí, a seguinte construção se justifica:

1.º) Traça-se uma circunferência φ qualquer do feixe e, por A e B, o eixo radical do mesmo, determinando P em **t**.

Evolução do traçado

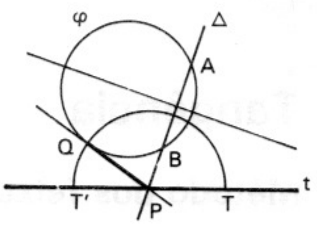
1.º passo



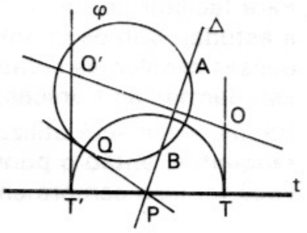
2.º) Traça-se $\overline{PQ}$ tangente a φ e, com raio $\overline{PQ}$ e centro em P, traça-se a circunferência que determina T e T′ na reta **t**.

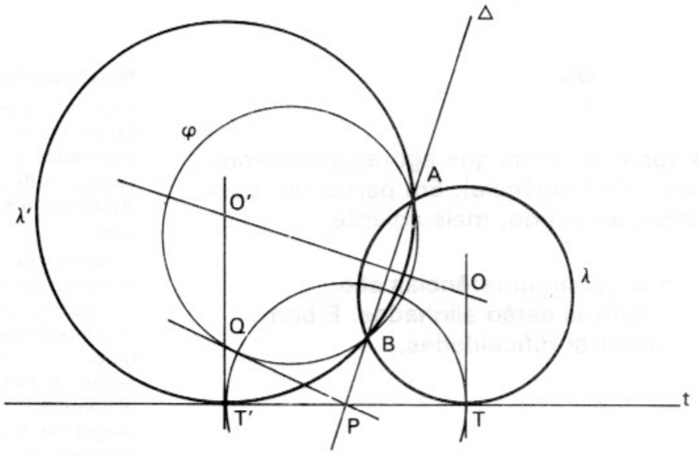
3.º) Por T e T′ levantam-se as perpendiculares à reta **t** determinando os centros O e O′ das circunferências procuradas na mediatriz de $\overline{AB}$.

2.º passo



3.º passo

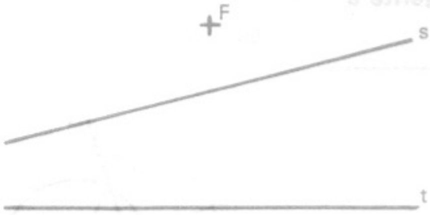




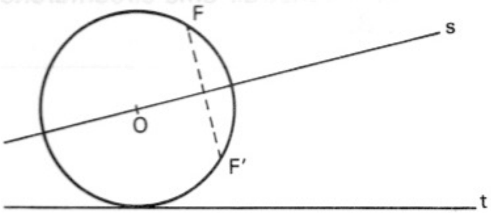
Observação: Como se vê, o problema admitiu duas soluções. Porém, ele poderia ter uma só, caso o ponto B dado (ou A) estivesse sobre a reta **t**, e nenhuma, se A e B estivessem sobre a reta **t** ou em lados opostos da mesma.

pt 2

Dados um ponto F, uma reta **s** e uma reta **t**, construir uma circunferência que tem centro em **s**, passa por F e tangencia **t**.



Suposto resolvido

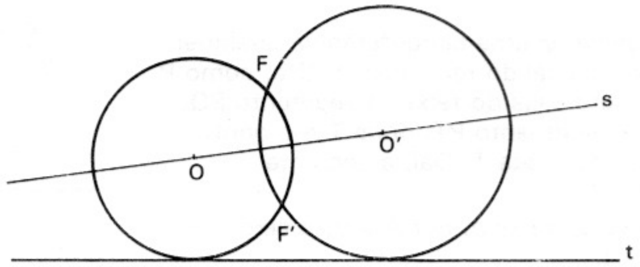


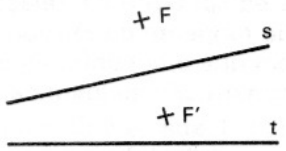
Resolução: Vamos imaginar o problema já resolvido. Ora, como a reta **s** contém o centro da circunferência procurada, essa reta é um eixo de simetria da circunferência. Desse modo, o simétrico de F em relação a **s** pertence à circunferência. Mas se F e **s** são dados, então é fácil determinar o ponto F′, simétrico de F em relação a **s**. Logo, o problema passa a ser o seguinte:

Se necessário, faça uma leitura do início do capítulo que trata da **Simetria** para revisar brevemente o assunto.

Dados dois pontos F e F′ e uma reta t**, construir uma circunferência tangente à reta** t **e que passa por F e F′.**
Isto é, determinando F′, o problema recai no **pt 1**.

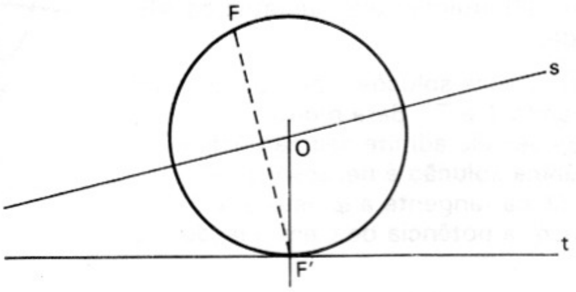
Determina-se F′, simétrico de F em relação a **s**, e daí para frente o problema é o **pt 1**.





Observação: O **pt 2**, como veremos adiante, equivale a determinar o ponto de intersecção de uma reta com uma parábola. A partir dele será estabelecida uma importante propriedade. Por enquanto, deixemos o seguinte registro:

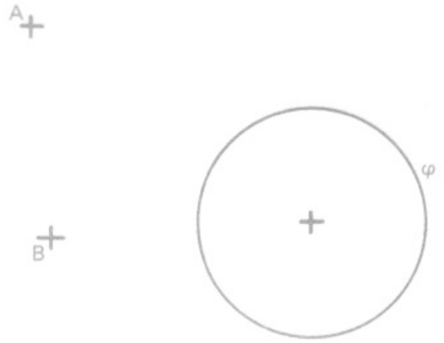
IMPORTANTE: O problema admitirá uma única solução quando F′ cair na reta t.



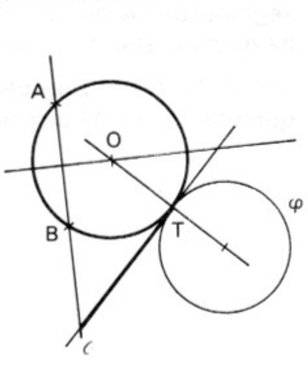
Resolva os exercícios 115 e 116 do caderno de atividades.

pt 3

São dados dois pontos A e B e uma circunferência φ. Construir uma circunferência λ que passe pelos pontos A e B e tangencia a circunferência φ.

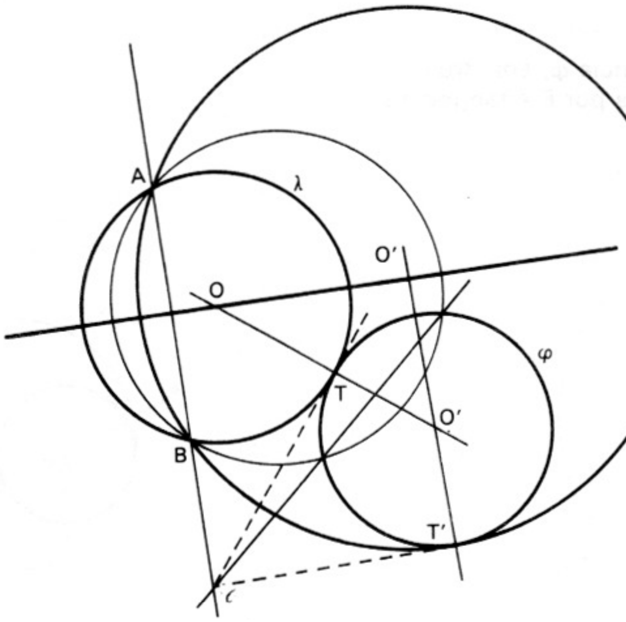


Suposto resolvido



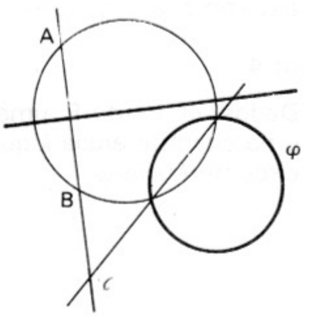
Resolução: De início, note-se que o problema pode ser "traduzido" da seguinte maneira.

De um feixe de circunferências secantes nos pontos de base A e B, construir uma que seja tangente à circunferência φ.

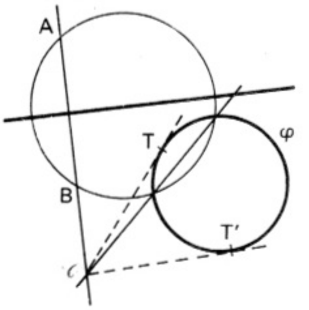


Evolução do traçado

1.º passo



2.º passo



Tangência: método dos feixes de circunferências

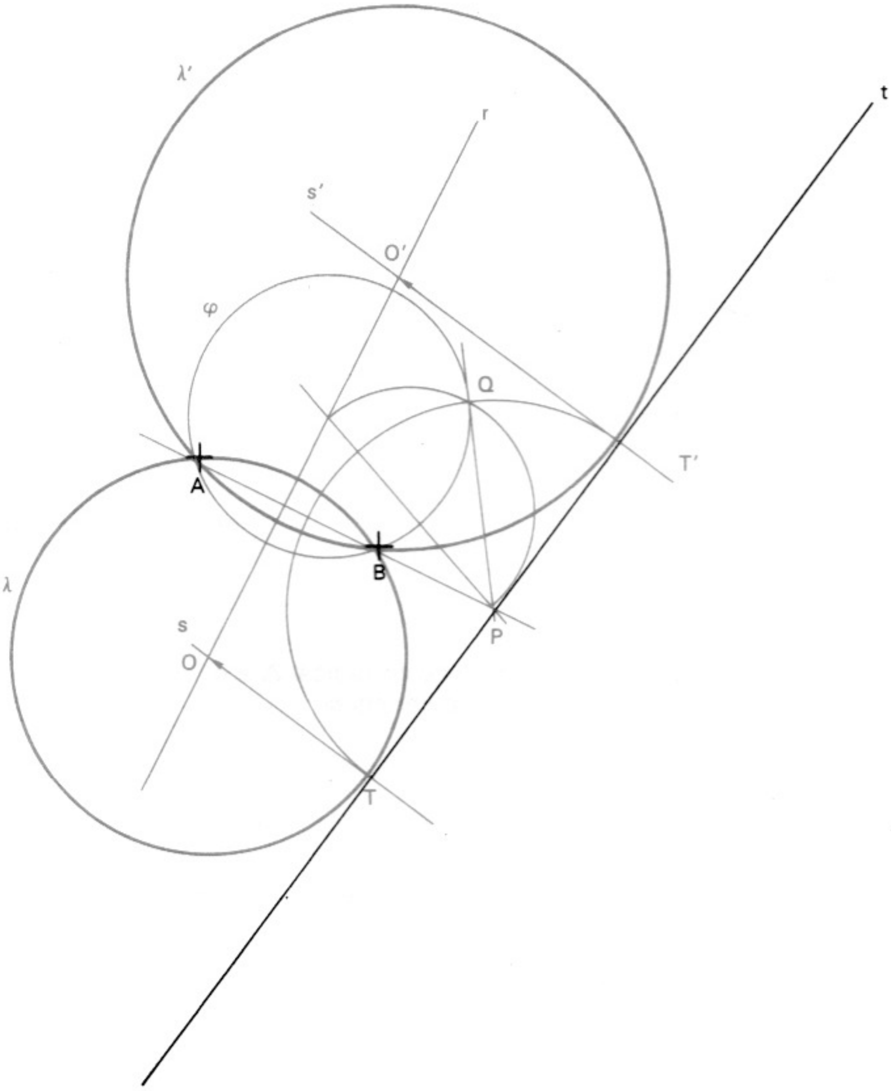
Figura auxiliar e anotações

115 Construa uma circunferência que passe pelos pontos A e B e tangencie a reta **t**.

Observação: É o pt 1.

Observação:
Insista que o problema pode ser interpretado da seguinte forma:
"De um feixe de circunferências secantes nos pontos A e B, construa uma que seja tangente à reta **t**."

Sugestão:
Proponha um problema análogo a este, em que B pertença à reta **t**, para que o aluno perceba que, nesse caso, ele admite solução única.



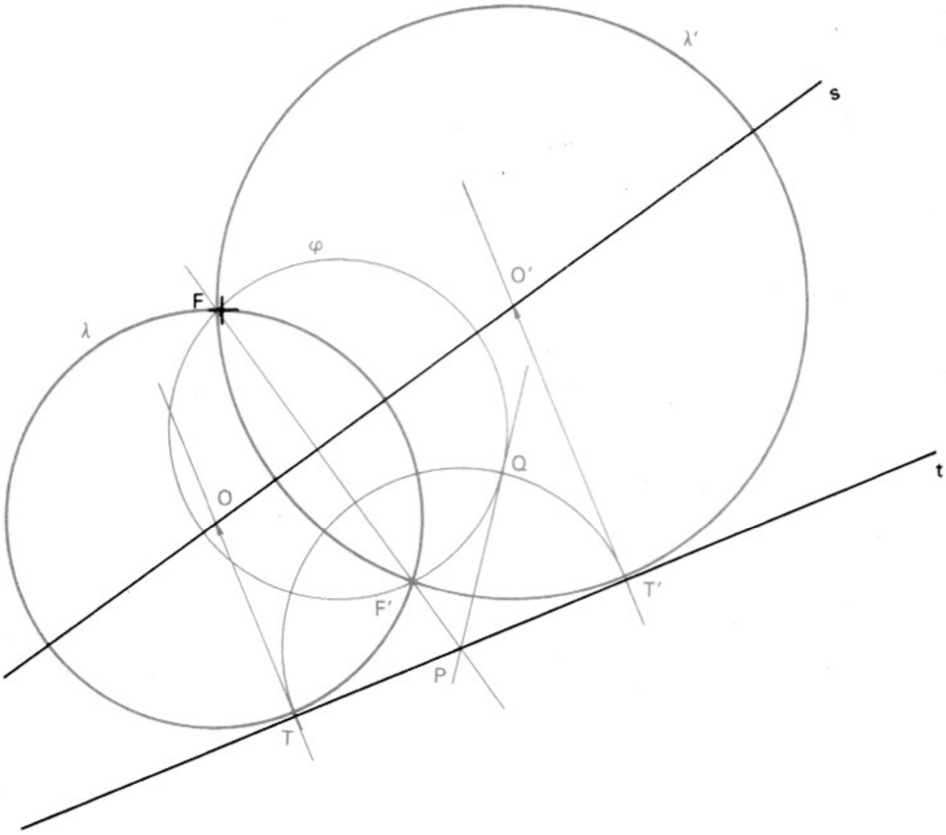
1.º) **r**, mediatriz de $\overline{AB}$.
2.º) φ arbitrária, passando por A e B.
3.º) Reta AB, determinando P em **t**.
4.º) Q, ponto em que uma reta conduzida por P tangencia φ.
5.º) Circunferência de centro P e raio PQ, determinando T e T' em **t**.
6.º) **s** e **s'**, determinando O e O'.

Tangência: método dos feixes de circunferências

Figura auxiliar e anotações

116 Construa uma circunferência com centro pertencente à reta **s**, que passe pelo ponto F e tangencie a reta **t**.
Observação: É o pt 2.

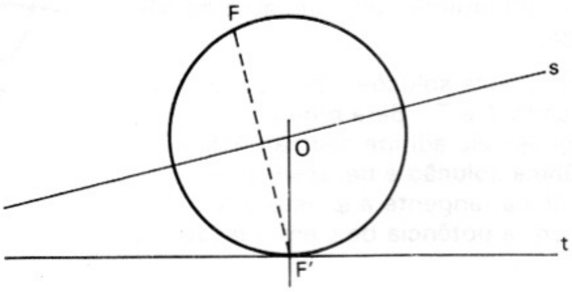
Observação:
Insista que, se F′ cair em **t**, o problema admitirá uma única solução.



Determinando F′, simétrico de F em relação a **s**, recai-se no problema anterior.

Observação: O **pt 2**, como veremos adiante, equivale a determinar o ponto de intersecção de uma reta com uma parábola. A partir dele será estabelecida uma importante propriedade. Por enquanto, deixemos o seguinte registro:

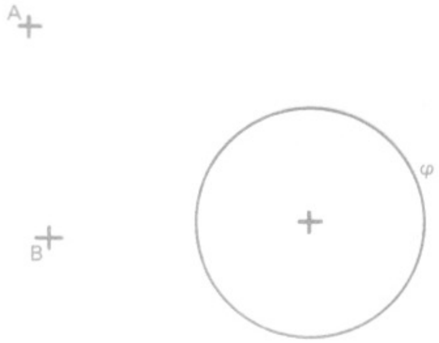
IMPORTANTE: O problema admitirá uma única solução quando F′ cair na reta t.



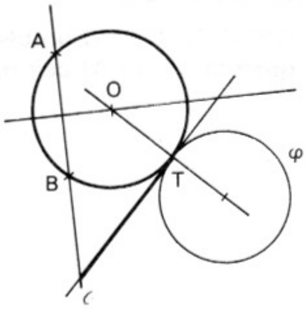
Resolva os exercícios 115 e 116 do caderno de atividades.

pt 3

São dados dois pontos A e B e uma circunferência φ. Construir uma circunferência λ que passe pelos pontos A e B e tangencia a circunferência φ.

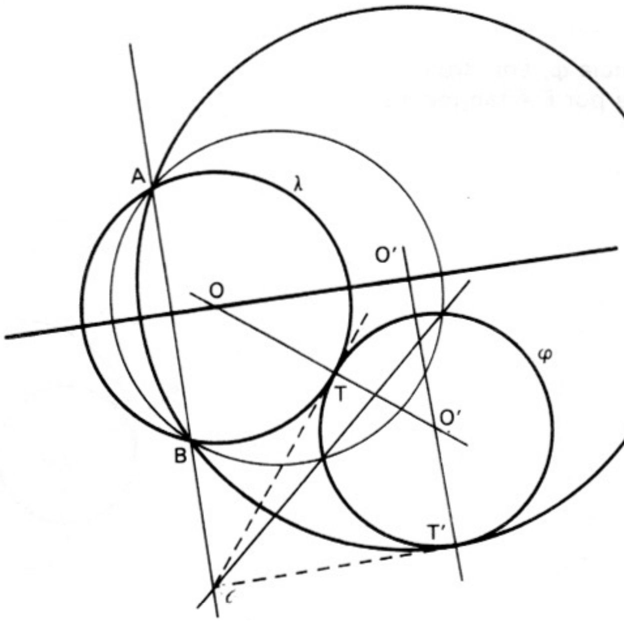


Suposto resolvido



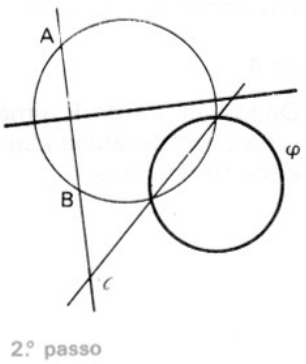
Resolução: De início, note-se que o problema pode ser ''traduzido'' da seguinte maneira.

De um feixe de circunferências secantes nos pontos de base A e B, construir uma que seja tangente à circunferência φ.

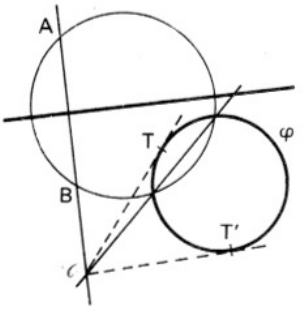


Evolução do traçado

1.º passo

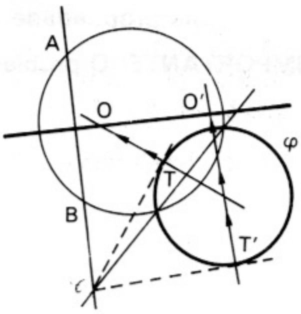


2.º passo



Observe a figura onde já se imagina o problema resolvido. Determinando o centro radical $\mathscr{C}$ da circunferência φ com o feixe, pode-se obter, em seguida, o ponto T onde a circunferência procurada tangencia φ, pois esse ponto é também aquele em que a reta tangente a φ, conduzida por $\mathscr{C}$, a tangencia. (Note que se $\mathscr{C}$ é externo a φ, por esse ponto podem-se traçar duas tangentes a φ, isto é, podem-se obter dois pontos de tangência, T e T'.) Finalmente, a reta conduzida pelo centro de φ e pelo ponto T (ou T') intercepta a mediatriz de $\overline{AB}$ no centro da circunferência λ (ou λ') procurada.

3.º passo



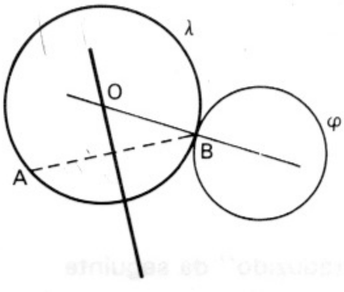
Observação: Com os dados, o problema admitiu duas soluções, porque de $\mathscr{C}$ foi possível traçar duas tangentes a φ, determinando T e T'. Será muito importante, mais adiante, saber em que condições ele admite solução única. Pois bem, **para que o problema admita uma única solução** é necessário (e suficiente) que de $\mathscr{C}$ seja possível traçar uma única tangente a φ, isto é, **é necessário que $\mathscr{C}$ caia sobre** φ. Mas, nesse caso, a potência de $\mathscr{C}$ em relação a φ será nula e, então, teremos:

$$\text{Pot}_{\varphi}^{\mathscr{C}} = 0 \quad \text{e} \quad \text{Pot}_{\varphi}^{\mathscr{C}} = \mathscr{C}T^2 = \mathscr{C}A \times \mathscr{C}B$$

Assim, $\boxed{\mathscr{C}A \times \mathscr{C}B = 0}$

Ora, para que este último produto seja nulo, é necessário que um dos segmentos $\mathscr{C}A$ ou $\mathscr{C}B$ seja nulo, isto é, B (ou A) deve coincidir com $\mathscr{C}$. Como $\mathscr{C}$ deve estar sobre φ, conclui-se que B (ou A) deve cair em φ. Em resumo:

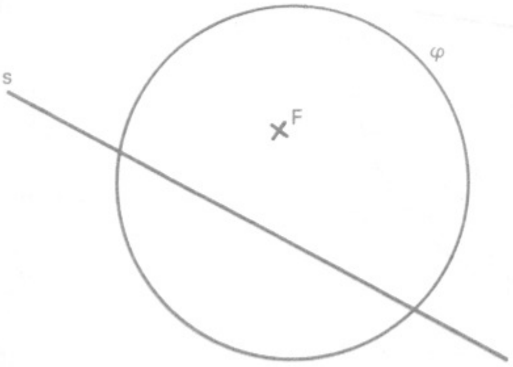
IMPORTANTE: **O problema admitirá uma única solução quando, e somente quando**, B (ou A) **cair na circunferência** φ.



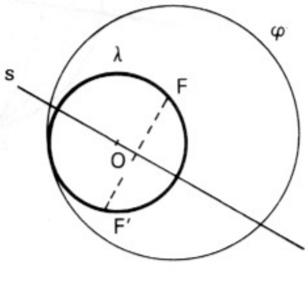
Evidentemente, se entre os pontos A e B dados, um for interno e o outro externo a φ, o problema não admitirá solução.

pt 4

Dados um ponto F, uma reta **s** e uma circunferência φ, construir uma circunferência λ que tem centro em **s**, passa por F e tangencia a circunferência φ.



Suposto resolvido

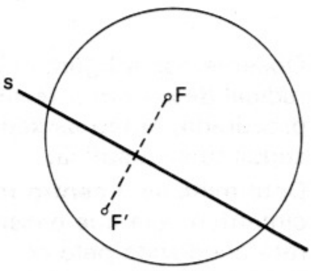


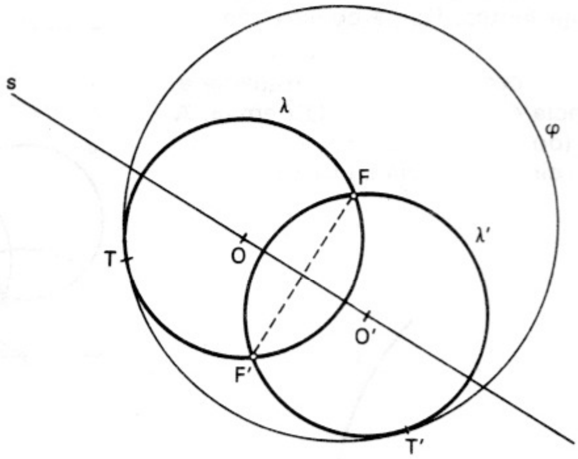
Resolução: Na figura onde já se supõe o problema resolvido, conclui-se que o ponto F′, simétrico de F em relação a **s**, também pertence à circunferência λ procurada. Ora, como podemos facilmente determinar F′, o problema se reduz ao seguinte:

Dados dois pontos F e F′ e uma circunferência φ, construir uma circunferência que passa por F e F′ e tangencia a circunferência φ.

Isto é, determinando F′ o problema recai no **pt 3**.

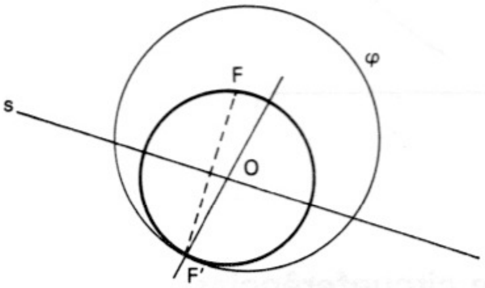
Determina-se F′, simétrico de F em relação a **s**, e daí em diante o problema é o **pt 3**.





Observação: Veremos, mais adiante, que o **pt 4** equivale a determinar os pontos de intersecção de uma reta com uma elipse (ou hipérbole se F e F′ forem externos a φ). Em vista do que se concluiu no **pt 3**, novamente vamos deixar aqui um registro.

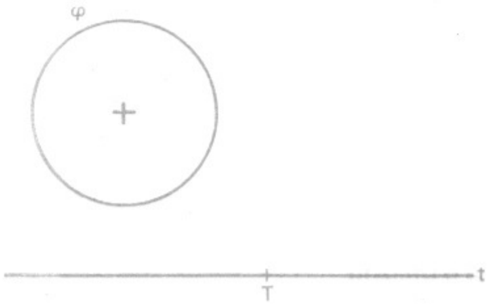
IMPORTANTE: O problema admitirá solução única quando, e somente quando, F′ (ou F) cair na circunferência φ.

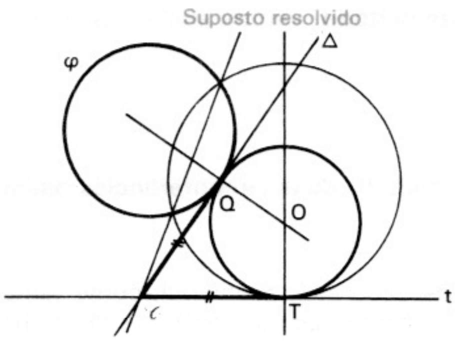


Resolva os exercícios de 117 a 119 do caderno de atividades.

pt 5

São dados uma circunferência φ, uma reta t e um ponto T sobre a reta t. Construir uma circunferência que seja tangente à circunferência φ e à reta t no ponto T.



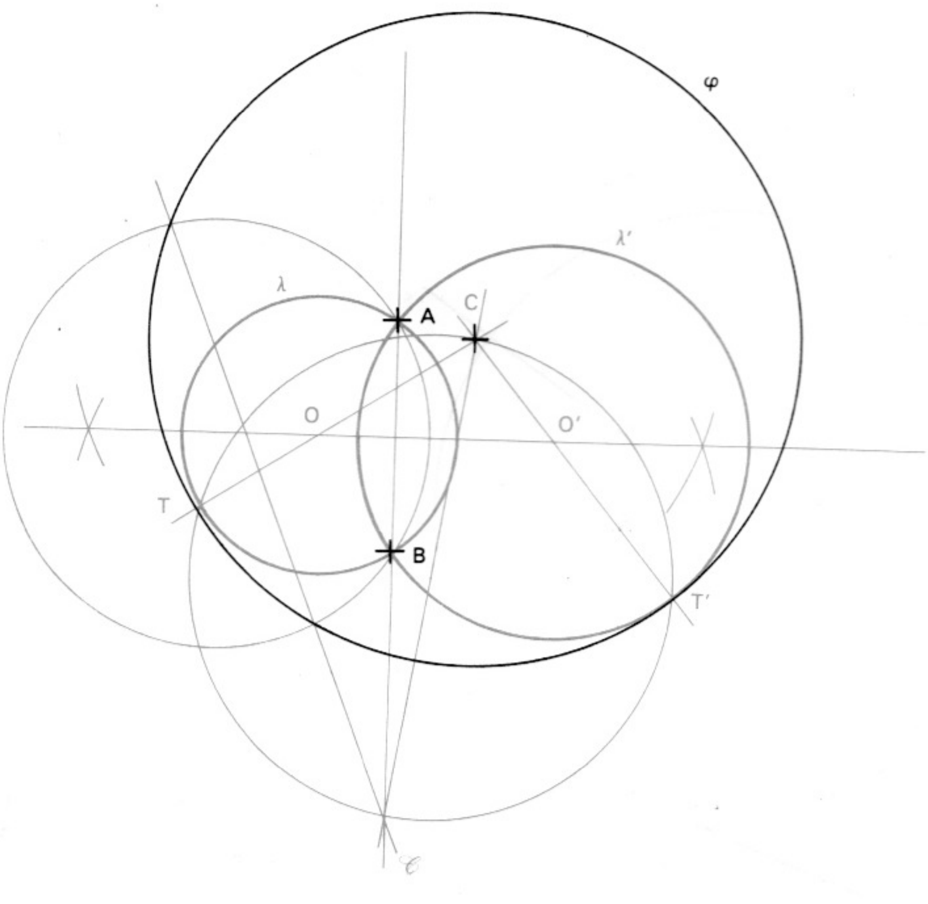


Tangência: método dos feixes de circunferências

Figura auxiliar e anotações

117 São dados uma circunferência φ e dois pontos A e B. Construa uma circunferência que passe por A e B e tangencie a circunferência φ.

Observação: É o pt 3. Embora no livro-texto os pontos A e B dados sejam externos à circunferência φ, enquanto aqui são internos, esse fato não altera em nada a resolução.

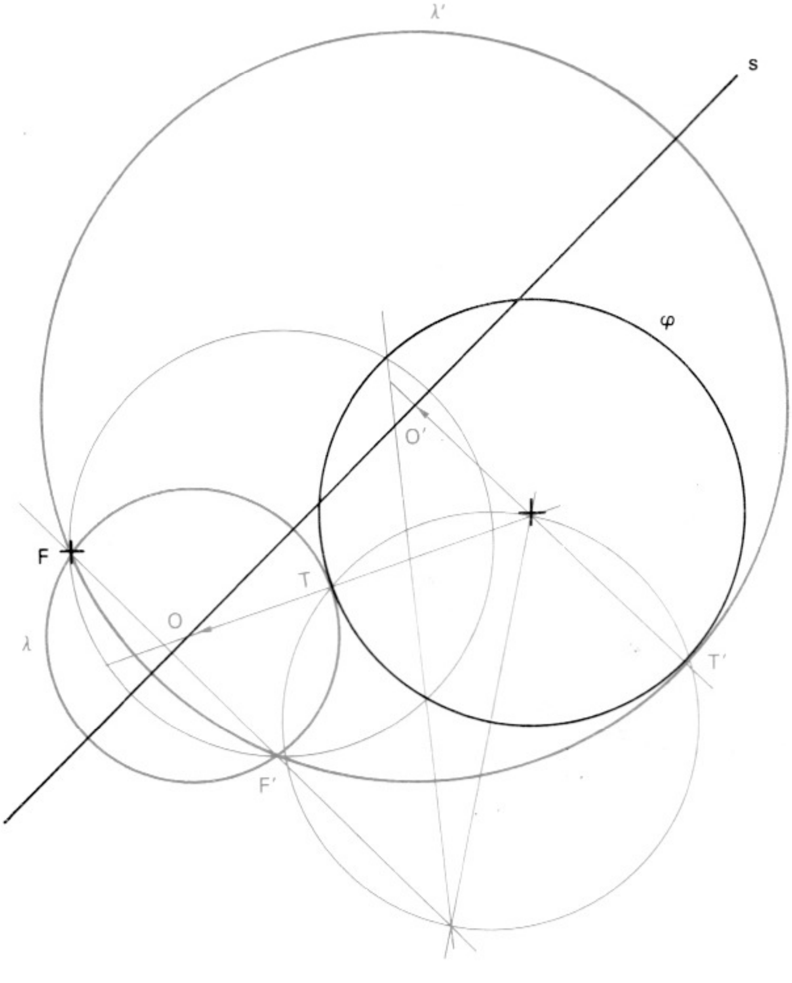


1.º) $\mathscr{C}$, centro radical de φ com o feixe de circunferências secantes em A e B.
2.º) T e T', pontos em que as retas conduzidas por $\mathscr{C}$ tangenciam φ.
3.º) Retas CT e CT', determinando O e O' na mediatriz de $\overline{AB}$.

Tangência: método dos feixes de circunferências

Figura auxiliar e anotações

118 São dados um ponto F, uma reta **s** e uma circunferência φ. Construa uma circunferência que tenha centro em **s**, passe por F e tangencie φ.
Observação: É o pt 4.

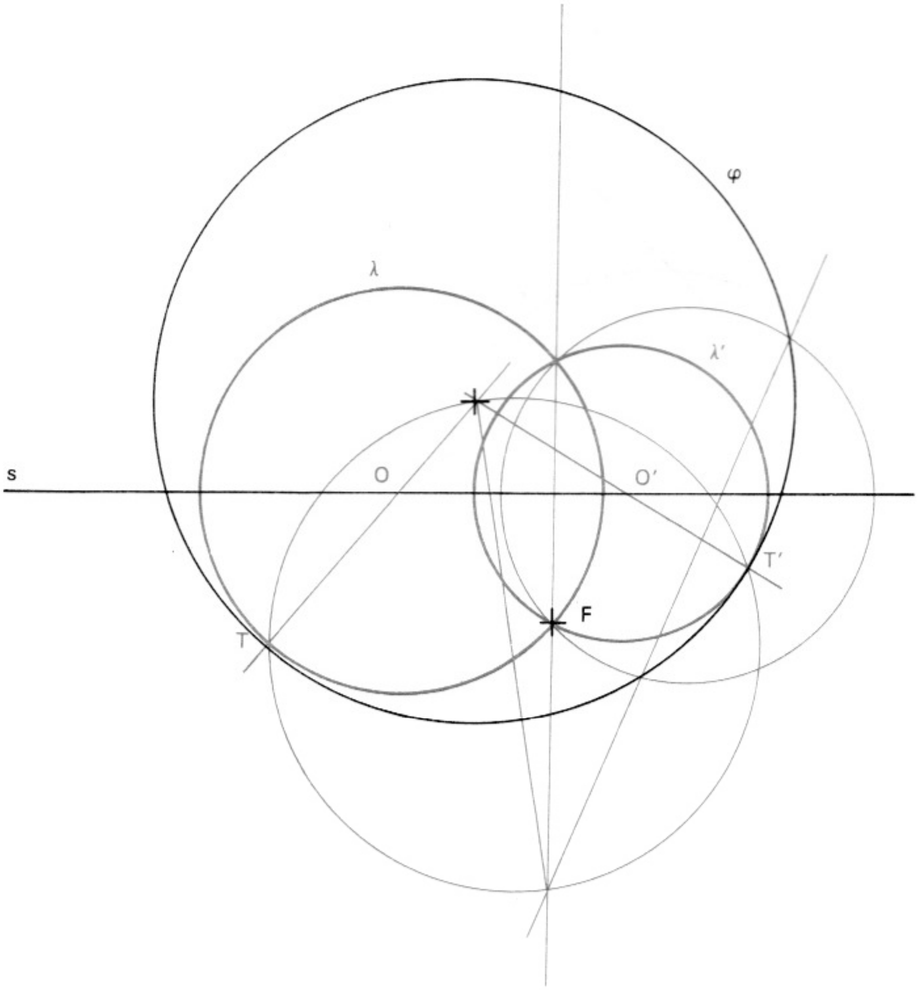


Após a determinação de F', simétrico de F em relação a **s**, o problema recai no anterior.

Tangência: método dos feixes de circunferências

Figura auxiliar e anotações

119 São dados um ponto F, uma reta **s** e uma circunferência φ. Construa uma circunferência que tenha centro em **s**, passe por F e tangencie φ.

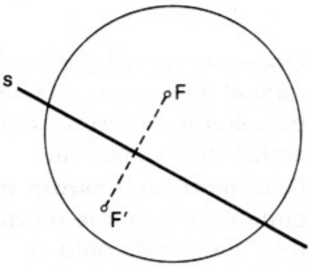


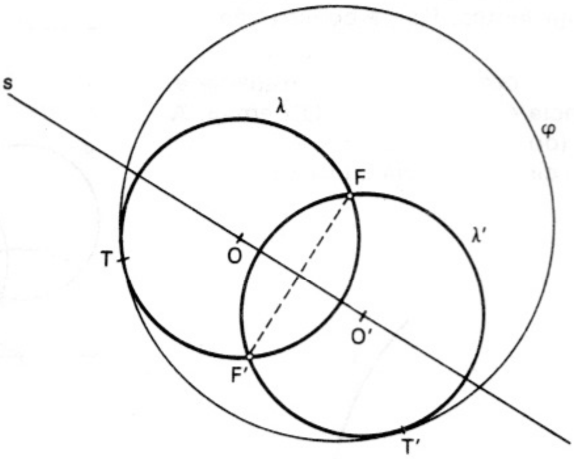
Resolução: Na figura onde já se supõe o problema resolvido, conclui-se que o ponto F′, simétrico de F em relação a **s**, também pertence à circunferência λ procurada. Ora, como podemos facilmente determinar F′, o problema se reduz ao seguinte:

Dados dois pontos F e F′ e uma circunferência φ, construir uma circunferência que passa por F e F′ e tangencia a circunferência φ.

Isto é, determinando F′ o problema recai no **pt 3**.

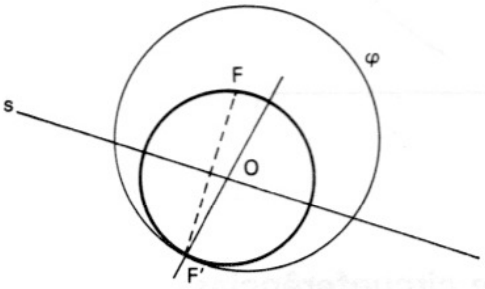
Determina-se F′, simétrico de F em relação a **s**, e daí em diante o problema é o **pt 3**.





Observação: Veremos, mais adiante, que o **pt 4** equivale a determinar os pontos de intersecção de uma reta com uma elipse (ou hipérbole se F e F′ forem externos a φ). Em vista do que se concluiu no **pt 3**, novamente vamos deixar aqui um registro.

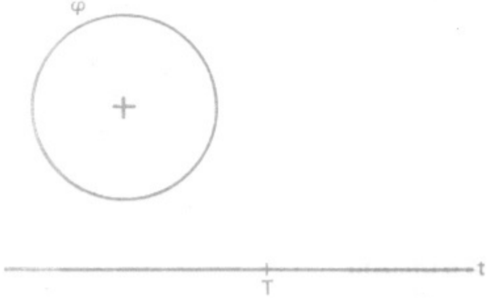
IMPORTANTE: O problema admitirá solução única quando, e somente quando, F′ (ou F) cair na circunferência φ.

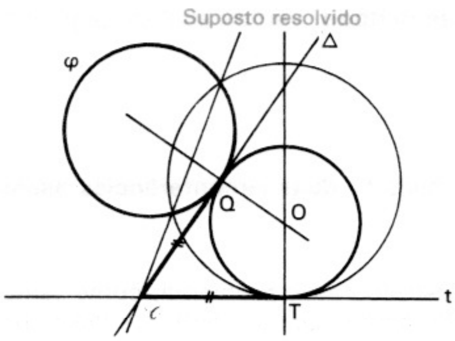


Resolva os exercícios de 117 a 119 do caderno de atividades.

pt 5

São dados uma circunferência φ, uma reta **t** e um ponto T sobre a reta **t**. Construir uma circunferência que seja tangente à circunferência φ e à reta **t** no ponto T.



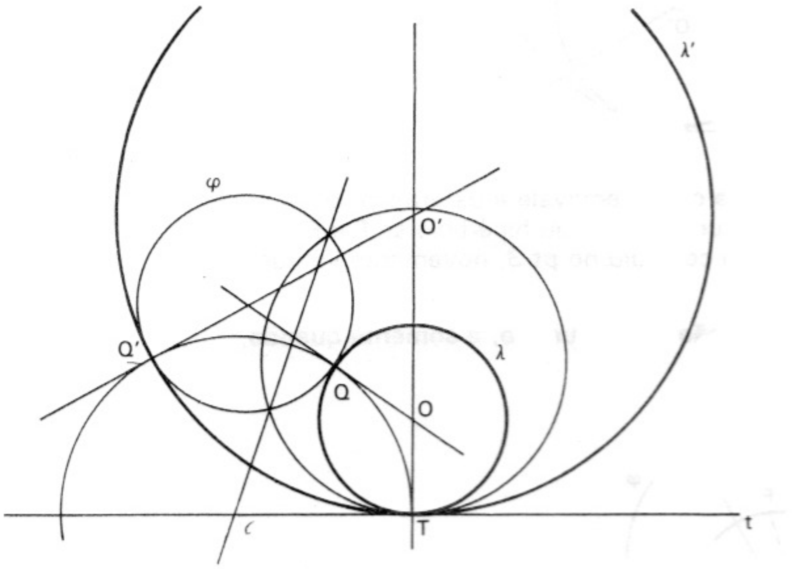


Resolução: Como primeira providência, vamos "traduzir" o problema para o seguinte:

De um feixe de circunferências tangentes no ponto T **e de eixo radical** t**, construir uma que tangencie a circunferência** φ.

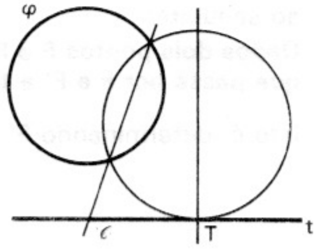
Observemos a figura onde já se imagina o problema resolvido. Sendo $\mathscr{C}$ o centro radical de φ com o feixe e Q o ponto de tangência de φ com a circunferência procurada, então os segmentos $\mathscr{C}$T e $\mathscr{C}$Q são congruentes. Daí, a construção seguinte se justifica.

Determina-se o centro radical $\mathscr{C}$ de φ com o feixe, e com centro em $\mathscr{C}$ traça-se a circunferência que passa por T. Essa circunferência determina Q (e Q') em φ. A reta conduzida pelo centro de φ e pelo ponto Q (ou Q') encontra a perpendicular a **t**, conduzida por T, no centro da circunferência λ (ou λ') procurada.

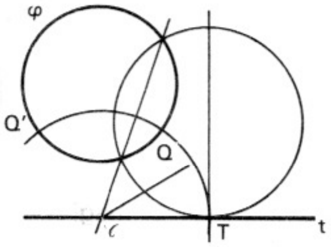


Evolução do traçado

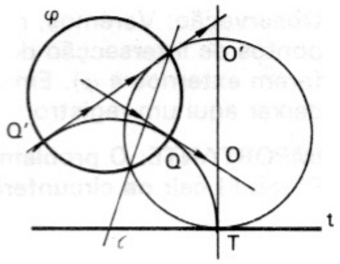
1.º passo



2.º passo



3.º passo



O método da dilatação e contração de circunferências

Resolva os exercícios 120 e 121 do caderno de atividades.

O método que passaremos a estudar, como você verá, é eficiente, pois permite que um dado problema recaia em outro já conhecido, ou mais simples. Ele se aplica, fundamentalmente, em problemas de tangência entre retas e circunferências ou, apenas, entre circunferências. Na sua essência, o método consiste em substituir, num problema, a condição "**ser tangente a uma circunferência dada**", pela condição "**passar por um ponto dado**".

Para melhor compreender esse método, vamos analisar alguns exemplos de aplicação.

Exemplo 1

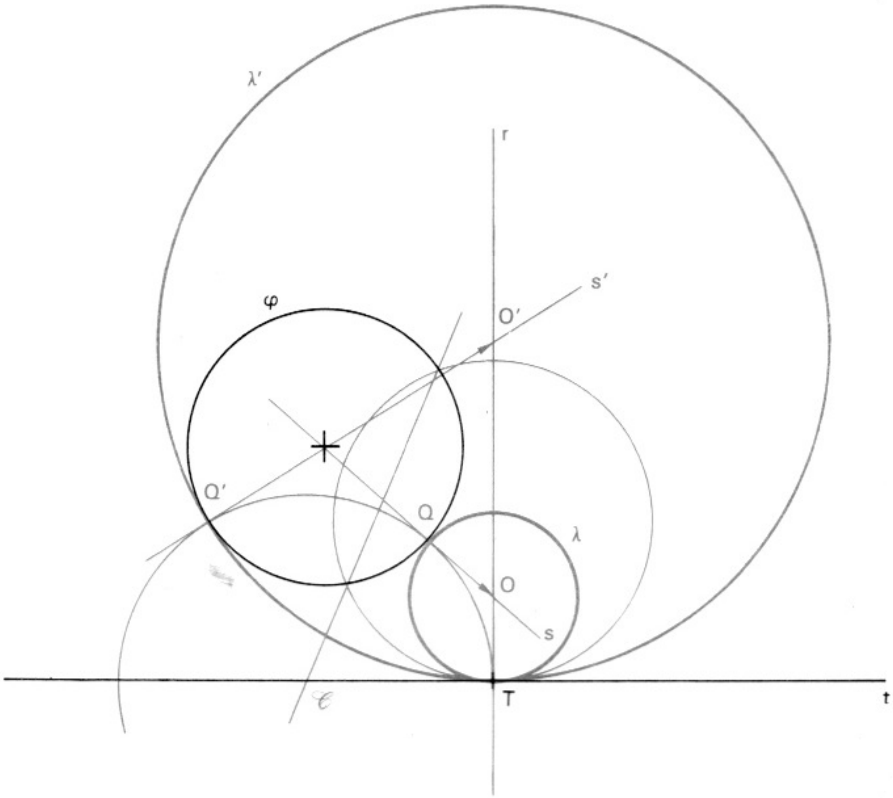
Traçar as retas tangentes comuns às duas circunferências dadas.

Observação: Você não só já estudou esse problema, como também já o utilizou algumas vezes. Porém, não lhe demos ainda o enfoque desse novo método.

Tangência: método dos feixes de circunferências

120 Construa uma circunferência tangente à circunferência φ e à reta **t** no ponto T.

Observação: É o pt 5.



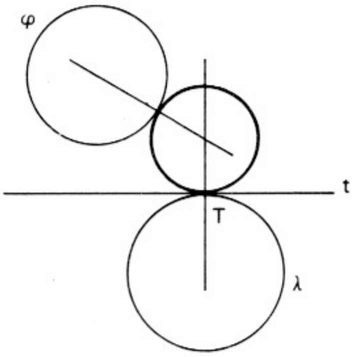
1.º) $\mathcal{C}$, centro radical de φ com o feixe de circunferências tangentes em T.
2.º) Circunferência de centro $\mathcal{C}$ e raio $\mathcal{C}$T, determinando Q e Q' em φ.
3.º) **s** e **s'**, determinando O e O' em **r**.

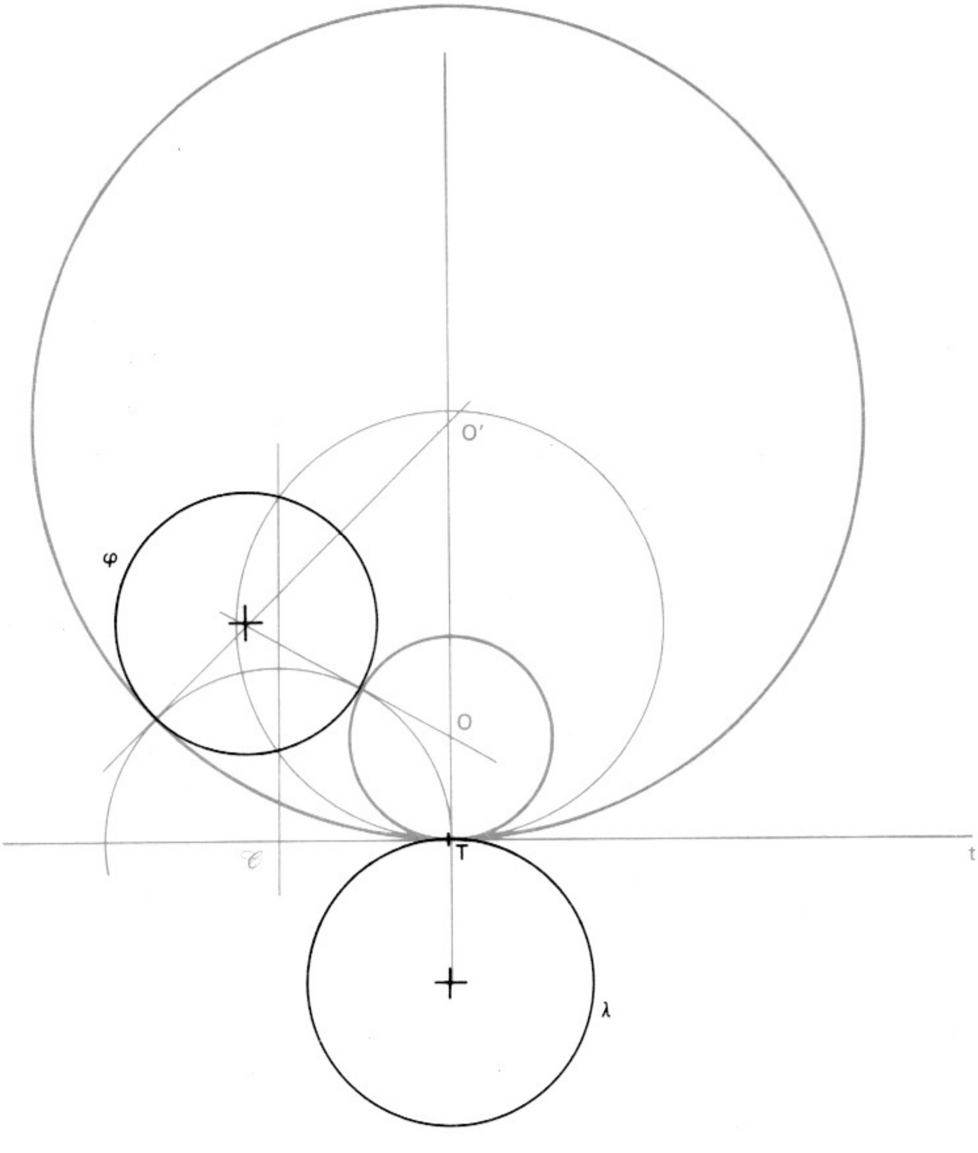
Tangência: método dos feixes de circunferências

Figura auxiliar e anotações

121 São dadas duas circunferências λ e φ, e um ponto T sobre λ. Construa uma circunferência tangente às duas circunferências dadas, sendo T o ponto em que ela tangencia λ.

Sugestão: Imagine o problema já resolvido e note que, traçando-se a reta **t** tangente a λ em T, você recai no pt 5.



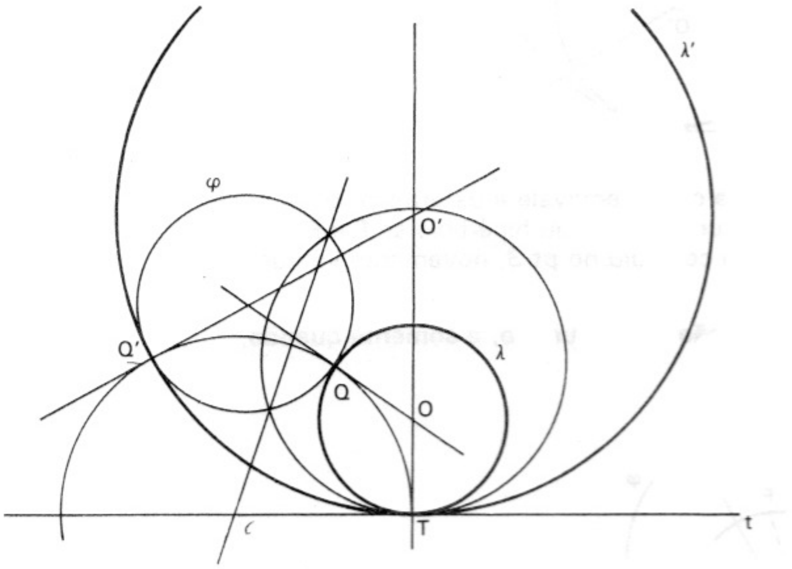


Resolução: Como primeira providência, vamos "traduzir" o problema para o seguinte:

De um feixe de circunferências tangentes no ponto T **e de eixo radical** t**, construir uma que tangencie a circunferência** φ.

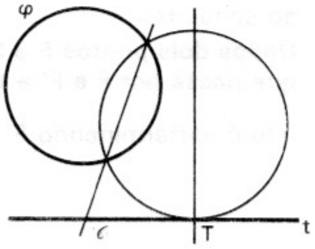
Observemos a figura onde já se imagina o problema resolvido. Sendo $\mathscr{C}$ o centro radical de φ com o feixe e Q o ponto de tangência de φ com a circunferência procurada, então os segmentos $\mathscr{C}$T e $\mathscr{C}$Q são congruentes. Daí, a construção seguinte se justifica.

Determina-se o centro radical $\mathscr{C}$ de φ com o feixe, e com centro em $\mathscr{C}$ traça-se a circunferência que passa por T. Essa circunferência determina Q (e Q') em φ. A reta conduzida pelo centro de φ e pelo ponto Q (ou Q') encontra a perpendicular a **t**, conduzida por T, no centro da circunferência λ (ou λ') procurada.

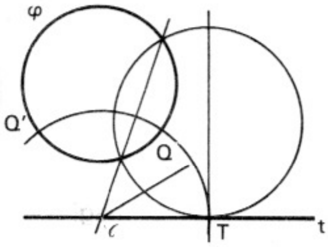


Evolução do traçado

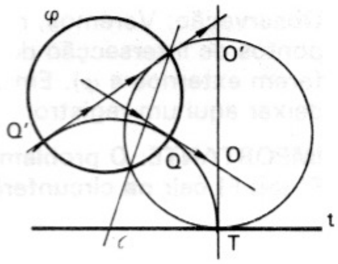
1.º passo



2.º passo



3.º passo



O método da dilatação e contração de circunferências

O método que passaremos a estudar, como você verá, é eficiente, pois permite que um dado problema recaia em outro já conhecido, ou mais simples. Ele se aplica, fundamentalmente, em problemas de tangência entre retas e circunferências ou, apenas, entre circunferências. Na sua essência, o método consiste em substituir, num problema, a condição "**ser tangente a uma circunferência dada**", pela condição "**passar por um ponto dado**".

Para melhor compreender esse método, vamos analisar alguns exemplos de aplicação.

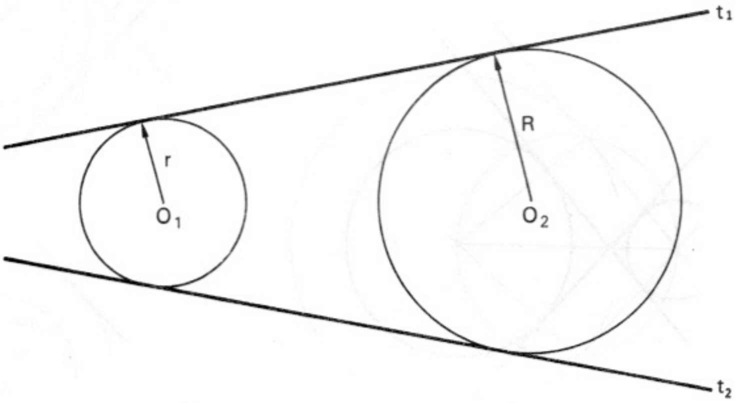
Resolva os exercícios 120 e 121 do caderno de atividades.

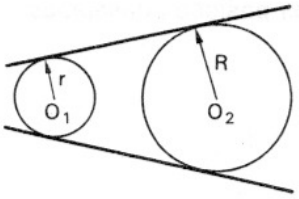
Exemplo 1

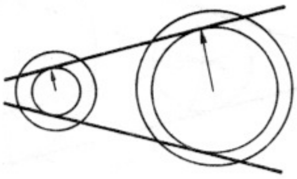
Traçar as retas tangentes comuns às duas circunferências dadas.

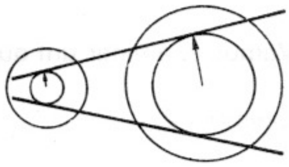
Observação: Você não só já estudou esse problema, como também já o utilizou algumas vezes. Porém, não lhe demos ainda o enfoque desse novo método.

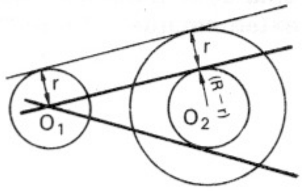
Resolução: Vamos analisar, primeiro, o caso das tangentes externas. Suponhamos, então, o problema já resolvido.







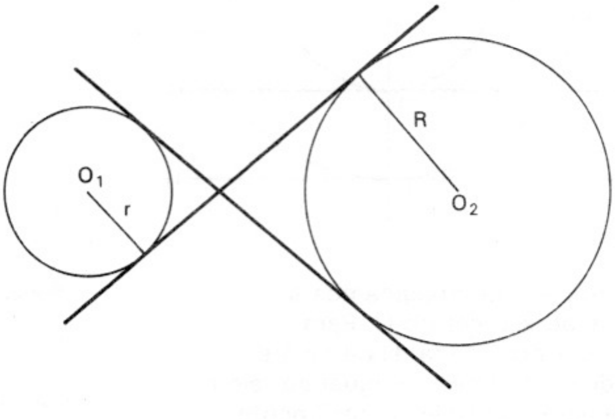




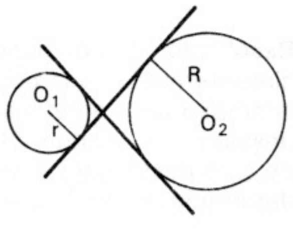
Agora, vamos imaginar que as circunferências sofram uma contração até que **a menor se reduza ao seu próprio centro**. A maior deverá acompanhar essa contração imaginária de modo a fazer com que as retas t_1 e t_2 mantenham-se tangentes às duas circunferências e, muito importante, **sem alterarem suas direções.** Isto é, as retas, durante as contrações das circunferências, devem acompanhar o movimento **mantendo-se paralelas às posições originais** (mantendo-se tangentes às circunferências em contração). No final desse processo imaginário, as retas procuradas sofreram translações de amplitudes iguais ao raio **r** da circunferência menor, e a circunferência maior teve o seu raio reduzido a R − r. Então, o problema passou a ser:

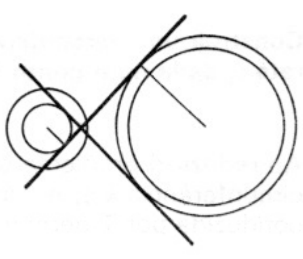
Construir as retas que passam pelo ponto O_1 e tangenciam a circunferência de centro O_2 e raio R − r.

Passemos ao caso das tangentes internas e vamos supor o problema já resolvido.



Note que a condição "**ser tangente à circunferência de centro O_1**" foi substituída pela condição "**passar pelo ponto O_1**".

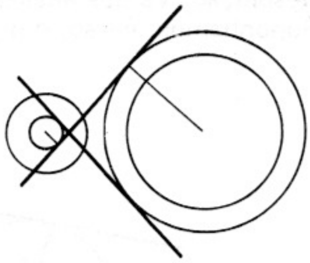


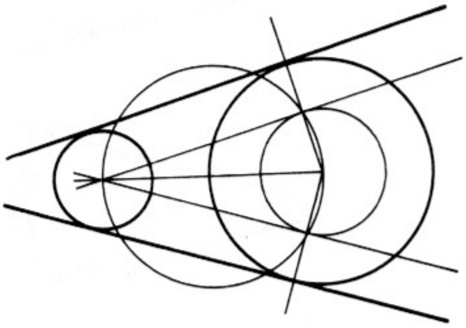


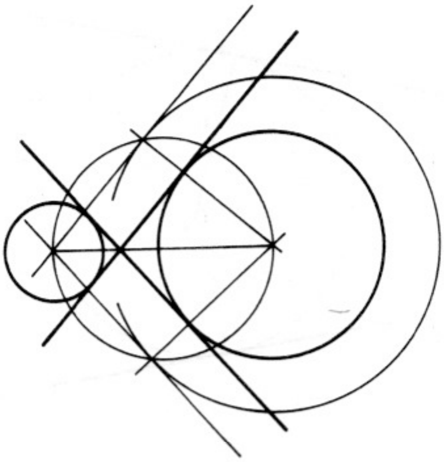
Então, imaginamos a circunferência menor se contraindo até reduzir-se ao seu centro. Agora, para que as retas tangentes mantenham-se paralelas às suas posições originais, é necessário que a circunferência maior sofra uma dilatação, até que, ao final do processo, ela tenha o seu raio aumentado de R para R + r. As retas sofreram translações de amplitudes iguais a **r**. Assim, o problema passou a ser:

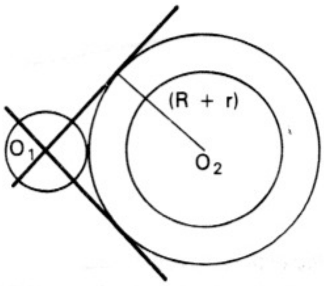
Construir as retas que passam pelo ponto O_1 e tangenciam a circunferência de centro O_2 e raio R + r.

Tanto no caso das tangentes externas, quanto no das internas, resolvemos os problemas aos quais eles foram reduzidos e, por translação, levamos as retas às posições desejadas.







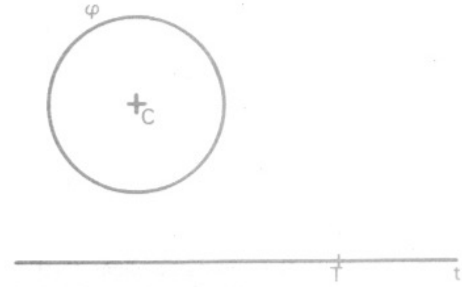


Vamos examinar um outro problema em que o método se aplica.

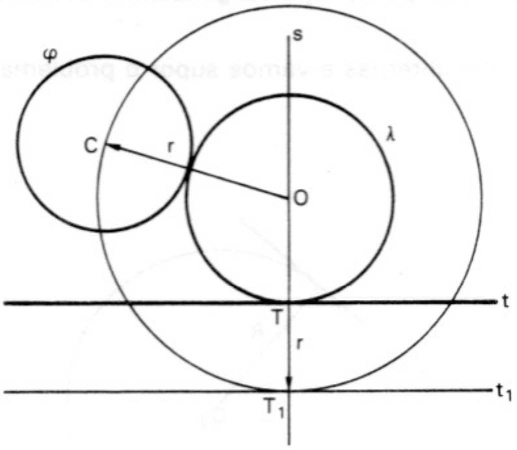
Exemplo 2

São dados uma reta t**, um ponto** T **sobre ela e uma circunferência** φ**. Construir uma circunferência** λ **que seja tangente à reta** t **no ponto** T **e que tangencie externamente a circunferência** φ**.**

Esse problema é o **pt 5**.



Suposto resolvido



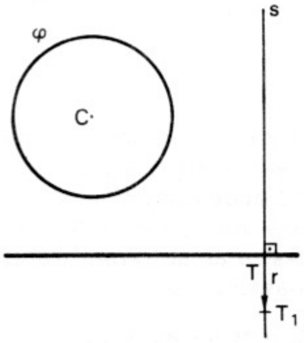
Resolução: Vamos supor o problema já resolvido. Agora, imaginamos a circunferência dada contraindo-se até reduzir-se ao seu centro C. Para acompanhar o movimento de φ, a circunferência λ procurada dilata-se até passar por C, enquanto a reta **t** translada-se, de uma amplitude igual ao raio **r** de φ, e passa para a posição t_1. O ponto T vai para a posição T_1 facilmente determinável. Assim, o problema se reduz ao seguinte:

Construir uma circunferência que passe por um ponto C **dado e tangencie uma reta** t_1 **dada num ponto** T_1 **dado.**

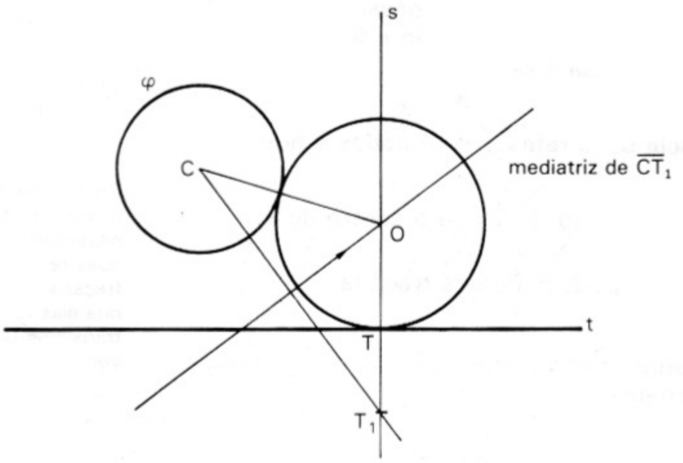
Ao reduzir o problema original a este último, podemos determinar o centro O da circunferência λ e, em seguida, traçá-la. Para isso, "traçamos" a reta **s**, conduzida por T perpendicularmente à reta **t**, e marcamos sobre **s** o ponto T_1.

Evolução do traçado

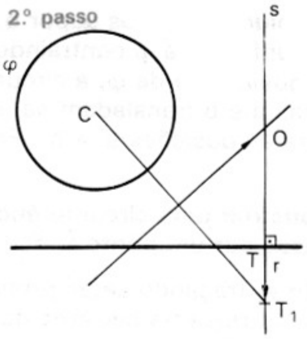
1.º passo



Então, determinamos O na intersecção de **s** com a mediatriz de $\overline{CT_1}$.



2.º passo



Observe que não houve a necessidade de traçar a reta t_1, mas, apenas, a de obter o ponto T_1.

Resumindo

Para aplicar o método da dilatação e contração, você deve ter em mente os seguintes preceitos:

1.º) Comece fazendo uma figura onde o problema já esteja supostamente resolvido.

2.º) Nessa figura, é sempre uma circunferência dada que você deve imaginar contraindo-se, até reduzir-se ao seu centro.

3.º) Se houver outras circunferências dadas no problema, é a de raio menor que se reduz a um ponto. As demais contraem-se ou dilatam-se para acompanhar o movimento do sistema, sem jamais alterarem seus centros.

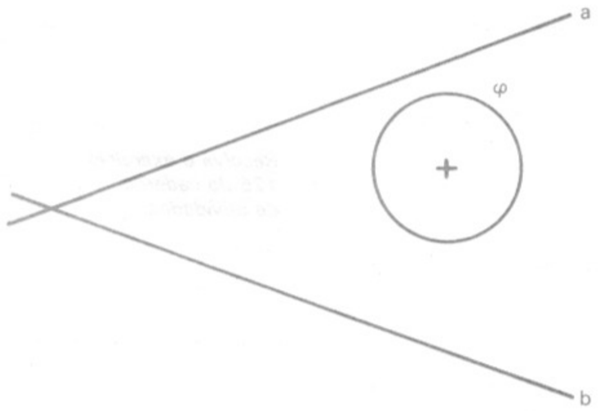
4.º) Se houver retas tangentes no problema, elas devem acompanhar o movimento das circunferências sempre através de translações, isto é, mantendo-se paralelas às posições originais.

De posse dessa técnica, pode-se resolver alguns novos problemas de tangência.

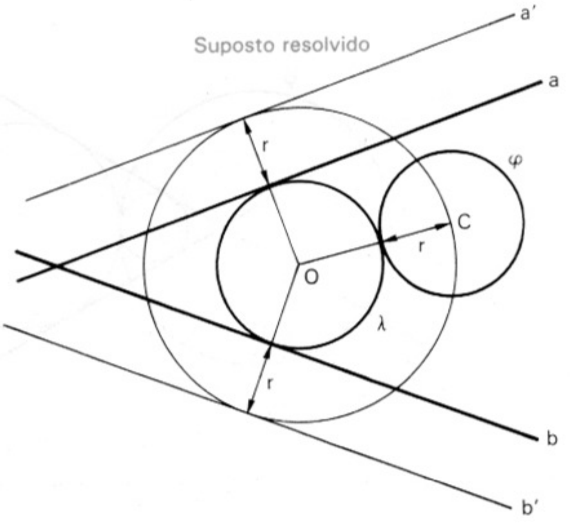
pt 6

São dadas duas retas **a** e **b** e uma circunferência φ. Construir uma circunferência λ que tangencie **a**, **b** e φ.

Resolva os exercícios de 122 a 125 do caderno de atividades.



Suposto resolvido



Tangência: método da dilatação e contração de circunferências

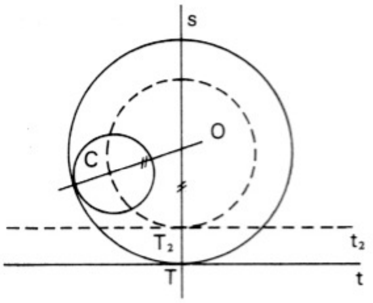
Figura auxiliar e anotações

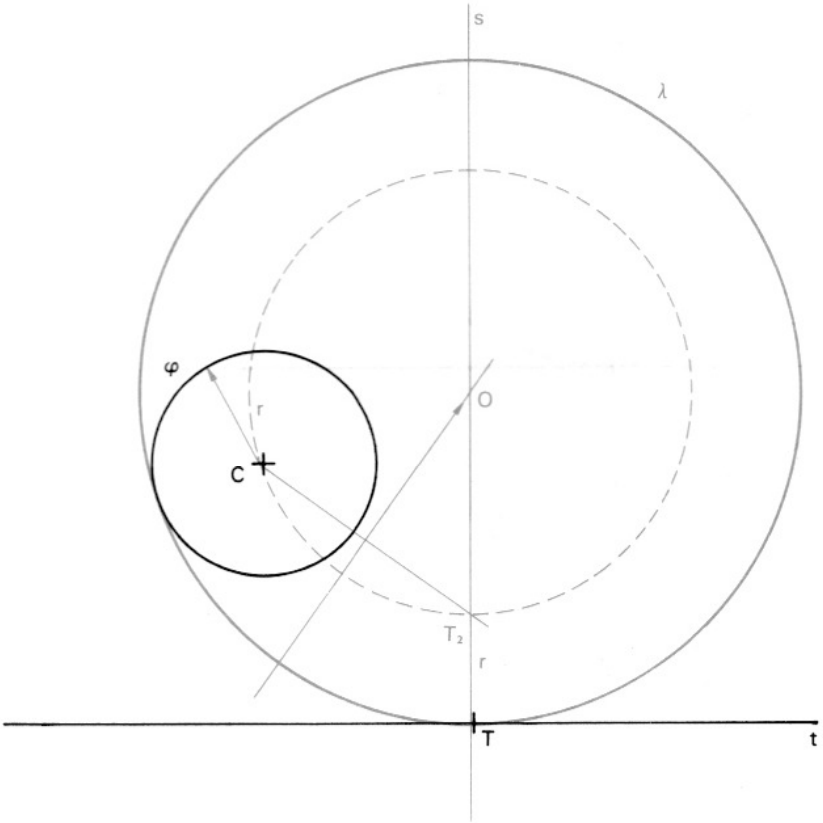
122 São dados uma reta **t**, um ponto T sobre ela e uma circunferência φ. Construa uma circunferência λ que seja tangente interna a φ e que tangencie a reta **t** no ponto T.

Observação: Resolva pelo método da dilatação e contração.

Sugestão: Contraindo φ até seu centro, λ também contrai e passa por C, determinando o ponto T_2 em **s**.

Observação: Chame a atenção para o fato de que esse problema é o pt 5, mas o que se está discutindo é, na verdade, um método novo para a sua resolução.





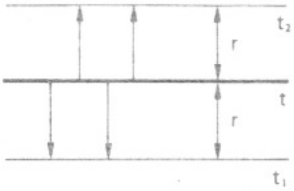
1.º) Por T, $s \perp t$.
2.º) Em s, $TT_2 = r$.
3.º) O encontra-se na intersecção de **s** com a mediatriz de $\overline{CT_2}$.

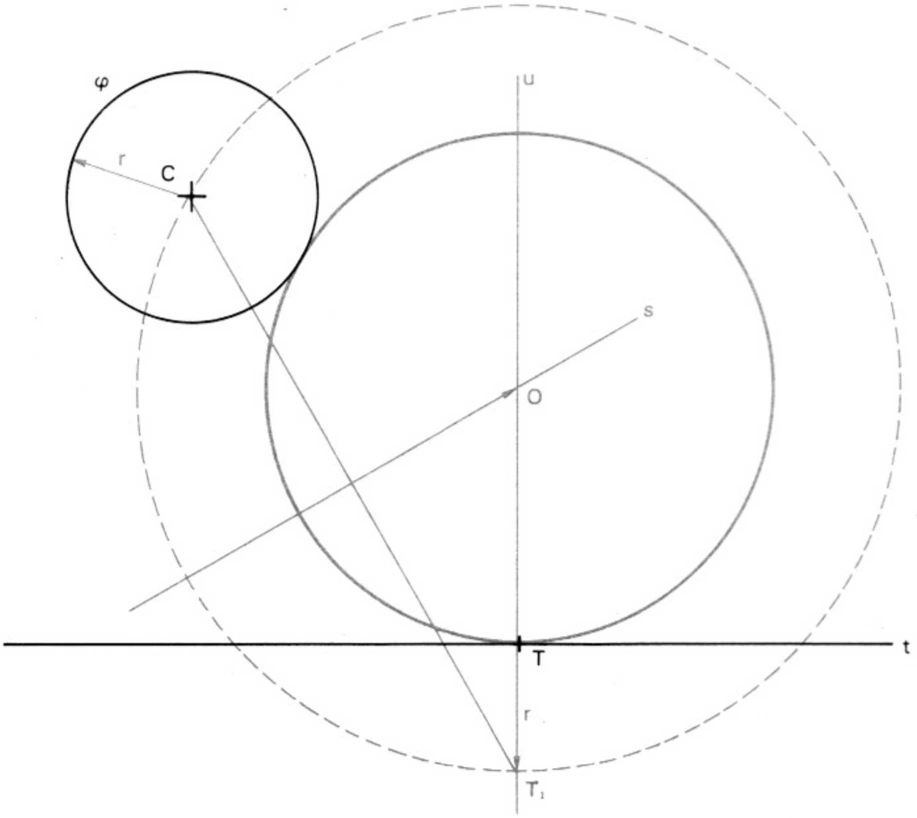
Tangência: método da dilatação e contração de circunferências

Figura auxiliar e anotações

123 Construa uma circunferência que seja tangente externa à circunferência φ e também tangencie a reta **t** no ponto T.

Observação:
Comente que, não especificando o tipo de tangência (externa ou interna) no enunciado deste problema e do anterior, ambos constituem um só problema com duas soluções, isto é, o pt 5. Pois bem, as duas soluções surgem do fato de a reta **t** poder ser transladada em dois sentidos.





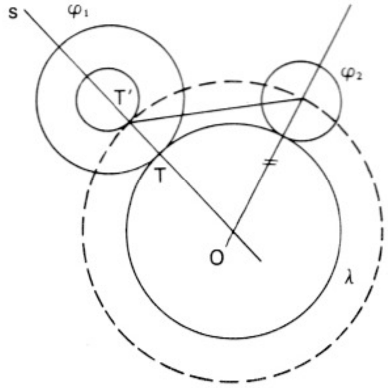
1.º) **u** ⊥ **t**, passando por T.
2.º) T_1 sobre **u**, de modo que $TT_1 = r$.
3.º) **s**, mediatriz de $\overline{OT_1}$, determinando O em **u**.

Tangência: método da dilatação e contração de circunferências

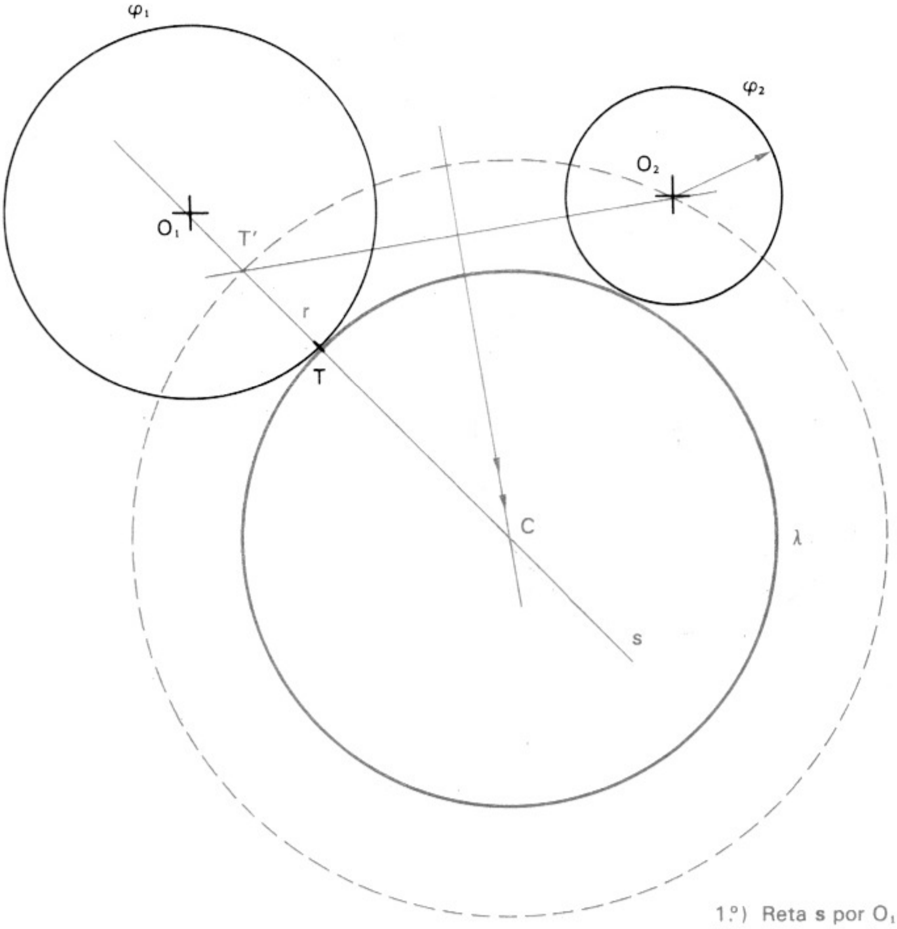
Figura auxiliar e anotações

124 São dadas duas circunferências φ_1 e φ_2 e um ponto T sobre a primeira. Aplicando o método da dilatação e contração, construa uma circunferência λ que seja tangente externa a φ_1 e φ_2, sendo T o ponto de tangência com φ_1.

Sugestão: Na figura abaixo, a reta **s** pode ser traçada e sobre ela pode ser marcado o ponto T′. Então...



s
φ_1
T′
φ_2
T
O
λ



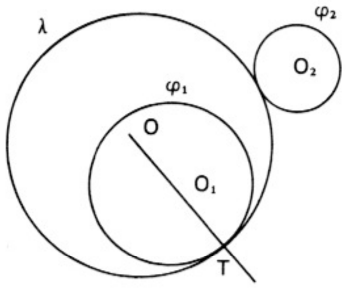
φ_1
φ_2
O_2
O_1
T′
r
T
C
λ
s

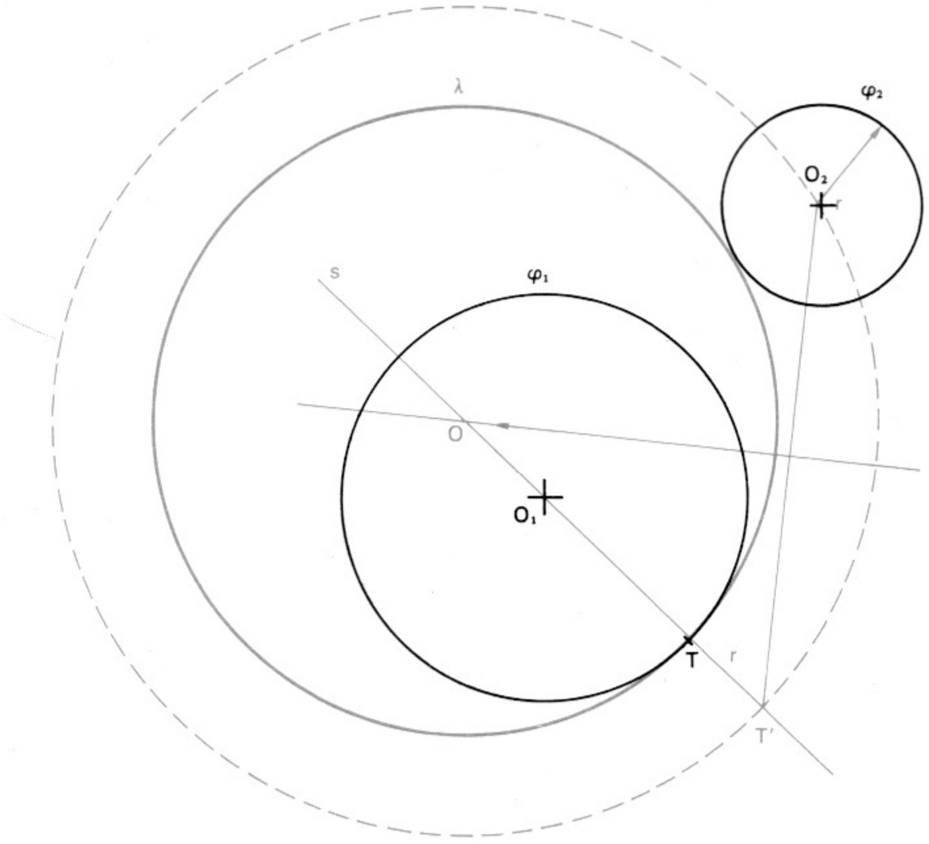
1.º) Reta **s** por O_1 e T.
2.º) TT′ = r sobre **s**.
3.º) Mediatriz de $\overline{T'O_2}$ determinando O em s.

Tangência: método da dilatação e contração de circunferências

125 São dadas duas circunferências φ_1 e φ_2 e um ponto T sobre a primeira. Aplicando o método da dilatação e contração, construa uma circunferência λ, tangente interna a φ_1 no ponto T e externa a φ_2.

Sugestão: Suposto resolvido, o problema fica com o aspecto abaixo.



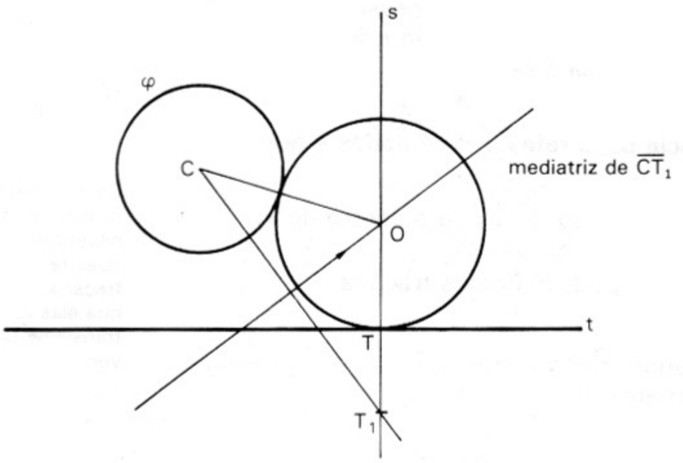


1.º) Reta **s**, por O_1 e T.
2.º) TT' = r sobre **s**.
3.º) Mediatriz de $\overline{T'O_2}$ determinando O em **s**.

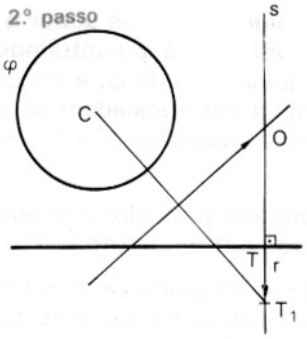
Figura auxiliar e anotações

Observação:
Comente com o aluno que uma inconveniência desse método é que soluções tangentes externas e soluções tangentes internas têm que ser antevistas. Assim, a rigor, os exercícios 124 e 125 constituem um só problema: "Construir uma circunferência tangente a duas circunferências dadas, sendo dado o ponto de tangência com uma delas." Vê-se que o problema como um todo nos obriga a pensar nas duas soluções, e se estas não forem percebidas no início, pode-se perder uma delas.

Então, determinamos O na intersecção de **s** com a mediatriz de $\overline{CT_1}$.



2.º passo



Observe que não houve a necessidade de traçar a reta t_1, mas, apenas, a de obter o ponto T_1.

Resumindo

Para aplicar o método da dilatação e contração, você deve ter em mente os seguintes preceitos:

1.º) Comece fazendo uma figura onde o problema já esteja supostamente resolvido.

2.º) Nessa figura, é sempre uma circunferência dada que você deve imaginar contraindo-se, até reduzir-se ao seu centro.

3.º) Se houver outras circunferências dadas no problema, é a de raio menor que se reduz a um ponto. As demais contraem-se ou dilatam-se para acompanhar o movimento do sistema, sem jamais alterarem seus centros.

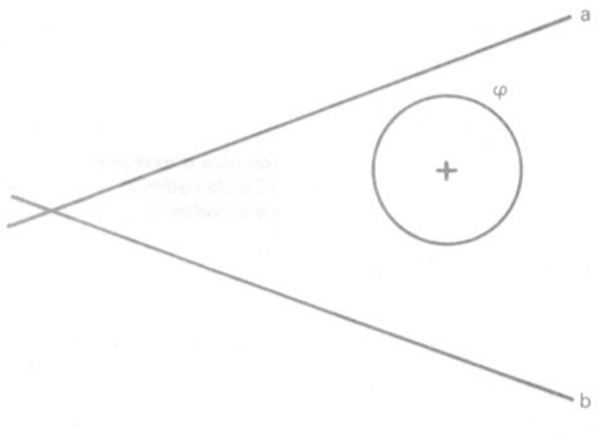
4.º) Se houver retas tangentes no problema, elas devem acompanhar o movimento das circunferências sempre através de translações, isto é, mantendo-se paralelas às posições originais.

De posse dessa técnica, pode-se resolver alguns novos problemas de tangência.

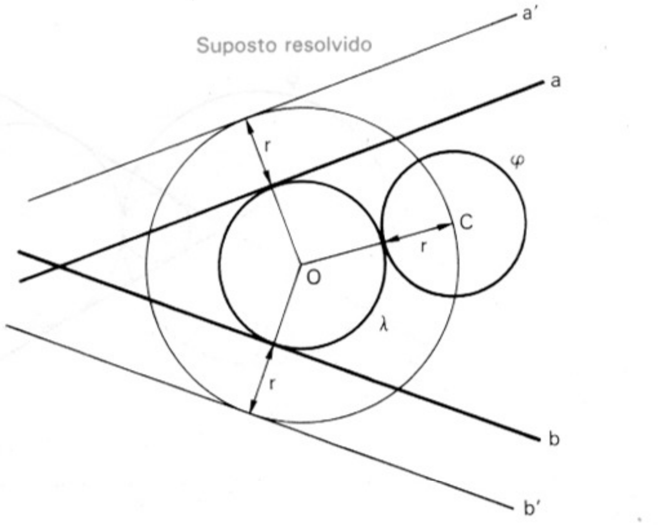
pt 6

São dadas duas retas **a** e **b** e uma circunferência φ. Construir uma circunferência λ que tangencie **a**, **b** e φ.

Resolva os exercícios de 122 a 125 do caderno de atividades.



Suposto resolvido



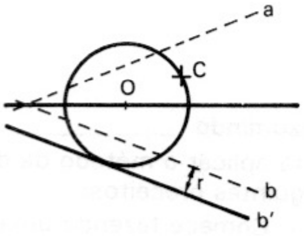
Resolução: Vamos supor o problema já resolvido. Agora, imaginamos a circunferência φ contraindo-se até reduzir-se a seu centro C. Para acompanhar o movimento de φ, a circunferência λ procurada dilata-se até passar por C e as retas **a** e **b** transladam-se, segundo uma amplitude igual ao raio **r** de φ, e vão para as posições a' e b'. Então, o problema passa a ser:

Construir uma circunferência que tangencie duas retas a' **e** b' **dadas e que passe por um ponto** C **dado**.

Isto é, traçando-se as retas a' e b', recaímos no **pt 2**, já que o centro de λ encontra-se na bissetriz do ângulo determinado por a' e b'.

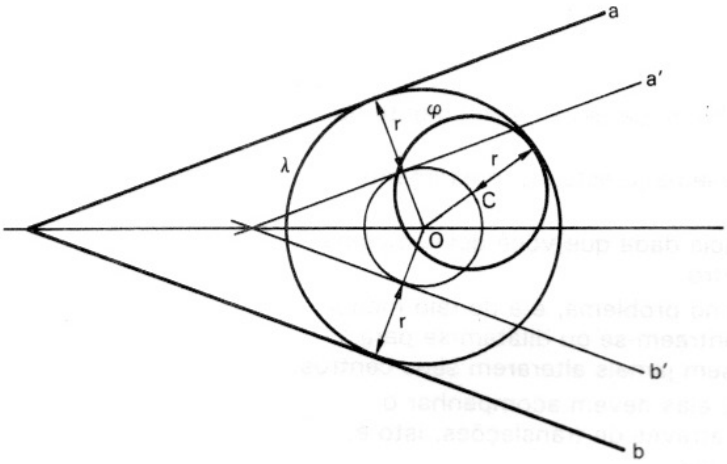
Uma vez obtido o centro O de λ, conforme o **pt 2**, podemos traçá-la.

Com os dados dispostos dessa forma, não é necessário transladar as duas retas, mas, apenas, traçar a bissetriz do ângulo que elas formam e transladar uma delas. Aí, você já estará no **pt 2**.



Observações:

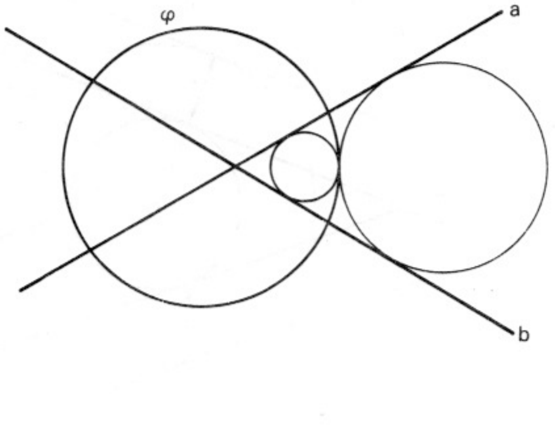
- Além de se supor a circunferência λ tangenciando externamente φ, deve-se, também, supô-la tangenciando φ internamente.



Nesse caso, quando φ se contrai, λ também deve se contrair, até passar por C, e as retas sofrem translações de amplitude igual a **r**, mas em sentidos contrários àquelas primeiras.

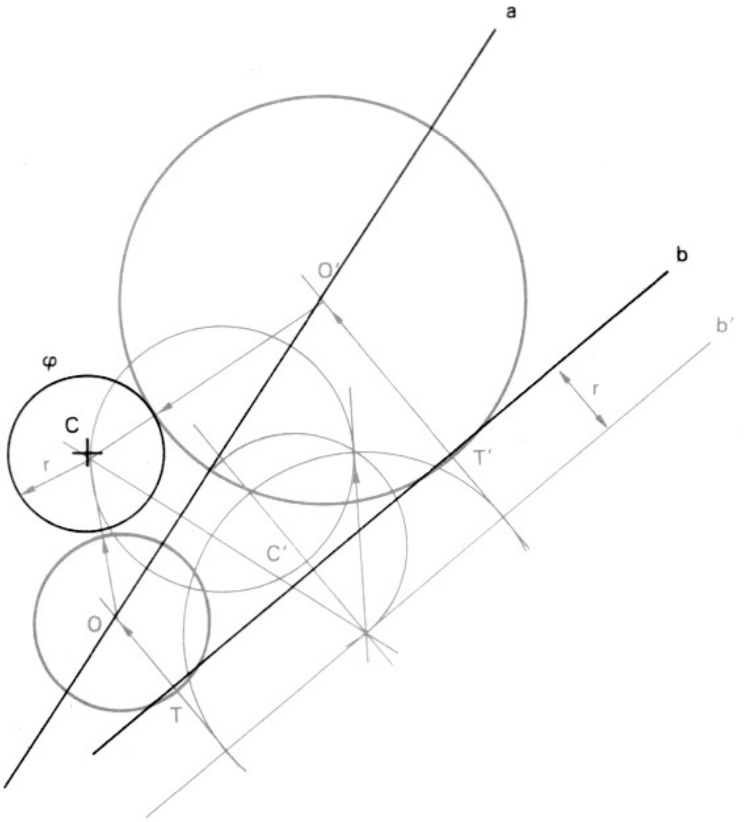
No total, em função de como os dados estão posicionados, o problema admite quatro soluções: duas tangentes externamente a φ e duas internamente.

- Se as retas **a** e **b** tiverem seu ponto de intersecção interno a φ, o problema admitirá oito soluções, pois em cada um dos quatro ângulos determinados por essas retas haverá duas soluções: uma tangente internamente a φ e outra externamente.



Resolva o exercício 126 do caderno de atividades.

126 São dadas uma circunferência φ e duas retas **a** e **b**. Construa uma circunferência que tenha seu centro em **a**, tangencie **b** e tangencie φ externamente.



1

Lugares geométricos

Relembrando os LGs já estudados

Para iniciar este capítulo, convém mencionar os sete lugares geométricos apresentados nos volumes 1 e 2 desta coleção, onde as suas construções encontram-se detalhadamente expostas. Para facilitar sua consulta, indicamos junto aos enunciados seguintes o volume e a página em que eles se encontram nos citados volumes.

Lembre-se de que uma figura $\mathcal{F}$ é denominada lugar geométrico dos pontos que possuem uma propriedade φ, quando, e somente quando:

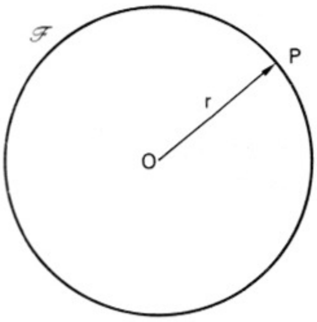
- **todos os pontos de $\mathcal{F}$ possuem a propriedade φ;**
- **somente os pontos de $\mathcal{F}$ possuem a propriedade φ.**

Circunferência

LG 1

O lugar geométrico dos pontos que estão a uma igual distância de um ponto é a **circunferência** que tem centro nesse ponto e raio igual à distância dada.

Veja o LG 1 no primeiro volume, página 67.



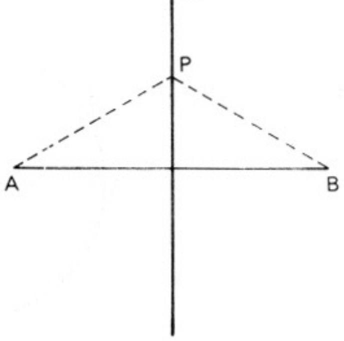
$$\begin{cases} P \in \mathcal{F} \Rightarrow PO = r \\ PO = r \Rightarrow P \in \mathcal{F} \end{cases}$$

Mediatriz

LG 2

O lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de dois pontos A e B é a **mediatriz** de $\overline{AB}$.

Veja o LG 2 no primeiro volume, página 71.



$$\begin{cases} P \in \mathcal{F} \Rightarrow PA = PB \\ PA = PB \Rightarrow P \in \mathcal{F} \end{cases}$$

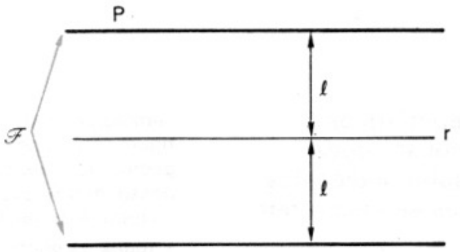
A mediatriz é a reta perpendicular a $\overline{AB}$ conduzida pelo ponto médio do mesmo.

Retas paralelas

LG 3

O lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a uma reta **r** são iguais a ℓ é **um par de retas paralelas a** r.

Veja o LG 3 no primeiro volume, página 80.



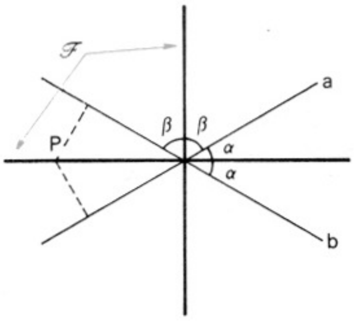
$$\left\{\begin{array}{l} P \in \mathscr{F} \Rightarrow d(P, r) = \ell \\ d(P, r) = \ell \Rightarrow P \in \mathscr{F} \end{array}\right.$$

Bissetriz

LG 4

O lugar geométrico dos pontos **eqüidistantes de duas retas concorrentes a e b** é um par de retas perpendiculares que contêm as **bissetrizes** dos **ângulos** formados por **a** e **b**.

Veja o LG 4 no primeiro volume, página 84.



$$\left\{\begin{array}{l} P \in \mathscr{F} \Rightarrow d(P, a) = d(P, b) \\ d(P, a) = d(P, b) \Rightarrow P \in \mathscr{F} \end{array}\right.$$

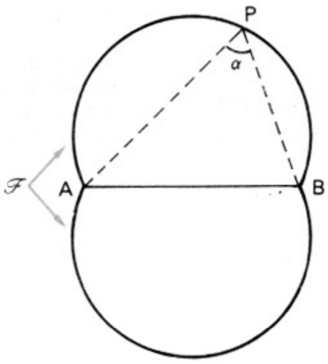
Arco capaz

LG 5

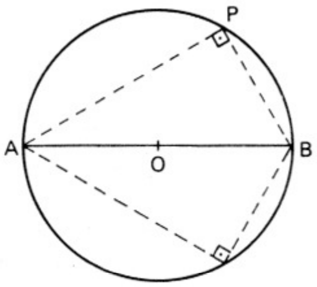
O lugar geométrico dos pontos que enxergam um segmento AB segundo um ângulo de medida α constante é o **par de arcos capazes** do ângulo α construídos sobre $\overline{AB}$.

Veja o LG 5 no primeiro volume, página 101.

Convém lembrar que um arco capaz de 90° é uma semicircunferência. Deste modo, para $\alpha = 90°$, o LG 5 é a circunferência de diâmetro $\overline{AB}$.



$$\left\{\begin{array}{l} P \in \mathscr{F} \Rightarrow A\hat{P}B = \alpha \\ A\hat{P}B = \alpha \Rightarrow P \in \mathscr{F} \end{array}\right.$$

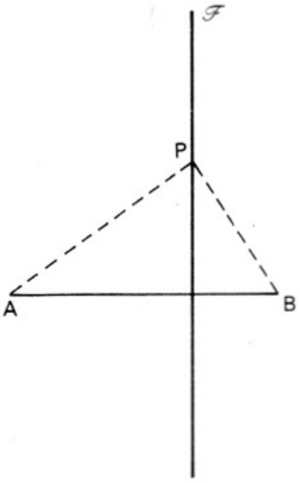


Reta de Apolônio

LG 6

Dados dois pontos A e B e um segmento **k**, o lugar geométrico dos pontos P, tais que $(PA)^2 - (PB)^2 = \mathbf{k}^2$, é uma reta perpendicular à reta AB.

Veja o LG 6 no segundo volume, página 106.



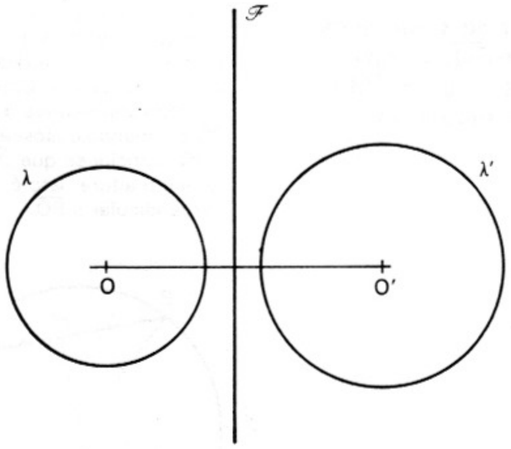
$$\begin{cases} P \in \mathcal{F} \Rightarrow PA^2 - PB^2 = k^2 \\ PA^2 - PB^2 = k^2 \Rightarrow P \in \mathcal{F} \end{cases}$$

Eixo radical

LG 7

O lugar geométrico dos pontos eqüipotentes em relação a duas circunferências λ e λ′, de centros O e O′, é uma reta perpendicular à reta OO′.

Veja o LG 7 no segundo volume, página 111.



$$\begin{cases} P \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathrm{Pot}_{\lambda}^{P} = \mathrm{Pot}_{\lambda'}^{P} \\ \mathrm{Pot}_{\lambda}^{P} = \mathrm{Pot}_{\lambda'}^{P} \Rightarrow P \in \mathcal{F} \end{cases}$$

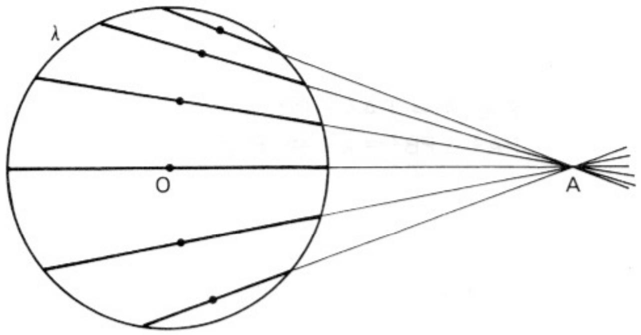
Dos sete lugares já estudados, sem dúvida os cinco primeiros são os que mais freqüentemente se empregam nas construções. O LG 6 tem poucas aplicações e o LG 7 só é importante para os problemas de tangência.

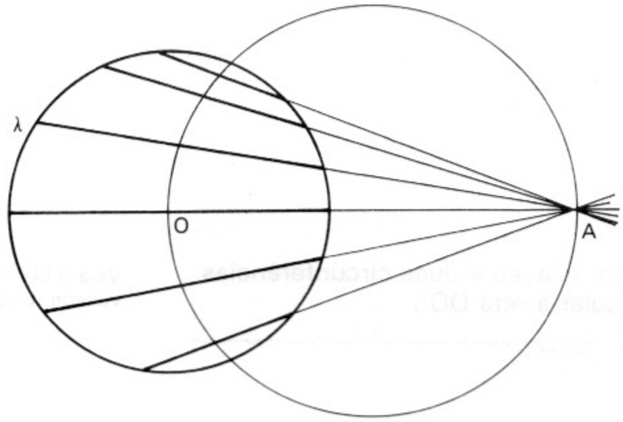
Porém, devemos acrescentar mais dois lugares geométricos aos que já estudamos. Passaremos, então, ao primeiro deles.

Lugar geométrico dos pontos médios: LG 8

LG 8

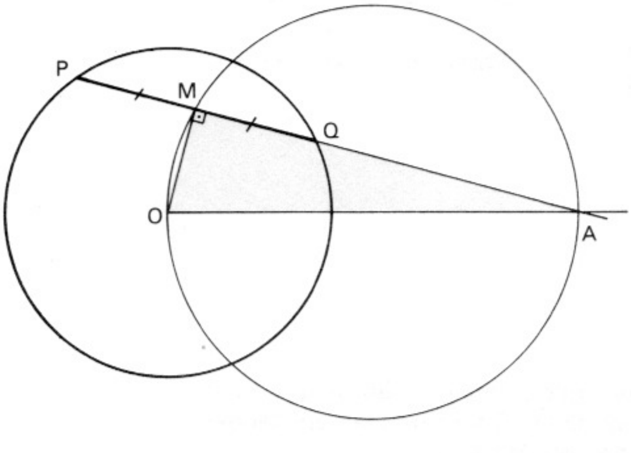
Consideremos uma circunferência λ de centro O e um ponto A qualquer. O **lugar geométrico dos pontos médios** das cordas de λ cujas retas suportes passam por A é o arco da circunferência de diâmetro $\overline{OA}$ contido no interior de λ.

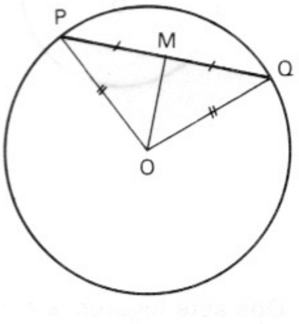




Para justificar esse lugar, consideremos uma corda $\overline{PQ}$ qualquer de λ que esteja contida numa reta que passa por A. Sendo M o ponto médio de $\overline{PQ}$, vamos provar que M pertence à circunferência de diâmetro $\overline{OA}$. De fato, como $\overline{OM}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$, conclui-se que M enxerga $\overline{OA}$ segundo um ângulo reto. Logo, M pertence à circunferência de diâmetro $\overline{OA}$.

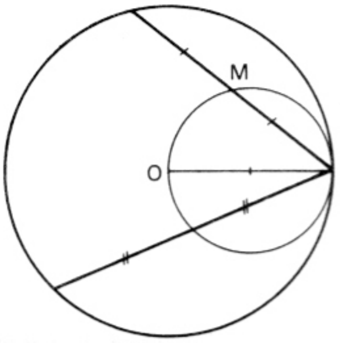
Lembre-se de que em todo triângulo isósceles a mediana e a altura relativas à base coincidem. Como $\overline{OM}$ é a mediana relativa à base $\overline{PQ}$ do triângulo isósceles OPQ, conclui-se que $\overline{OM}$ é também altura, isto é, $\overline{OM}$ é perpendicular a $\overline{PQ}$.

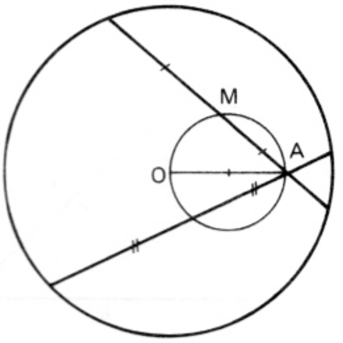




Também se demonstra de imediato que a circunferência de diâmetro $\overline{OA}$ intercepta toda corda de λ, contida numa reta que passa por A, em seu ponto médio.

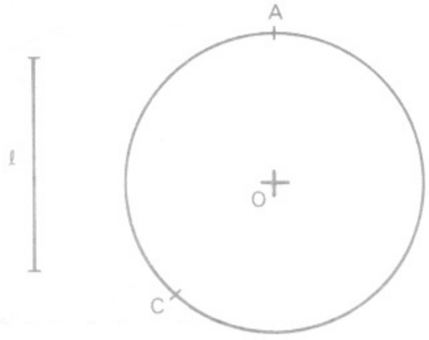
Observação: A propriedade continua válida quando A está na circunferência λ ou no seu interior. Nesses casos, o LG 8 é toda a circunferência de diâmetro $\overline{OA}$.



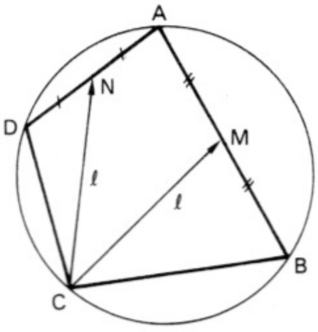


Exercícios

E1.1 Sobre uma circunferência são dados dois pontos A e C. Inscreva um quadrilátero ABCD nessa circunferência sabendo que os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ distam ℓ de C. (A, B, C e D no sentido horário)



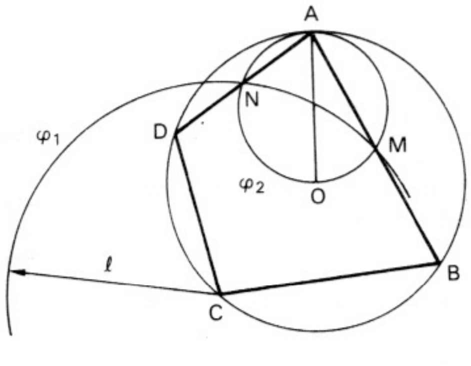
Suposto resolvido



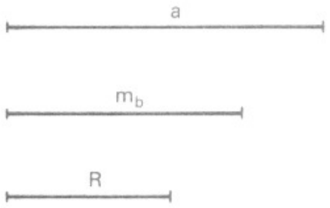
Resolução: Sejam M e N os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$. Então, conhecemos dois lugares geométricos desses pontos:

φ_1: M e N distam ℓ de C (LG 1).
φ_2: M e N são pontos médios de duas cordas que partem de um mesmo ponto A (LG 8).

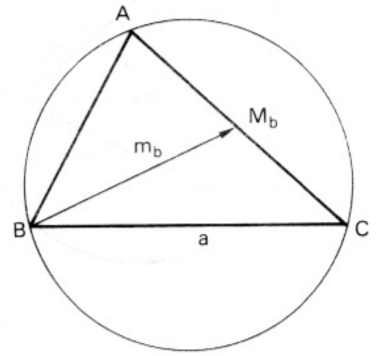
Uma vez determinados M e N, podemos traçar $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, isto é, podemos determinar os vértices B e D.



E1.2 Construa um triângulo ABC dados **a**, m_b e R (raio da circunferência circunscrita).



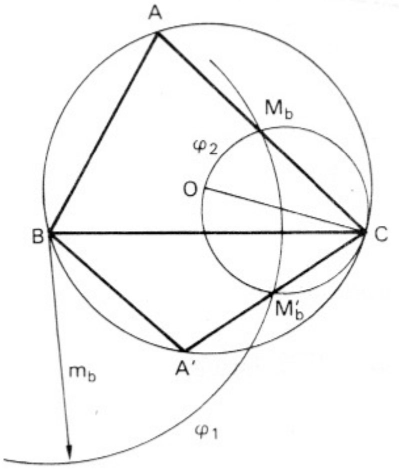
Suposto resolvido



Resolução: Traçamos a circunferência circunscrita e posicionamos $\overline{BC}$ arbitrariamente. Então, podemos determinar M_b (ponto médio de $\overline{AC}$), pois desse ponto temos duas propriedades:

φ_1: M_b dista m_b de B (LG 1).
φ_2: M_b é o ponto médio de uma corda contida numa reta que passa por C (LG 8).

Determinando M_b, traçamos por C e M_b o lado $\overline{AC}$, isto é, determinamos A.



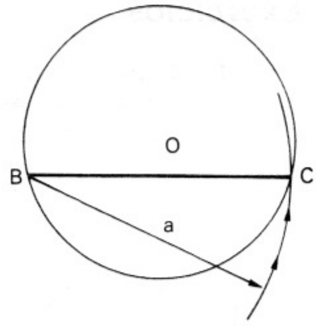
Os triângulos ABC e A'BC são as soluções do problema.

E1.3 Construa um triângulo ABC dados $\hat{A} = 90°$, a = 70mm e m_b = 53mm. Qual é, aproximadamente, o perímetro desse triângulo?

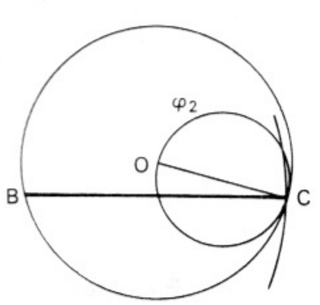
E1.4 Construa um triângulo ABC dados a = 50mm, $\hat{A} = 60°$ e m_c = 38mm. Qual é, aproximadamente, o perímetro desse triângulo?

Evolução do traçado

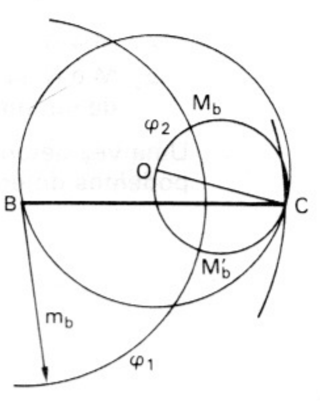
1.º passo



2.º passo



3.º passo



Sugestão: Construindo o arco capaz de 90° sobre $\overline{BC}$ você recairá no problema anterior.

Resolva os exercícios de 1 a 4 do caderno de atividades.

Lugar geométrico dos pontos médios: LG 8

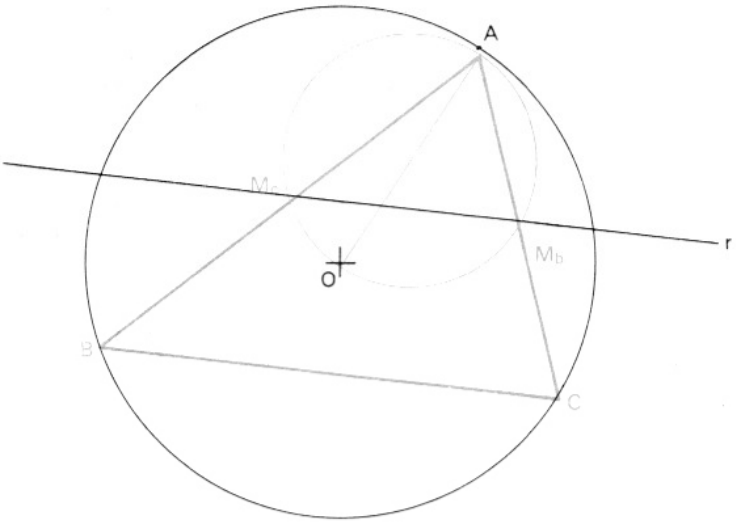
Figura auxiliar e anotações

Observações:

1) Comente, com o aluno, que B e C poderiam ser obtidos pela multiplicação de r por 2, com centro de homotetia em A.
2) Aproveite para relembrar que $\overline{M_bM_c}$ é paralelo a $\overline{BC}$.

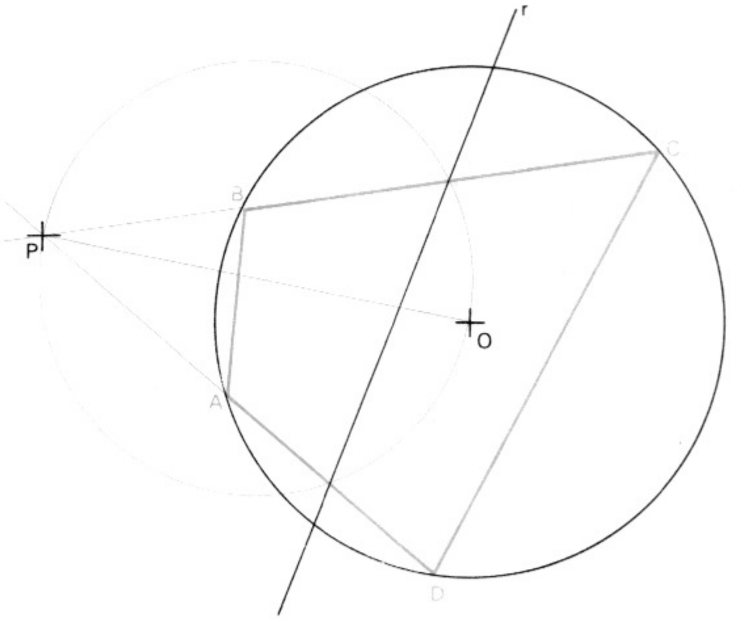
1 Inscreva um triângulo ABC na circunferência dada, conhecidos o vértice A e a reta **r**, que passa por M_b e M_c.

Observação: A, B e C, no sentido anti-horário.



2 As retas-suportes dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ de um quadrilátero inscrito na circunferência dada passam pelo ponto P. Construa esse quadrilátero sabendo que a reta **r** passa pelos pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Observação: A, B, C e D, no sentido horário.



Lugar geométrico dos pontos médios: LG 8

3 De um triângulo ABC retângulo em A são dados a circunferência circunscrita, o vértice B e a mediana m_b. Construa esse triângulo.
Observação: A, B e C, no sentido anti-horário.

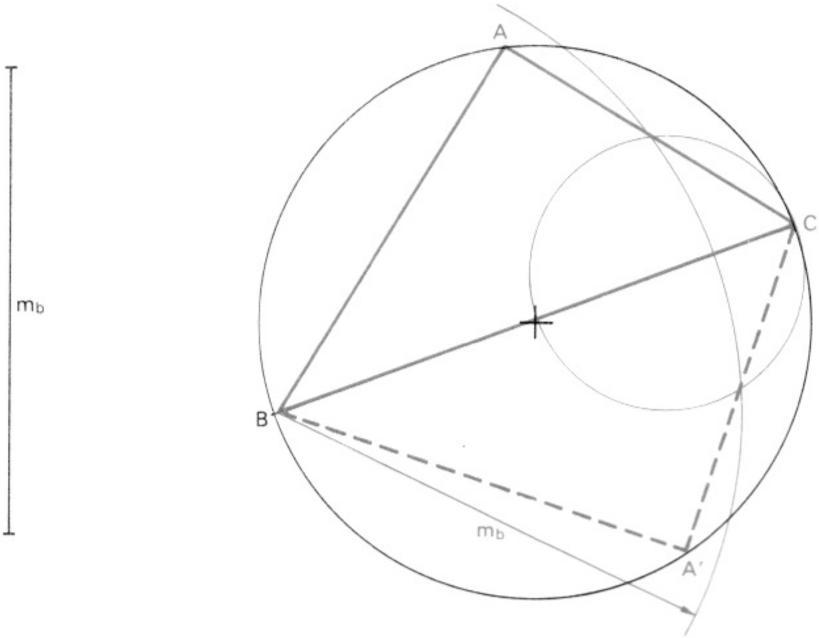
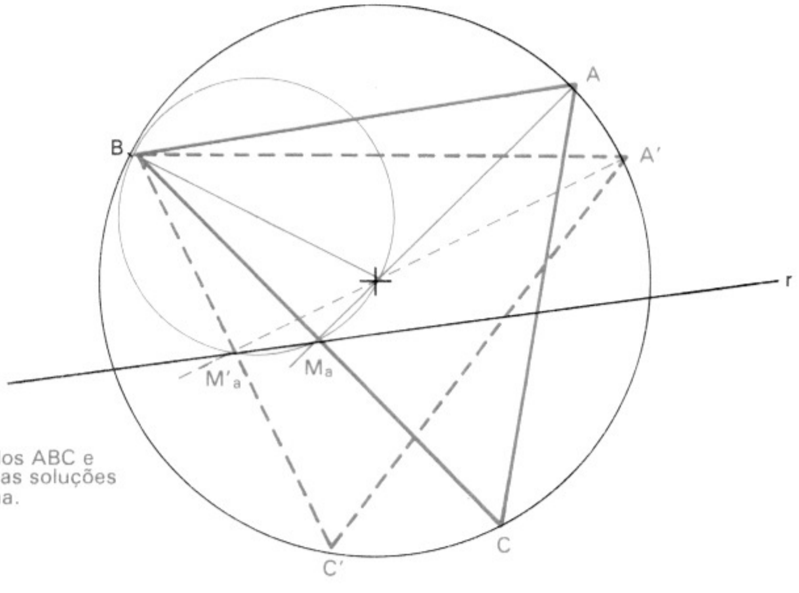


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Comente que este problema é essencialmente de posição, já que esta deixa de ser arbitrária quando o vértice B tem posição fixa. Assim, a solução A'BC só não é aceita pela exigência de estarem A, B e C no sentido anti-horário. Tal recurso é bastante utilizado nos vestibulares do ITA para limitar o número de soluções dos problemas.

4 Construa um triângulo ABC isósceles de base $\overline{BC}$, dados a circunferência circunscrita, o vértice B, uma reta **r** que contém M_a e sabendo ainda que ∢ Â é agudo.
Sugestão: Posicionando $\overline{BC}$, note que A pertence à mediatriz desse lado.

Observação:
Comente que, ao traçar $\overline{BC}$, a circunferência fica dividida em dois arcos e, para que Â seja agudo, é necessário que o vértice A pertença ao maior deles. Caso não houvesse essa restrição (Â agudo), o problema teria quatro soluções.



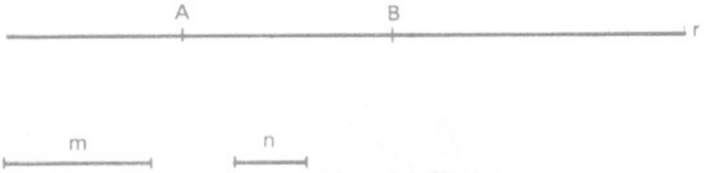
Os triângulos ABC e A'BC' são as soluções do problema.

Divisão harmônica

Na seqüência, vamos estudar o problema da divisão harmônica e o teorema das bissetrizes. Esses estudos são necessários para podermos apresentar o próximo lugar geométrico.

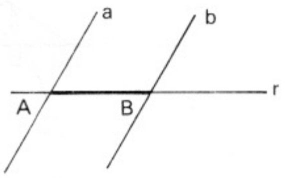
Problema

Dados dois pontos A e B de uma reta **r**, determinar um ponto M de **r** tal que $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$, onde **m** e **n** são ambos segmentos ou ambos números dados.

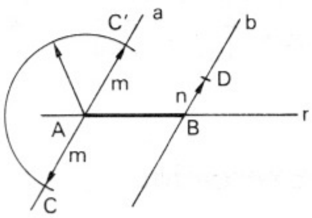


Evolução do traçado

1.º passo



2.º e 3.º passos

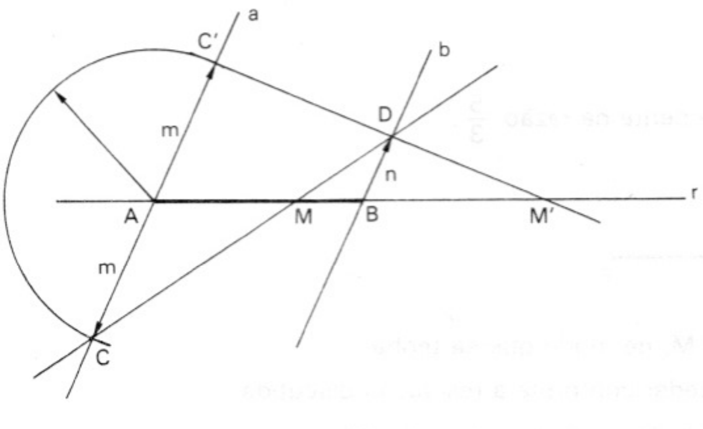


Resolução:

1.º) Por A e B traçam-se as retas **a** e **b** paralelas quaisquer

2.º) Sobre **a** tomam-se os pontos C e C' tais que AC = AC' = m

3.º) Sobre **b** toma-se um ponto D tal que BD = n (não importa de qual lado em relação a **r** determina-se D)



As retas CD e C'D interceptam **r** nos pontos M e M', que respondem à questão, ou seja:

$$\boxed{\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n} \text{ e } \frac{AM'}{M'B} = \frac{m}{n}}$$

A justificativa é feita através da semelhança de triângulos. De fato,

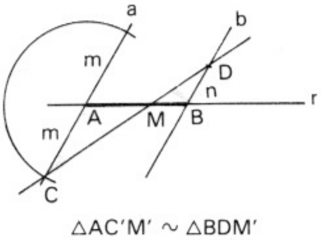
$$(\triangle ACM \sim \triangle BDM) \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$$

$$(\triangle AC'M' \sim \triangle BDM') \Rightarrow \frac{AM'}{M'B} = \frac{m}{n}$$

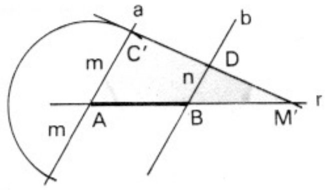
Dizemos que os pontos M e M' **dividem o segmento AB harmonicamente na razão de m para n.** O ponto M divide $\overline{AB}$ internamente e o ponto M' divide $\overline{AB}$ externamente.

Também dizemos que M e M' são **conjugados harmônicos** de A e B e, reciprocamente, A e B são **conjugados harmônicos** de M e M'.

ΔACM ~ ΔBDM



ΔAC'M' ~ ΔBDM'



Convenção: Considere os dois seguintes problemas.

1.º) Dividir $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{m}{n}$.

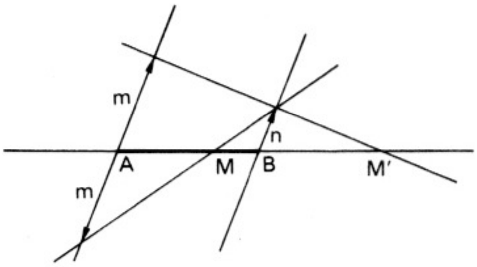
2.º) Dividir $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{n}{m}$.

Observe que, quando dizemos que M′ divide $\overline{AB}$ externamente, estamos ampliando o conceito de divisão, uma vez que M′ não está entre A e B.

Para diferenciar essas duas divisões, vamos convencionar que quando se escreve "dividir $\overline{AB}$", A e B nesta ordem, procura-se M, de modo que $\frac{AM}{MB}$ seja igual à razão da divisão. Assim, os dois problemas têm as seguintes soluções:

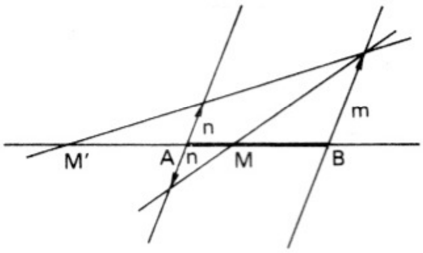
Note que dividir $\overline{AB}$ na razão $\frac{m}{n}$ é o mesmo que dividir $\overline{BA}$ na razão $\frac{n}{m}$.

1.º)



$\overline{AB}$ está dividido na razão de **m** para **n**, pois $\frac{AM}{MB} = \frac{AM'}{M'B} = \frac{m}{n}$

2.º)

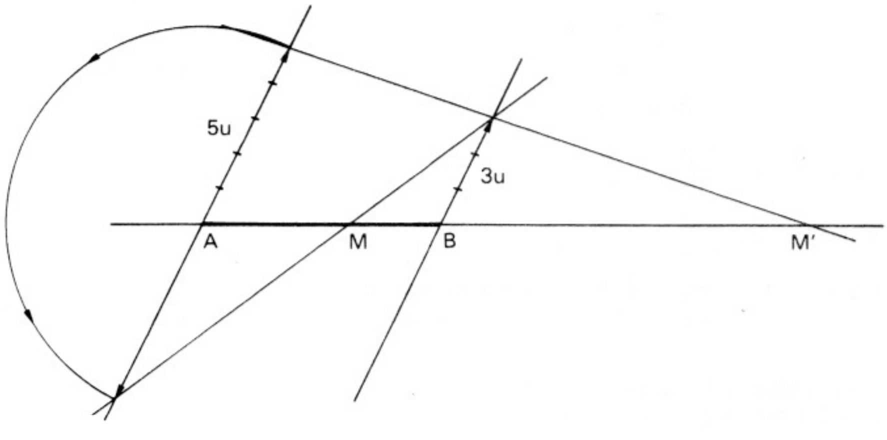


$\overline{AB}$ está dividido na razão de **n** para **m**, pois $\frac{AM}{MB} = \frac{AM'}{M'B} = \frac{n}{m}$.

Exercícios

E1.**5** Divida o segmento AB harmonicamente na razão $\frac{5}{3}$.

Resolução: Queremos determinar M, de modo que se tenha $\frac{AM}{MB} = \frac{5}{3}$. Para tanto basta proceder conforme a resolução discutida anteriormente e fazer m = 5u e n = 3u, onde **u** é uma unidade arbitrária.



E1.6 Seja $\overline{AB}$ um segmento de 63mm.

a) Divida $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{5}{2}$.

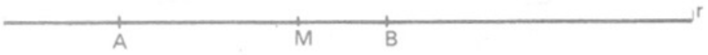
b) Divida $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{2}{5}$.

Sendo M o ponto de divisão interna, qual é a medida de $\overline{AM}$ em cada um dos dois casos?

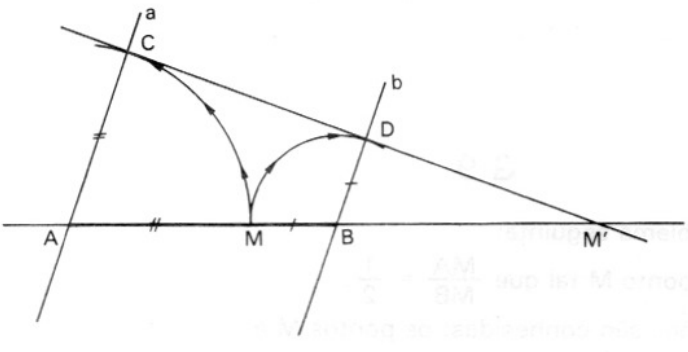
E1.7 Um segmento AB de 40mm é dividido harmonicamente pelos pontos X e Y na razão $\frac{3}{5}$. Qual é a medida de $\overline{XY}$?

E1.8 Sejam M e M' conjugados harmônicos de A e B. Conhecidos A, M e B, determine M'.

O ponto M' é denominado 4º harmônico.



Resolução: Inicialmente conduzimos por A e B duas retas **a** e **b** paralelas quaisquer. Então determinamos em **a** o ponto C, de modo que AC = AM, e em **b** o ponto D, tal que BD = BM. A reta conduzida por C e D intercepta a reta AB no ponto M' procurado.



Da semelhança dos triângulos ACM' e BDM', e considerando que AC = AM e BD = BM, podemos justificar facilmente a construção, pois:

$$\frac{AM'}{M'B} = \frac{AC}{BD}$$

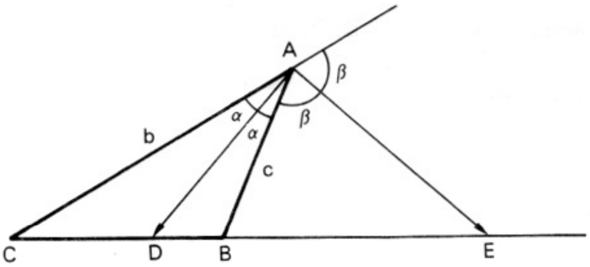
$$\therefore \boxed{\frac{AM'}{M'B} = \frac{AM}{MB}}$$

Resolva os exercícios de 5 a 9 do caderno de atividades.

Teorema das bissetrizes

Teorema

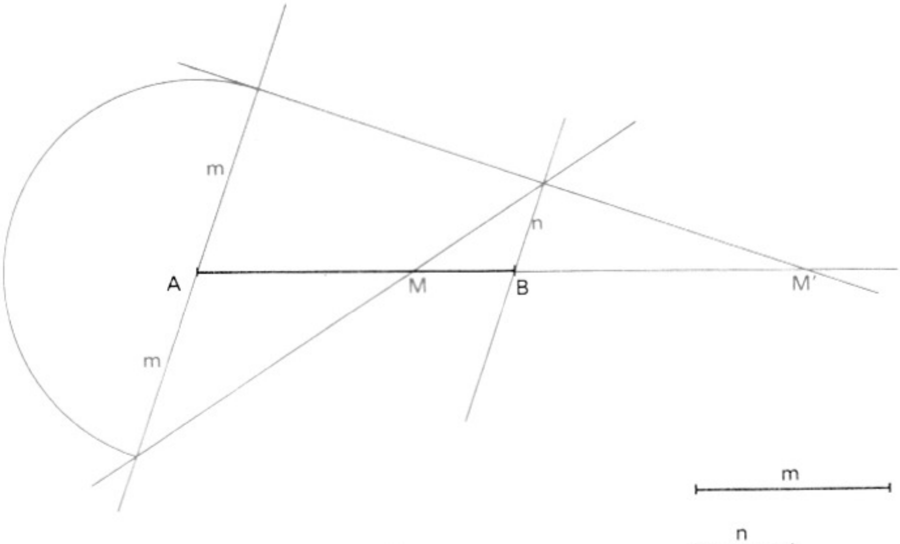
Em todo triângulo, as bissetrizes interna e externa relativas a um mesmo vértice dividem o lado oposto harmonicamente e na razão dos outros dois lados.



$$\boxed{\frac{CD}{DB} = \frac{CE}{EB} = \frac{b}{c}}$$

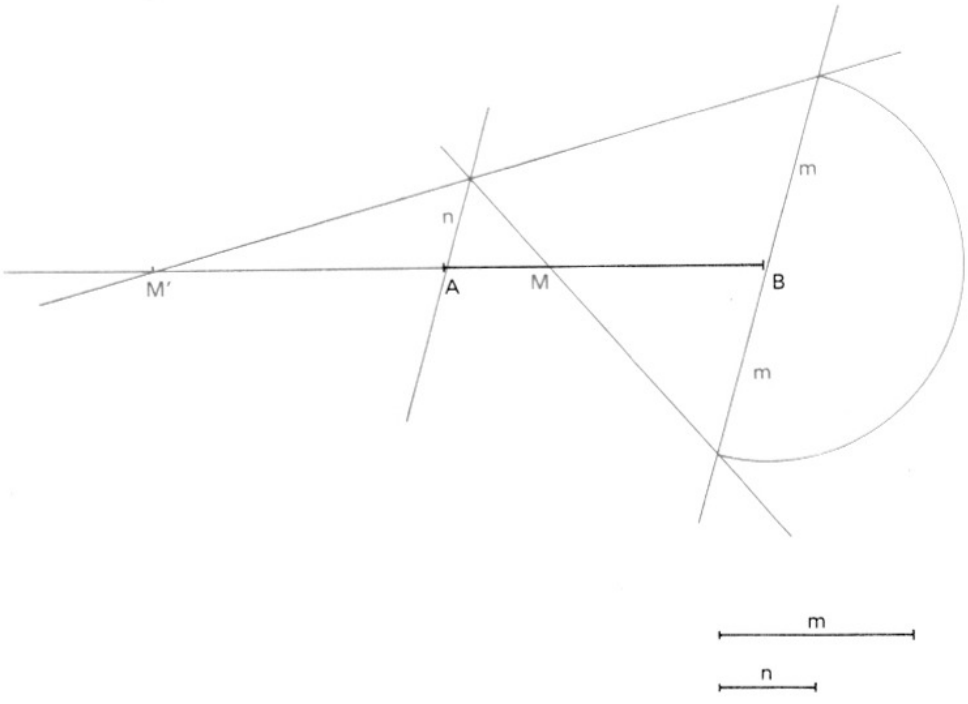
Divisão harmônica

5 Divida o segmento AB harmonicamente na razão $\frac{m}{n}$.



M e M' são os pontos procurados.

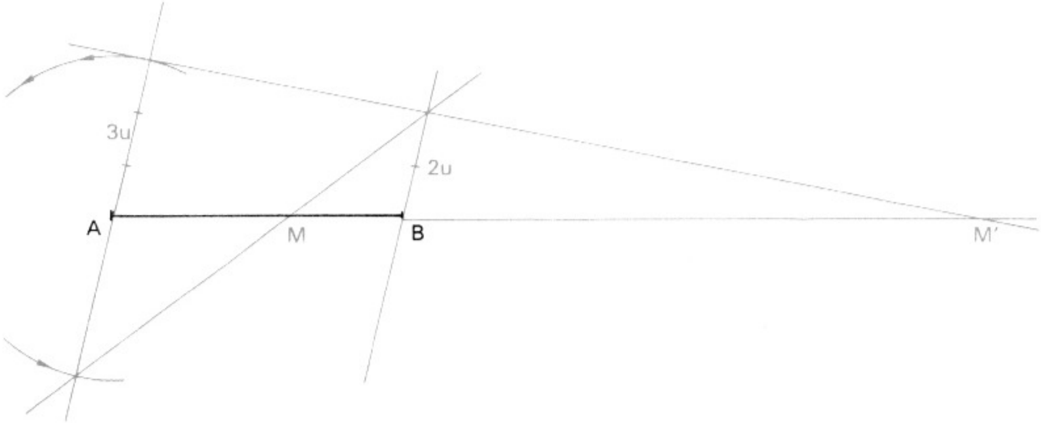
6 Divida o segmento AB harmonicamente na razão $\frac{n}{m}$.



Divisão harmônica

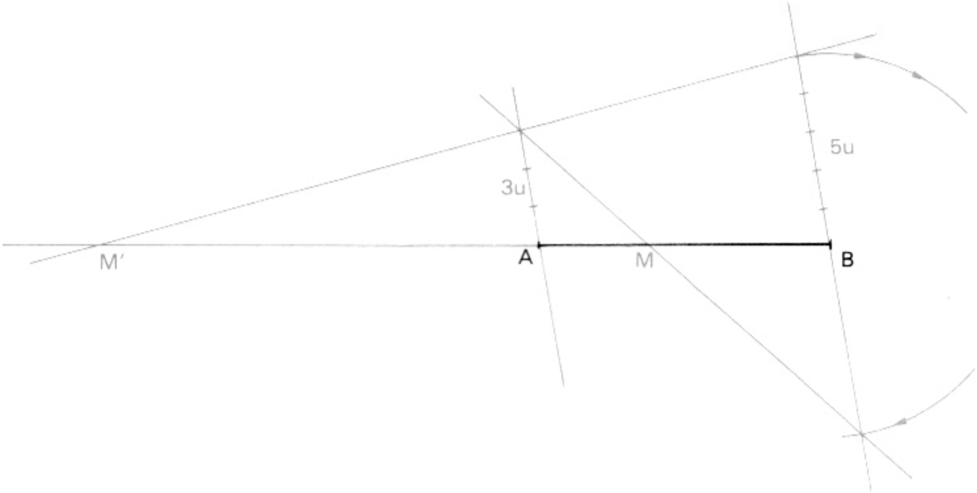
Figura auxiliar e anotações

7 Divida $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{3}{2}$.



8 Divida $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{3}{5}$.

Observação:
Conscientize o aluno de que ele deve dominar bem a divisão harmônica, pois ela será amplamente empregada na construção do próximo lugar geométrico.

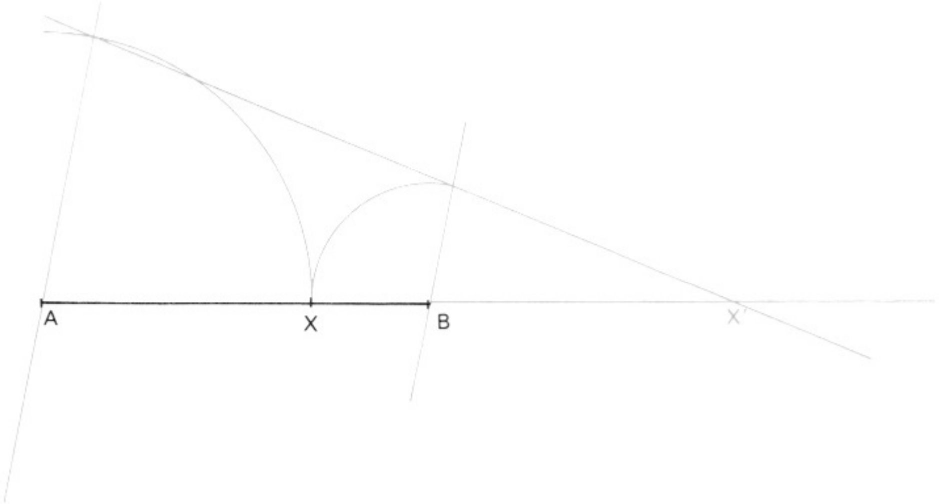


Divisão harmônica — Lugar geométrico da razão constante: LG 9

Figura auxiliar e anotações

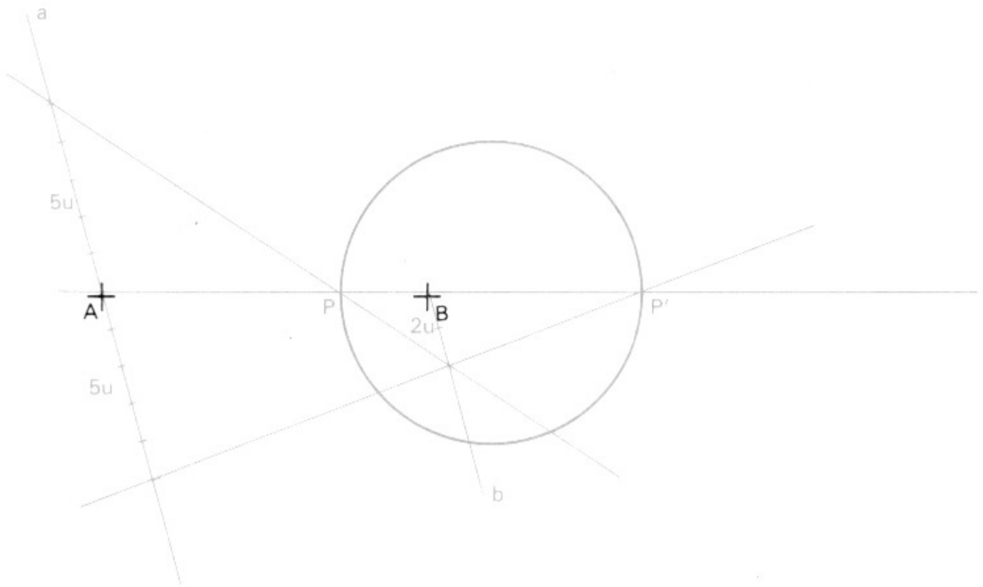
9 Os pontos X e X′ dividem $\overline{AB}$ harmonicamente. Dados A, X e B, determine X′.

Observação:
Alerte o aluno para o fato de que a determinação do 4.º harmônico será freqüentemente necessária nos problemas do próximo lugar geométrico.



10 Construa o lugar dos pontos P tais que $\frac{PA}{PB} = \frac{5}{2}$.

Observação:
Insista na diferença entre os lugares: $\frac{PA}{PB} = \frac{5}{2}$ e $\frac{PA}{PB} = \frac{2}{5}$.
Caso haja dúvidas, pode-se orientar o aluno para que, nas retas **a** e **b**, paralelas, conduzidas por A e B, em $\frac{PA}{PB} = \frac{5}{2}$ coloque 5u a partir de A e 2u a partir de B, como sugerem as setas.



E1.6 Seja $\overline{AB}$ um segmento de 63mm.

a) Divida $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{5}{2}$.

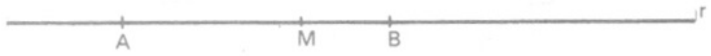
b) Divida $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{2}{5}$.

Sendo M o ponto de divisão interna, qual é a medida de $\overline{AM}$ em cada um dos dois casos?

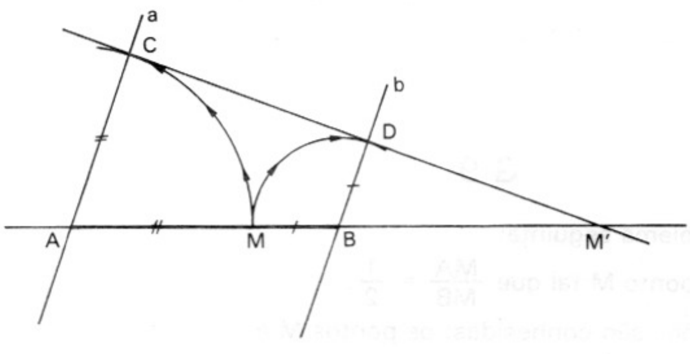
E1.7 Um segmento AB de 40mm é dividido harmonicamente pelos pontos X e Y na razão $\frac{3}{5}$. Qual é a medida de $\overline{XY}$?

E1.8 Sejam M e M′ conjugados harmônicos de A e B. Conhecidos A, M e B, determine M′.

O ponto M′ é denominado 4.º harmônico.



Resolução: Inicialmente conduzimos por A e B duas retas **a** e **b** paralelas quaisquer. Então determinamos em **a** o ponto C, de modo que AC = AM, e em **b** o ponto D, tal que BD = BM. A reta conduzida por C e D intercepta a reta AB no ponto M′ procurado.



Da semelhança dos triângulos ACM′ e BDM′, e considerando que AC = AM e BD = BM, podemos justificar facilmente a construção, pois:

$$\frac{AM'}{M'B} = \frac{AC}{BD}$$

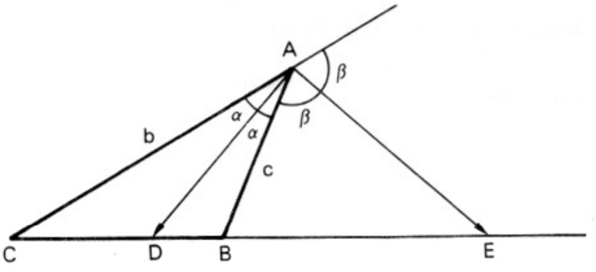
$$\therefore \boxed{\frac{AM'}{M'B} = \frac{AM}{MB}}$$

Resolva os exercícios de 5 a 9 do caderno de atividades.

Teorema das bissetrizes

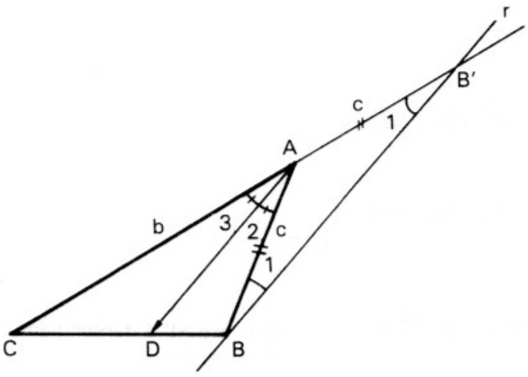
Teorema

Em todo triângulo, as bissetrizes interna e externa relativas a um mesmo vértice dividem o lado oposto harmonicamente e na razão dos outros dois lados.

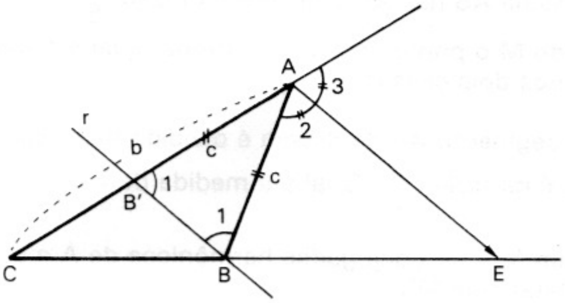


$$\boxed{\frac{CD}{DB} = \frac{CE}{EB} = \frac{b}{c}}$$

☐ **Demonstração**



Tracemos por B a reta **r** paralela a $\overline{AD}$ determinando B' em $\overleftrightarrow{AC}$. Então,



Tracemos por B a reta **r** paralela a $\overline{AE}$ determinando B' em $\overline{AC}$. Então,

$$\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{A}_2 \text{ (alternos internos)} \\ \hat{B}'_1 = A_3 \text{ (correspondentes)} \end{cases}$$

Como $\hat{A}_3 = \hat{A}_2$, conclui-se que $\hat{B}_1 = \hat{B}'_1$. Logo, o triângulo ABB' é isósceles e AB = AB' = c. Assim, pelo teorema de Tales temos:

$$\boxed{\frac{CD}{DB} = \frac{b}{c}} \qquad \boxed{\frac{CE}{EB} = \frac{b}{c}}$$

■ c.q.d.

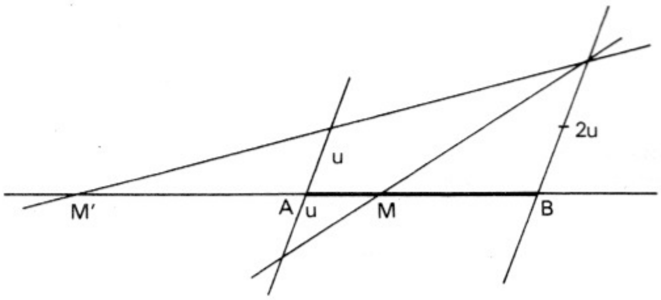
A partir desse teorema, vamos estabelecer um novo lugar geométrico.

Lugar geométrico da razão constante: LG 9

Primeiramente, analise atentamente o problema seguinte:

Dados dois pontos A e B, determinar um ponto M tal que $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2}$.

Note, de início, que ao menos duas soluções são conhecidas: os pontos M e M', que dividem $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{1}{2}$.

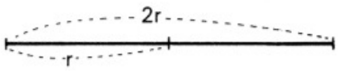


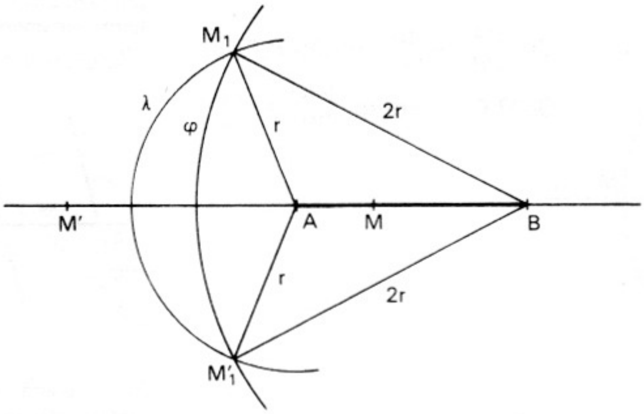
$$\frac{MA}{MB} = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{M'A}{M'B} = \frac{1}{2}$$

Porém, podem-se determinar outras soluções, não-pertencentes à reta AB. Para tanto, procede-se da seguinte forma:

1.º) com centro em A e raio **r** conveniente, descreve-se um arco λ;

2.º) com centro em B e raio 2r, descreve-se um arco φ.

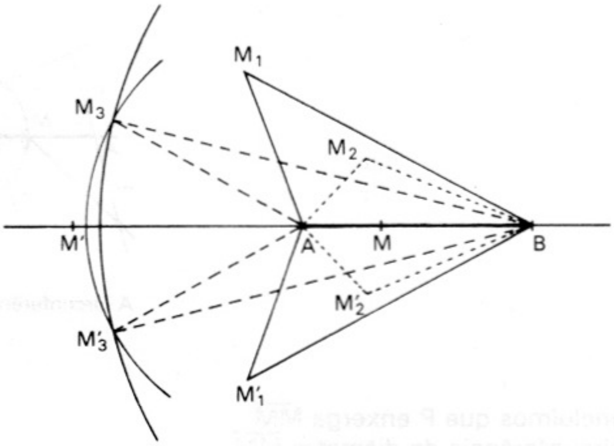




Os pontos M_1 e M'_1 , de intersecção de λ e φ, são soluções do problema, já que:

$$\frac{M_1A}{M_1B} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{M'_1A}{M'_1B} = \frac{1}{2}$$

Do mesmo modo que M_1 e M'_1 foram determinados, podem-se determinar tantas soluções quantas se quiser, bastando para isso variar **r**.



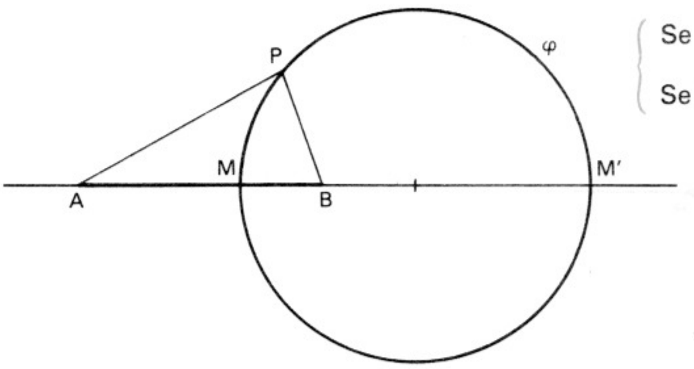
Então, conclui-se que o problema admite infinitas soluções.

Observe que cada solução é um ponto cuja propriedade característica é ter a razão de suas distâncias aos pontos A e B constante e igual a $\frac{1}{2}$.

Agora, vamos responder à seguinte indagação: qual é a figura determinada pelo conjunto de todos os pontos cujas distâncias aos pontos A e B têm razão constante? A resposta vem com a apresentação de um novo lugar geométrico.

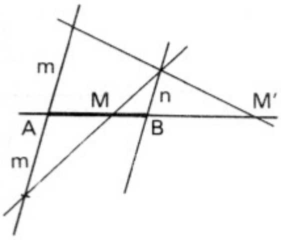
LG 9

Consideremos dois pontos fixos A e B, e sejam M e M' os pontos que dividem $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{m}{n}$. Então, o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias aos pontos A e B têm razão constante e igual a $\frac{m}{n}$ é a circunferência de diâmetro $\overline{MM'}$.



$$\begin{cases} \text{Se } \dfrac{PA}{PB} = \dfrac{m}{n}\text{, então } P \in \varphi \\ \text{Se } P \in \varphi\text{, então } \dfrac{PA}{PB} = \dfrac{m}{n} \end{cases}$$

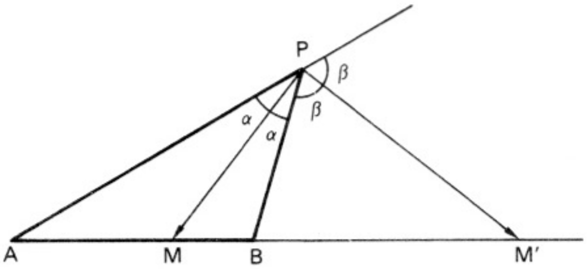
Para construir o LG 9 primeiro dividimos $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{m}{n}$, obtendo M e M′.



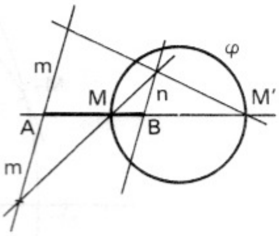
Então, basta construir a circunferência φ de diâmetro $\overline{MM'}$.

Vamos demonstrar que se $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$, então P pertence à referida circunferência.

De fato, seja P um ponto que satisfaz a condição $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$ e tracemos as bissetrizes interna e externa relativas ao vértice P do triângulo PAB. Sabemos que os pés dessas bissetrizes são os pontos M e M′, que dividem $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{PA}{PB}$, isto é, na razão $\frac{m}{n}$ (teorema das bissetrizes).

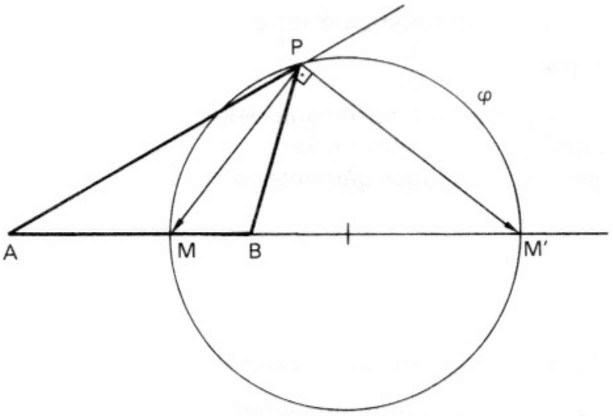


$$\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$$



A circunferência φ é o LG 9.

Como essas bissetrizes são perpendiculares, concluímos que P enxerga $\overline{MM'}$ segundo um ângulo reto. Assim, P pertence à circunferência de diâmetro $\overline{MM'}$ (arcos capazes de 90°).



Veja como se justifica que as bissetrizes PM e PM′ são perpendiculares.

$$2\alpha + 2\beta = 160° \qquad :(2)$$
$$\alpha + \beta = 90°$$
$$\therefore \boxed{M\hat{P}M' = 90°}$$

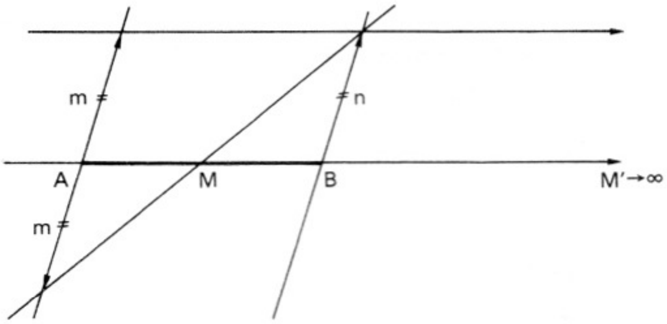
Nota histórica

O LG 9 é às vezes chamado **circunferência de Apolônio,** mas tal denominação é imprópria, uma vez que esse lugar já era conhecido por matemáticos que antecederam esse geômetra.

Também se demonstra que todo ponto dessa circunferência tem a razão de suas distâncias aos pontos A e B constante e igual a $\frac{m}{n}$.

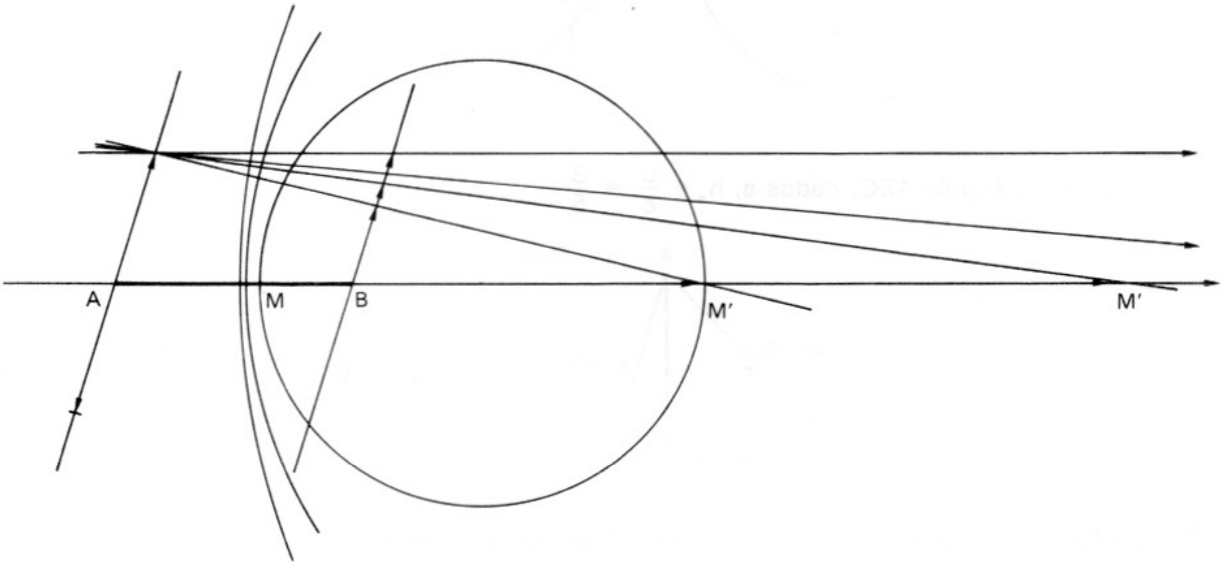
Observação: No lugar geométrico da razão constante, a razão $\frac{m}{n}$ tem que ser diferente de 1. De fato, para $\frac{m}{n} = 1$ teremos m = n e, para esse caso, o ponto externo da divisão harmônica não existe ou, como se costuma dizer, esse ponto é **rejeitado ao infinito.**
Já o ponto de divisão interna é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Lembre-se de que o ponto rejeitado ao infinito é chamado **ponto impróprio.**

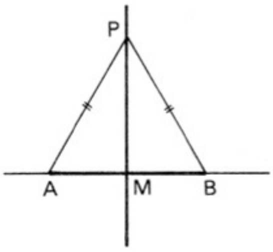


$$\frac{m}{n} = 1$$

É interessante notar que, quando a razão $\frac{m}{n}$ tende a 1, o raio da circunferência do LG 9 tende ao infinito, pois M' se afasta indefinidamente sobre a reta $\overline{AB}$. Enquanto isso, M se aproxima do ponto médio de $\overline{AB}$.



No caso limite da razão $\frac{m}{n} = 1$, a circunferência do LG 9 se degenera numa reta, que não é outra senão a mediatriz de $\overline{AB}$.



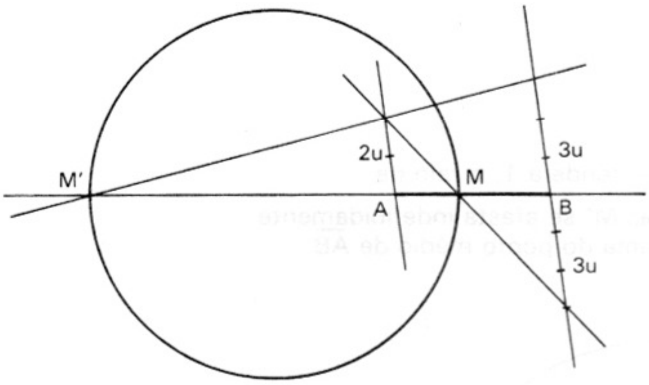
De fato, a **mediatriz** pode ser interpretada como o **lugar geométrico da razão constante e igual a 1,** pois todo ponto P da mediatriz de $\overline{AB}$ é eqüidistante de A e B. Então,

$$PA = PB \Rightarrow \boxed{\frac{PA}{PB} = 1}$$

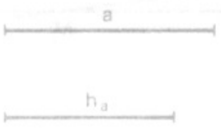
Exercícios

E1.9 Dados os pontos A e B, construa o lugar dos pontos P tais que $\frac{PA}{PB} = \frac{2}{3}$.

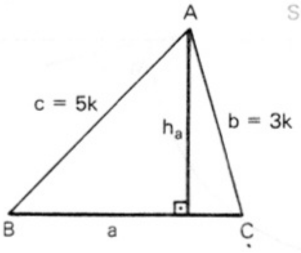
Resolução: Dividimos $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{2}{3}$, obtendo M e M′. O lugar procurado é a circunferência de diâmetro $\overline{MM'}$.



E1.10 Construa um triângulo ABC, dados a, h_a e $\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$.

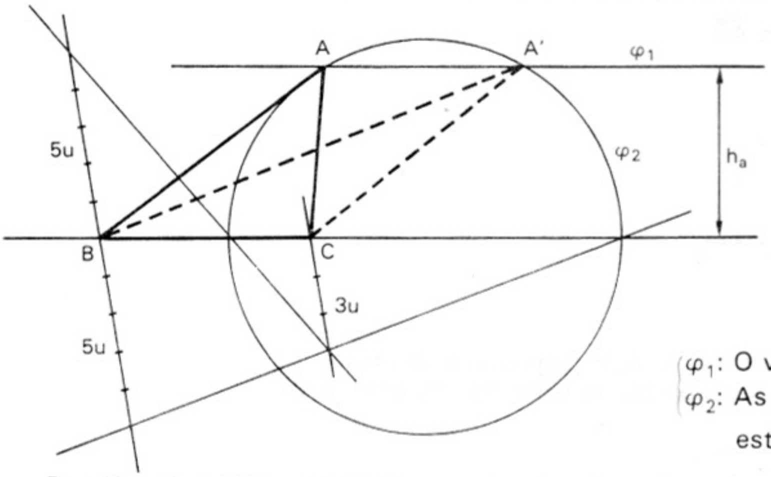


Suposto resolvido



$\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$

Resolução: Posicionando o lado $\overline{BC}$, o problema se resolve com a determinação do vértice A. Mas desse ponto conhecemos duas propriedades:

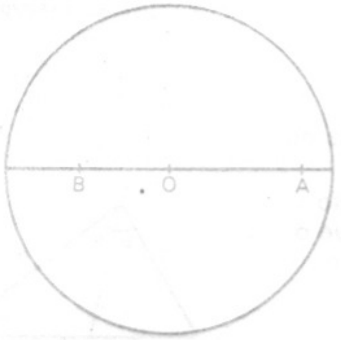


Embora o LG 3 constitua-se de duas retas paralelas à reta BC, na construção aqui apresentada só uma delas foi traçada, já que a outra nos levaria às mesmas soluções obtidas, só que em posições diferentes.

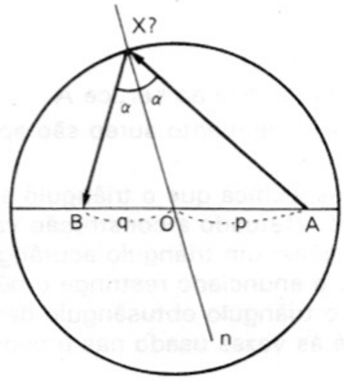
φ_1: O vértice A dista h_a de $\overline{BC}$ (LG 3).
φ_2: As distâncias de A aos vértices C e B estão na razão $\frac{3}{5}$ (LG 9).

Os triângulos ABC e A′BC são as soluções do problema.

E1. **11** Numa "mesa circular" de bilhar estão colocadas duas bolas situadas nas posições A e B de um diâmetro. Pretende-se lançar a bola situada em A para que, após ela ter se refletido num ponto X da tabela, venha atingir a bola situada no ponto B. Determine X.



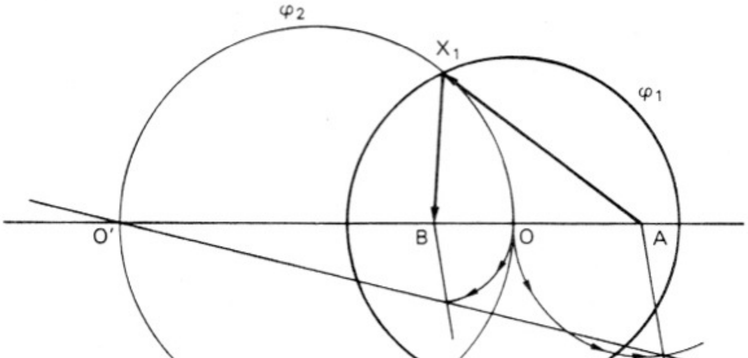
Suposto resolvido



Resolução: Observe a figura onde se supõe o problema já resolvido e seja **n** a normal à circunferência no ponto X. Uma lei da Física garante que, em relação à normal, o ângulo segundo o qual a bola incide em X é igual ao ângulo segundo o qual ela se reflete. Assim, $\overline{XO}$ é bissetriz interna do triângulo AXB e, pelo teorema das bissetrizes, $\frac{XA}{XB} = \frac{OA}{OB}$, ou ainda, $\frac{XA}{XB} = \frac{p}{q}$. Temos, então, duas propriedades para o ponto X.

Normal à circunferência no ponto X é a reta que passa por X e pelo centro da circunferência.

φ_1: X pertence à circunferência dada.
φ_2 :As distâncias de X aos pontos A e B estão na razão $\frac{p}{q}$ (LG 9).



Para construir φ_2 (LG 9) primeiro é necessário determinar O'. Esse ponto é o 4.º harmônico, cuja determinação foi estudada no E1.8.

Resolva os exercícios de 10 a 18 do caderno de atividades.

Os pontos X_1 e X_2 são as soluções do problema.

E1. **12** Construa um triângulo ABC, dados a = 50mm, m_a = 35mm e $\frac{b}{c} = \frac{2}{5}$. Qual é, aproximadamente, o perímetro desse triângulo?

E1. **13** Construa um triângulo ABC, dados a = 40mm, s_a = 45mm e $\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$. Qual é, aproximadamente, o perímetro desse triângulo? (s_a é a bissetriz interna relativa a A.)

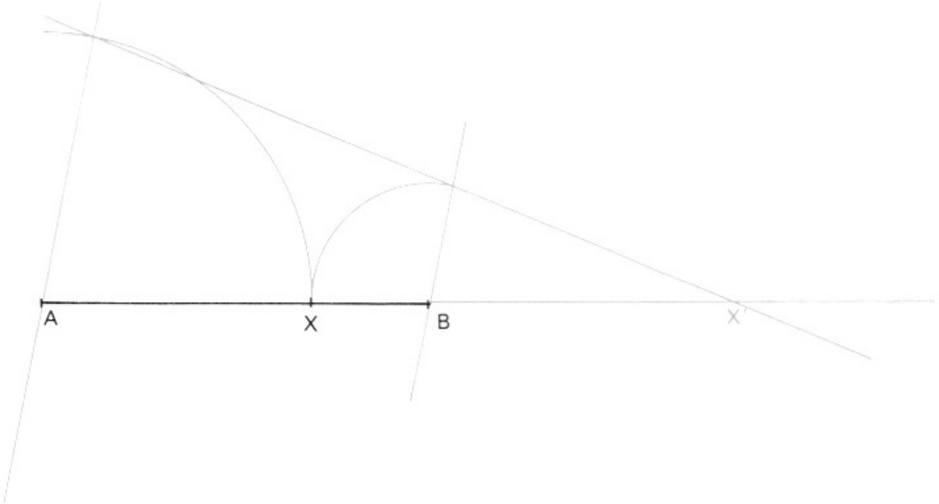
Sugestão: Lembre-se de que, ao dividir $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{3}{5}$, o ponto de divisão interna é o pé da bissetriz interna.

Divisão harmônica — Lugar geométrico da razão constante: LG 9

Figura auxiliar e anotações

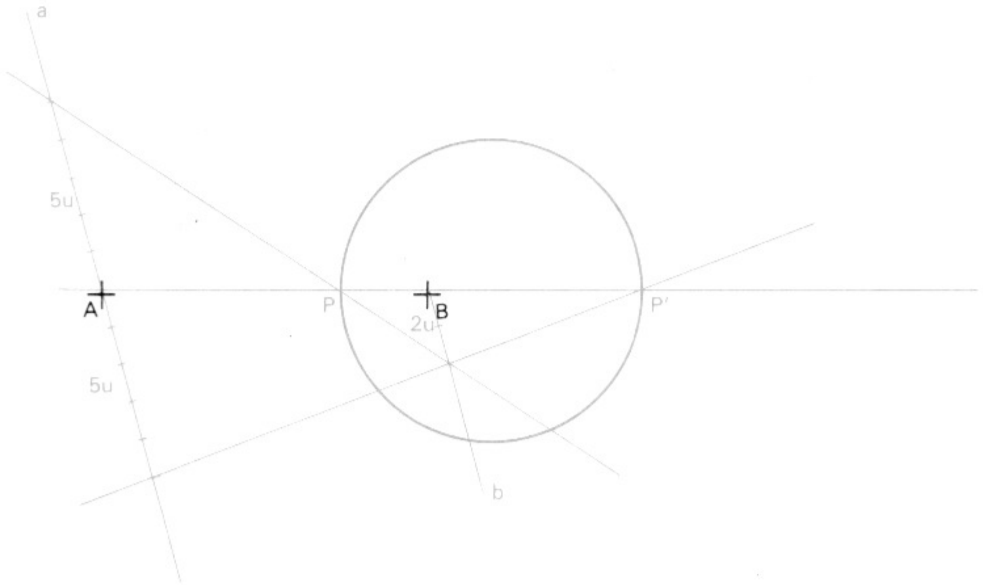
9 Os pontos X e X′ dividem $\overline{AB}$ harmonicamente. Dados A, X e B, determine X′.

Observação:
Alerte o aluno para o fato de que a determinação do 4.º harmônico será freqüentemente necessária nos problemas do próximo lugar geométrico.



10 Construa o lugar dos pontos P tais que $\frac{PA}{PB} = \frac{5}{2}$.

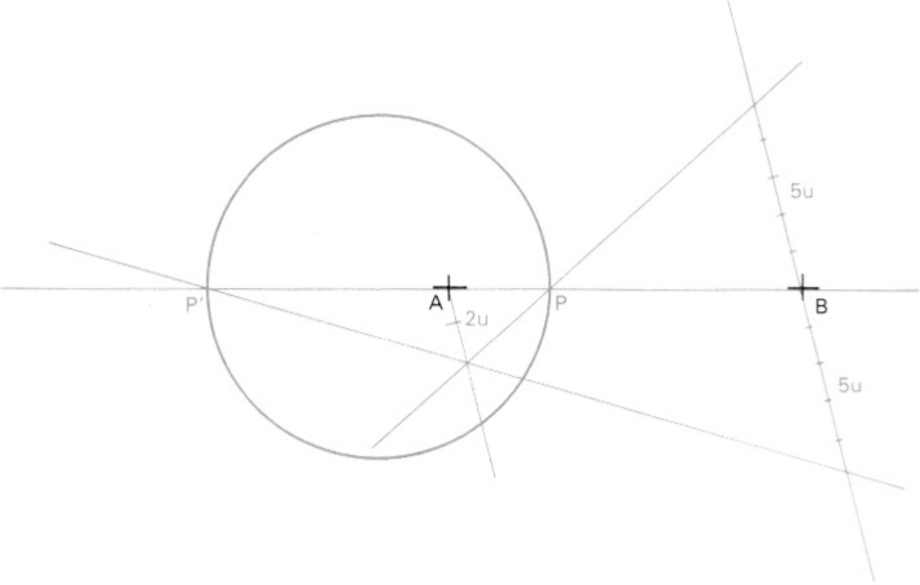
Observação:
Insista na diferença entre os lugares:
$\frac{PA}{PB} = \frac{5}{2}$ e $\frac{PA}{PB} = \frac{2}{5}$.
Caso haja dúvidas, pode-se orientar o aluno para que, nas retas **a** e **b**, paralelas, conduzidas por A e B, em $\frac{PA}{PB} = \frac{5}{2}$ coloque 5u a partir de A e 2u a partir de B, como sugerem as setas.



Lugar geométrico da razão constante: LG 9

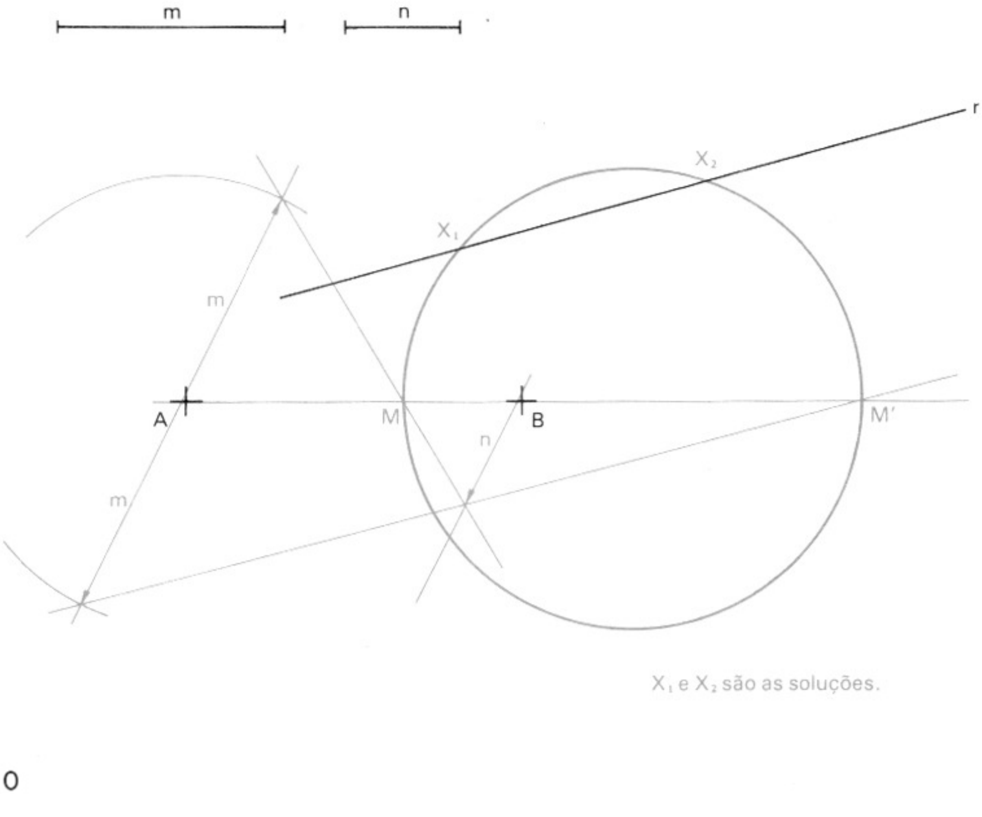
Figura auxiliar e anotações

11 Construa o lugar dos pontos P tais que $\frac{PA}{PB} = \frac{2}{5}$.



12 Determine um ponto X da reta **r**, de modo que se tenha $\frac{XA}{XB} = \frac{m}{n}$.

Observação:
Reforce que M e M' são pés das bissetrizes interna e externa, respectivamente, dos triângulos X_1AB e X_2AB.

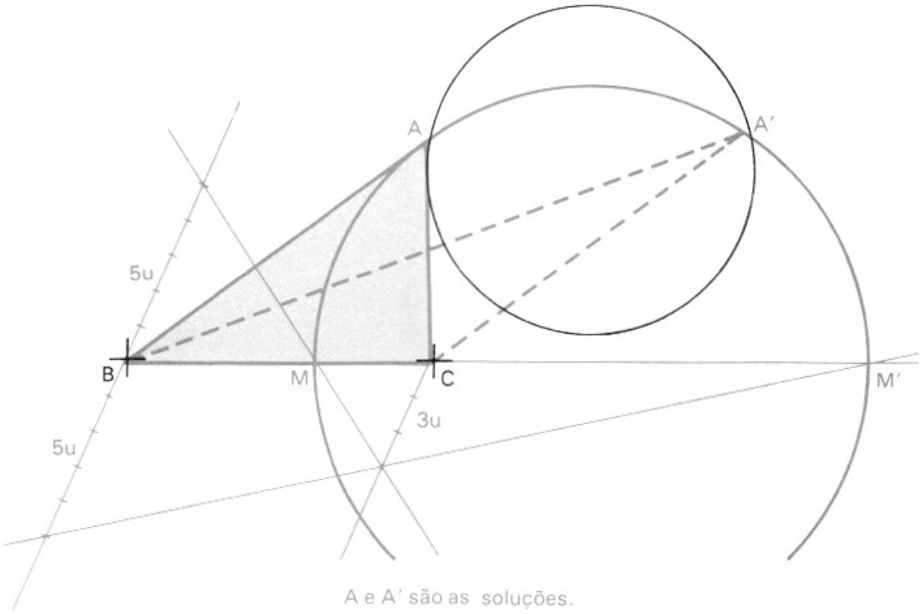


X_1 e X_2 são as soluções.

Divisão harmônica — Lugar geométrico da razão constante: LG 9

Figura auxiliar e anotações

13 Determine o vértice A de um triângulo ABC, sabendo que $\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$ e que A pertence à circunferência dada.



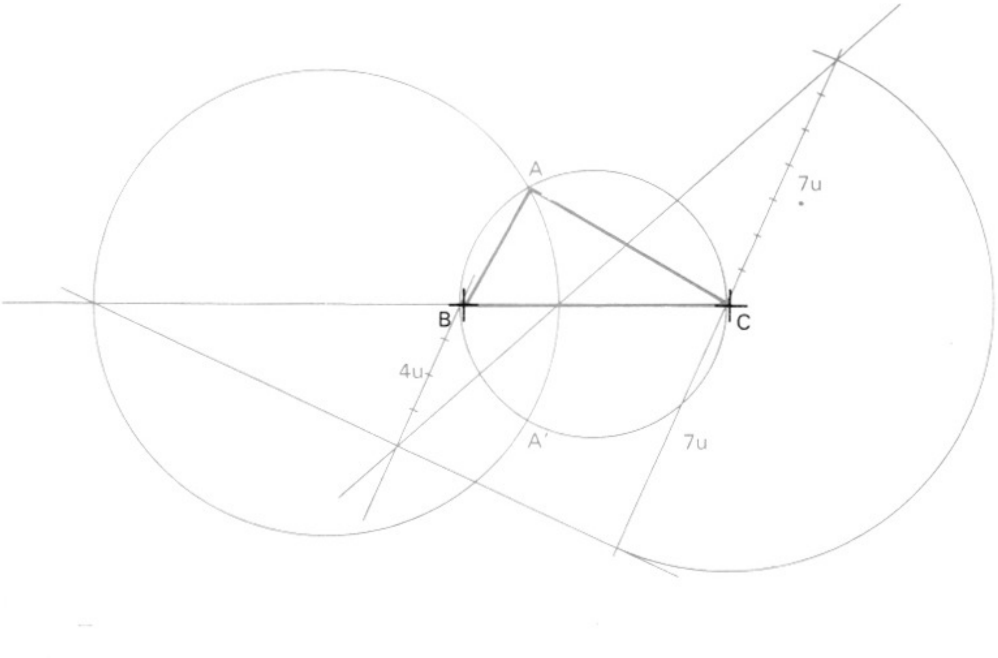
A e A' são as soluções.

14 Construa um triângulo ABC retângulo em A, dados os vértices B e C, e sabendo que $\frac{b}{c} = \frac{7}{4}$.

Observação: A, B e C, no sentido anti-horário.

Sugestão: **LG 5** e **LG 10**.

Observação:
Volte a reforçar que a solução A'BC não é aceita por não estarem A', B e C no sentido anti-horário.

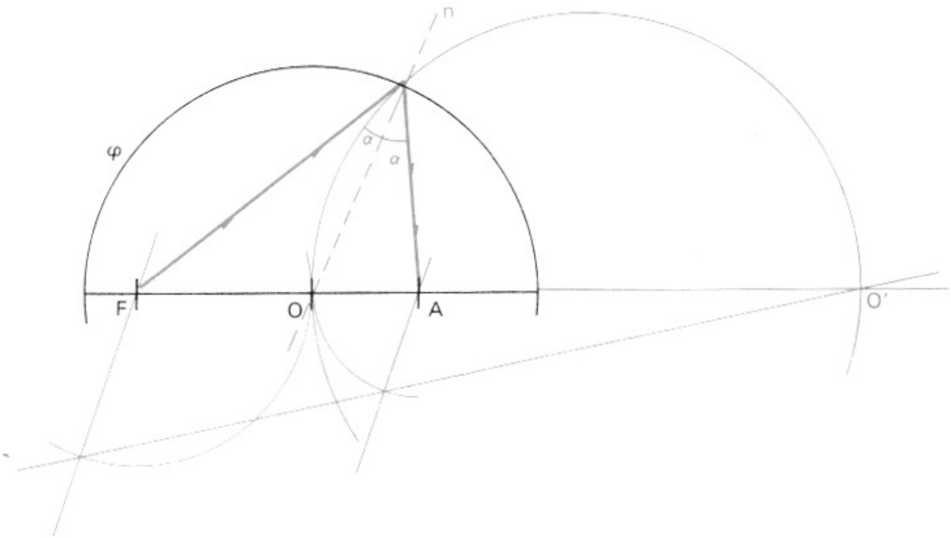


Lugar geométrico da razão constante: LG 9

Figura auxiliar e anotações

15 Na figura, φ é um espelho esférico de centro O, F é uma fonte de luz e A é um objeto. Determine a trajetória que deve seguir um raio de luz emitido por F, para que ele se reflita em φ e ilumine o objeto A.

Sugestão: O raio de luz desloca-se segundo a mesma lei pela qual se desloca a bola de bilhar, E1. **11**.

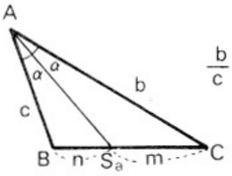


Observação:
Comente que esse problema só tem solução exata quando F e A estão situados sobre um diâmetro de φ, já que a determinação de O' (4° harmônico) só é possível porque O está no segmento AF.

16 Construa um triângulo ABC (A, B e C, no sentido anti-horário), dados $\overline{BC}$, S_a e s_a.

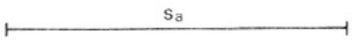
Observação: S_a é o pé da bissetriz e s_a é o comprimento dela.

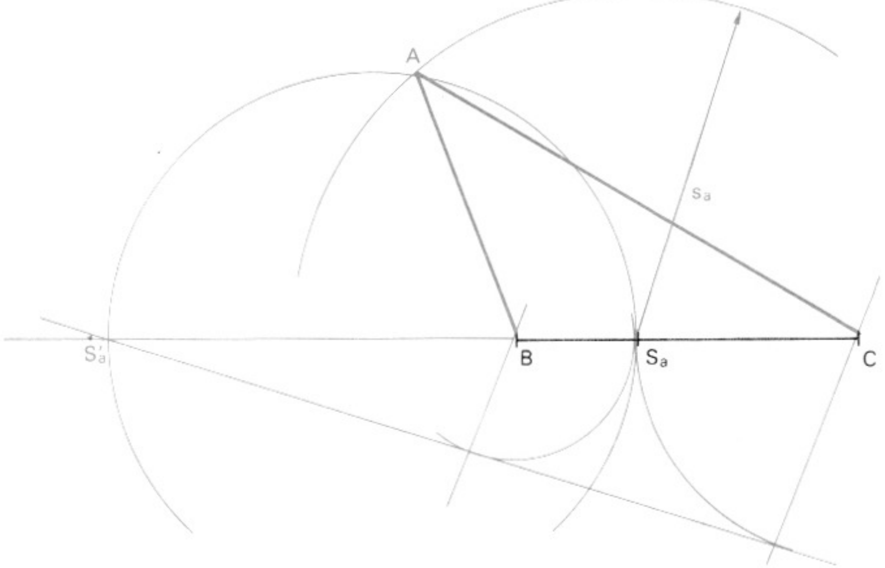
Sugestão: Lembre-se do teorema das bissetrizes.



$$\frac{b}{c} = \frac{m}{n}$$

Sugestão:
Podem-se propor exercícios em que sejam dados:
$\overline{BC}$, S_a e m_a
$\overline{BC}$, S_a e $\hat{A}$
$\overline{BC}$, S_a e h_a etc.



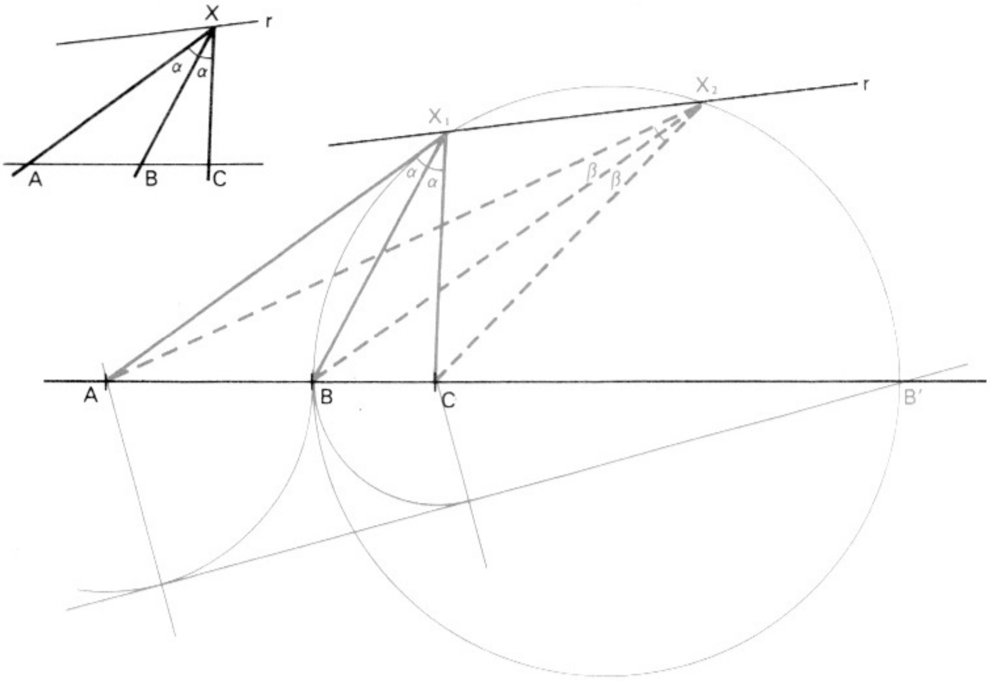


Lugar geométrico da razão constante: LG 9

Figura auxiliar e anotações

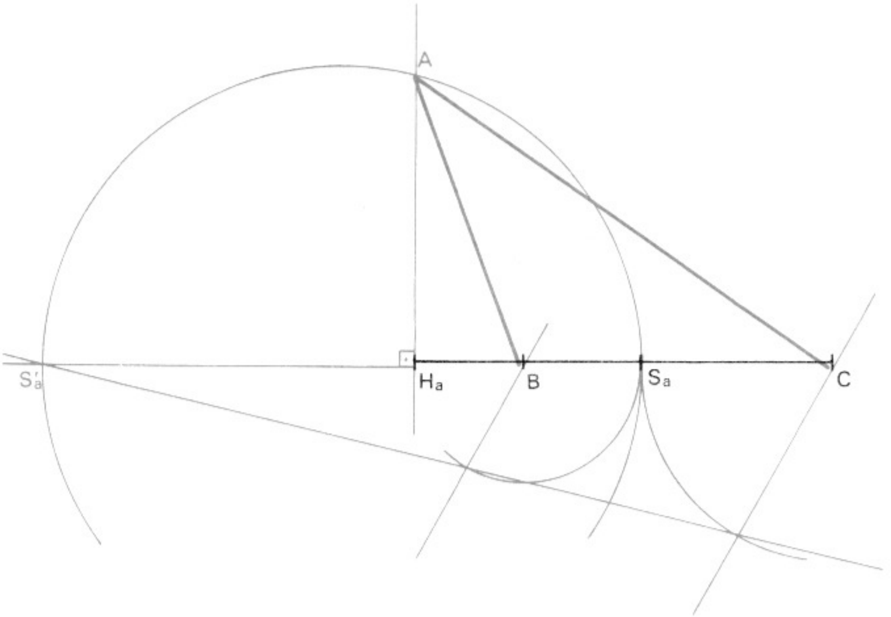
Observação: O aluno tende a pensar no arco capaz para a resolução desse problema. Caso surja tal idéia, comente que, entre outras coisas, para se pensar em arco capaz é necessário conhecer o ângulo, e isso não ocorre neste exercício.

17 Determine um ponto X de **r** que veja os segmentos AB e BC segundo ângulos congruentes, isto é, $\sphericalangle A\hat{X}B \equiv \sphericalangle B\hat{X}C$.
Sugestão: $\overline{XB}$ é bissetriz interna do triângulo AXC.

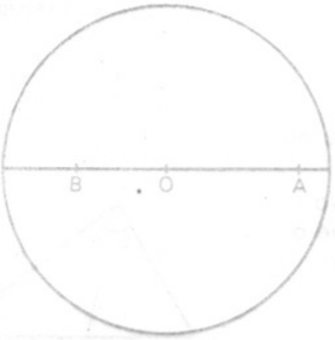


X_1 e X_2 são as soluções.

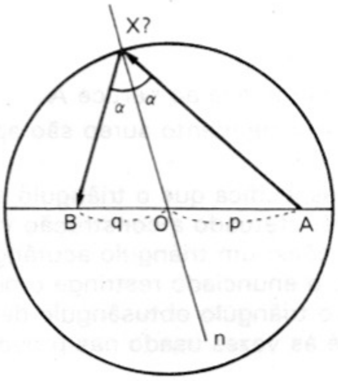
18 Construa um triângulo ABC, dados $\overline{BC}$, S_a e H_a (pé da altura).
Observação: A, B e C, no sentido anti-horário.



E1. 11 Numa "mesa circular" de bilhar estão colocadas duas bolas situadas nas posições A e B de um diâmetro. Pretende-se lançar a bola situada em A para que, após ela ter se refletido num ponto X da tabela, venha atingir a bola situada no ponto B. Determine X.



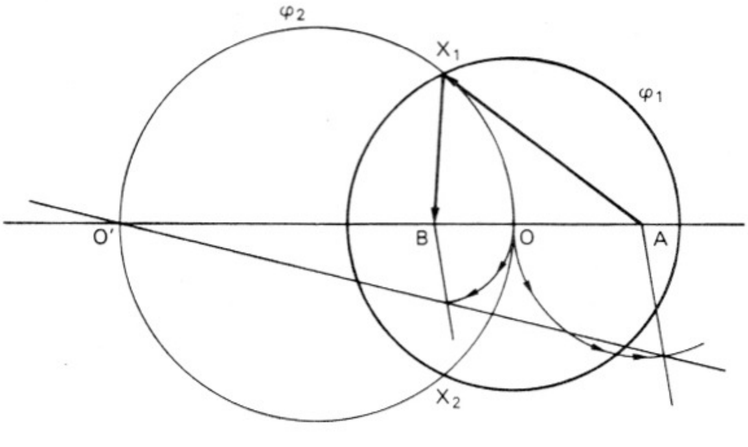
Suposto resolvido



Resolução: Observe a figura onde se supõe o problema já resolvido e seja **n** a normal à circunferência no ponto X. Uma lei da Física garante que, em relação à normal, o ângulo segundo o qual a bola incide em X é igual ao ângulo segundo o qual ela se reflete. Assim, $\overline{XO}$ é bissetriz interna do triângulo AXB e, pelo teorema das bissetrizes, $\frac{XA}{XB} = \frac{OA}{OB}$, ou ainda, $\frac{XA}{XB} = \frac{p}{q}$. Temos, então, duas propriedades para o ponto X.

Normal à circunferência no ponto X é a reta que passa por X e pelo centro da circunferência.

φ_1: X pertence à circunferência dada.
φ_2 :As distâncias de X aos pontos A e B estão na razão $\frac{p}{q}$ (LG 9).



Para construir φ_2 (LG 9) primeiro é necessário determinar O'. Esse ponto é o 4.º harmônico, cuja determinação foi estudada no E1.8.

Resolva os exercícios de 10 a 18 do caderno de atividades.

Os pontos X_1 e X_2 são as soluções do problema.

E1. 12 Construa um triângulo ABC, dados a = 50mm, m_a = 35mm e $\frac{b}{c} = \frac{2}{5}$. Qual é, aproximadamente, o perímetro desse triângulo?

E1. 13 Construa um triângulo ABC, dados a = 40mm, s_a = 45mm e $\frac{b}{c} = \frac{3}{5}$. Qual é, aproximadamente, o perímetro desse triângulo? (s_a é a bissetriz interna relativa a A.)

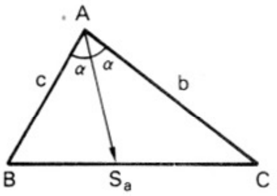
Sugestão: Lembre-se de que, ao dividir $\overline{AB}$ harmonicamente na razão $\frac{3}{5}$, o ponto de divisão interna é o pé da bissetriz interna.

E1.14 Construa um triângulo ABC, dados a = 36mm, $\hat{B} = 105°$ e $\frac{b}{c} = \frac{7}{4}$.
Qual é, aproximadamente, o comprimento da bissetriz interna relativa ao vértice A?

E1.15 Construa um triângulo ABC sabendo que BC = 65mm, $BS_a = 25$mm e que a altura relativa ao vértice A (h_a) é o segmento áureo de $\overline{BC}$. Se esse triângulo é acutângulo, qual é, aproximadamente, a medida de $\hat{A}$?

Sugestão: A razão das distâncias de A aos vértices B e C é conhecida, pois, pelo teorema das bissetrizes, sabemos que:

$$\frac{b}{c} = \frac{CS_a}{BS_a}$$



Observações para o E1.15:

- S_a é o pé da bissetriz interna relativa ao vértice A.
- A definição e a construção do segmento áureo são apresentadas no volume 1, páginas 140 a 142.
- O enunciado do problema especifica que o triângulo é acutângulo. Pois bem, quando você tiver efetuado a construção vai notar que o problema admite duas soluções: um triângulo acutângulo e outro obtusângulo. Dessa forma, o enunciado restringe o número de soluções a uma só, já que o triângulo obtusângulo deve ser desprezado. Esse artifício é às vezes usado nas provas de vestibulares do ITA.

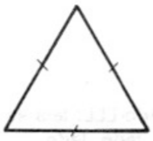
2

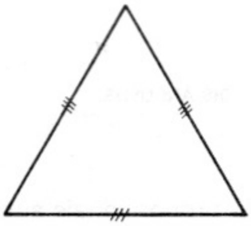
O método da semelhança

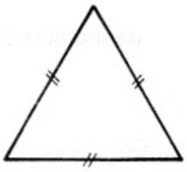
Para dar uma idéia mais concreta do que vem a ser o método da semelhança, convém analisarmos um exemplo de situação em que ele pode ser empregado. Para tanto, considere os seguintes problemas:

- **Construir um triângulo eqüilátero.**
- **Construir um triângulo eqüilátero de altura h dada.**

O primeiro problema é indeterminado, pois, embora a forma do triângulo esteja definida, o seu tamanho não está. Assim, qualquer triângulo eqüilátero que construirmos será uma solução do problema.







Agora vamos analisar atentamente o segundo problema. Observe que, pelo fato de o triângulo procurado ser eqüilátero, a **sua forma é conhecida.** Mas, como esse triângulo deve ter uma altura **h** dada, o **seu tamanho também está definido.** Vejamos como se pode construir esse triângulo.

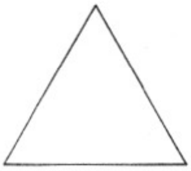
Fique atento a essas duas características das figuras, que são a **forma** e o **tamanho.** Em torno delas é que gira o método da semelhança.

1.º) Constrói-se um triângulo eqüilátero de tamanho arbitrário.

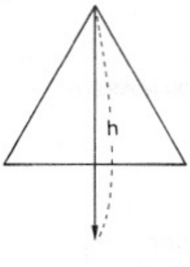
2.º) Nesse triângulo auxiliar, introduz-se o **elemento linear h** dado.

3.º) Por homotetia, constrói-se o triângulo procurado com o tamanho exigido.

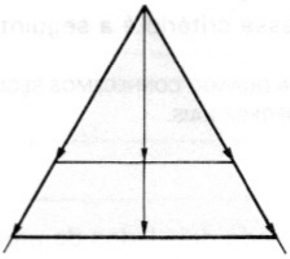
1.º passo



2.º passo



3.º passo



É muito importante você observar que a resolução do problema teve, essencialmente, duas etapas:

- Na primeira estabeleceu-se a **forma.**
- Na segunda, o **tamanho.**

Também é fundamental você notar que o tamanho foi definido pelo **elemento linear h.**

Pois bem, a técnica utilizada na resolução desse problema é chamada **método da semelhança.** O nome se justifica pelo fato de partirmos de uma figura semelhante à procurada, mas de tamanho arbitrário, para em seguida dar a ela o tamanho desejado.

Em síntese, o método pode ser aplicado sempre que se pede a construção de uma figura da qual é dado ao menos um **elemento linear** e cujos outros elementos dados definem a forma da figura. Particularmente, para que você possa decidir quando empregá-lo nas construções de triângulos, convém rever brevemente os critérios de semelhança de triângulos.

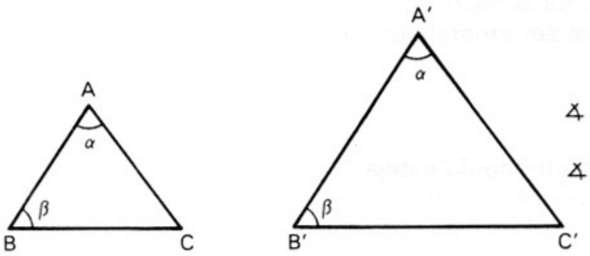
Na realidade, já tivemos a oportunidade de aplicar essa técnica de resolução nas construções de polígonos regulares e nos problemas de equivalência, no volume 2 desta coleção. Mas, agora, estamos dando um caráter mais geral ao método.

Recordando os critérios de semelhança

Critério AA

Dois triângulos são semelhantes quando dois ângulos de um são, respectivamente, congruentes a dois ângulos do outro.

Critério AA: leia-se critério **ângulo, ângulo.**



$$\left.\begin{matrix} \measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{A}' \\ \text{e} \\ \measuredangle \hat{B} \equiv \measuredangle \hat{B}' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

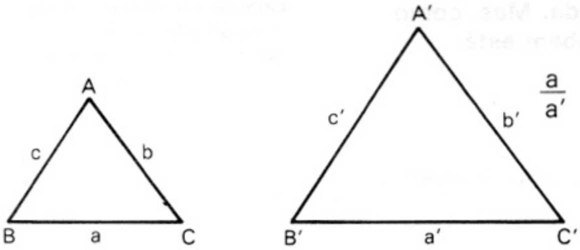
Esse critério, agora, deve ser interpretado da seguinte maneira.

A FORMA DE UM TRIÂNGULO FICA DEFINIDA QUANDO DELE CONHECEMOS DOIS ÂNGULOS.

Critério LLL

Dois triângulos são semelhantes quando os lados de um são proporcionais aos lados do outro.

Critério LLL: leia-se critério **lado, lado, lado.**



$$\left.\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

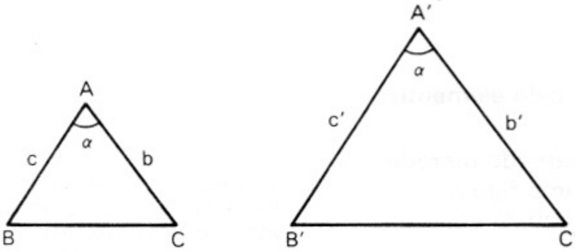
A interpretação que nos convém desse critério é a seguinte:

A FORMA DE UM TRIÂNGULO FICA DEFINIDA QUANDO CONHECEMOS SEGMENTOS OU NÚMEROS AOS QUAIS OS SEUS TRÊS LADOS SÃO PROPORCIONAIS.

Critério LAL

Dois triângulos são semelhantes quando dois lados de um são proporcionais a dois lados do outro e os ângulos compreendidos entre esses lados são congruentes.

Critério LAL: leia-se critério **lado, ângulo, lado.**



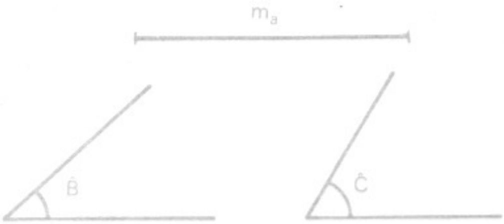
$$\left.\begin{matrix} \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \\ \text{e} \\ \measuredangle \hat{A} \equiv \measuredangle \hat{A}' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

A interpretação conveniente é a seguinte:

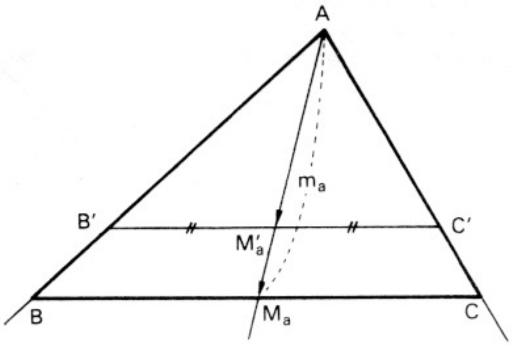
A FORMA DE UM TRIÂNGULO FICA DEFINIDA QUANDO DELE CONHECEMOS A RAZÃO DE DOIS LADOS E O ÂNGULO COMPREENDIDO ENTRE ELES.

Exercícios

E2. **1** Construa um triângulo ABC, dados $\hat{B}$, $\hat{C}$ e m_a.

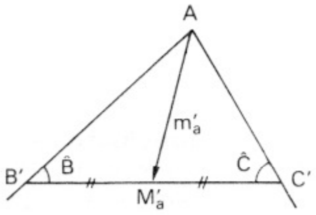


Resolução: Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ definem a forma do triângulo procurado, mas não o tamanho. Então, construímos um triângulo AB'C' de tamanho arbitrário com $\hat{B}' = \hat{B}$ e $\hat{C}' = \hat{C}$, e, em seguida, introduzimos nesse triângulo o elemento linear m_a. Então, por homotetia, construímos o triângulo no tamanho exigido.

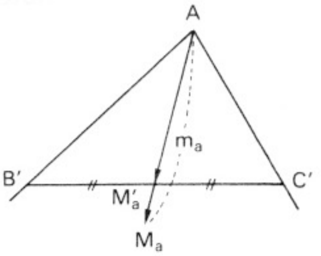


Evolução do traçado

1.º passo

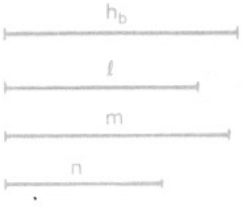


2.º passo



E2. **2** Construa um triângulo ABC, dados $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 45°$ e $s_a = 60\text{mm}$. Qual é, aproximadamente, a medida de $\overline{BC}$?

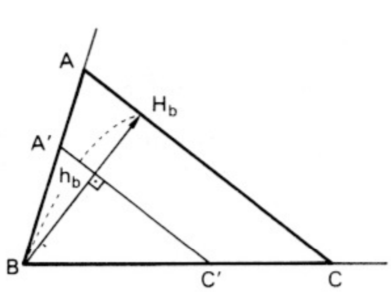
E2. **3** Construa um triângulo ABC, dados h_b e os segmentos ℓ, **m** e **n** proporcionais a **a**, **b** e **c**, respectivamente.



Resolução: A forma do triângulo está definida, uma vez que os seus lados são proporcionais aos segmentos conhecidos ℓ, **m** e **n**, isto é,

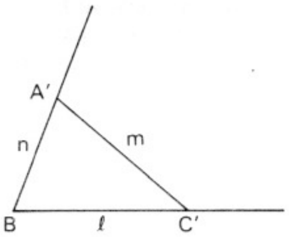
$$\frac{a}{\ell} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}$$

Então, construímos o triângulo A'BC' de lados ℓ, **m**, **n**, e em seguida introduzimos o elemento linear h_b. Por homotetia, construímos o triângulo ABC com o tamanho desejado.

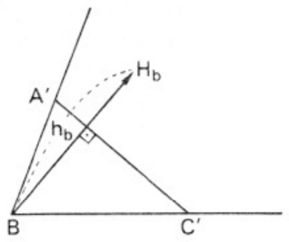


Evolução do traçado

1.º passo

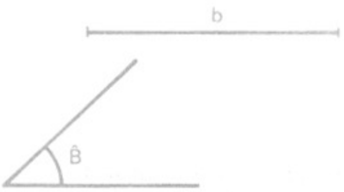


2.º passo

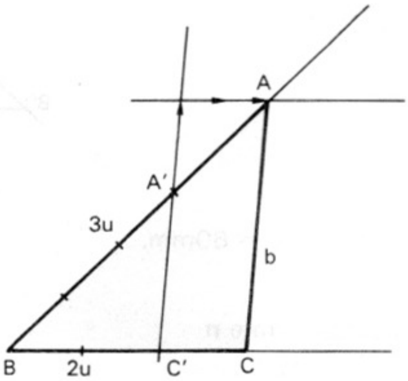


E2.**4** Construa um triângulo ABC sabendo que **a**, **b** e **c** são proporcionais a 5, 6 e 7 e que $m_a = 58$mm. Qual é, aproximadamente, a medida do menor lado desse triângulo?

E2.**5** Construa um triângulo ABC, dados $\hat{B}$, b e $\frac{a}{c} = \frac{2}{3}$.

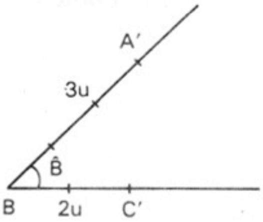


Resolução: A forma do triângulo procurado está definida, pois dele conhecemos a razão de dois lados e o ângulo compreendido entre eles. Assim, primeiramente, construímos um triângulo A'BC', de tamanho arbitrário, que tenha os lados adjacentes ao ângulo $\hat{B}$ proporcionais a 2 e 3. Então, introduzimos o elemento linear **b** por translação, obtendo o triângulo procurado.

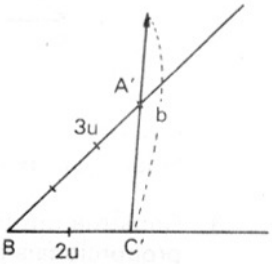


Evolução do traçado

1.º passo



2.º passo



E2.**6** Construa um triângulo ABC, dados $\hat{A} = 60°$, $s_b = 65$mm e $\frac{b}{c} = \frac{4}{7}$. Qual é, aproximadamente, a medida de $\overline{AC}$?

E2.**7** O segmento dado é o lado de um decágono regular inscrito numa circunferência. Obtenha o lado do pentágono regular inscrito na mesma circunferência.

Resolução: Conforme estudamos no volume 2, o ℓ_5 procurado é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são o ℓ_6 e o ℓ_{10}, para o pentágono, o hexágono e o decágono regulares inscritos numa mesma circunferência (ou circunferências de raios iguais). Por outro lado, considerando os lados ℓ'_5, ℓ'_6 e ℓ'_{10} relativos a uma mesma circunferência, teremos:

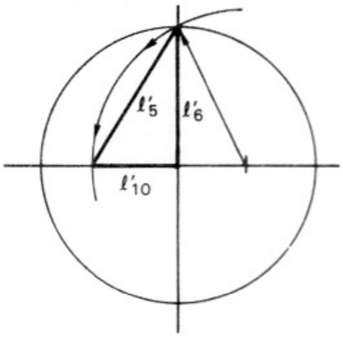
$$\frac{\ell_5}{\ell'_5} = \frac{\ell_6}{\ell'_6} = \frac{\ell_{10}}{\ell'_{10}} \text{ (justificativa ao lado)}$$

Por semelhança de triângulos, demonstra-se que sendo ℓ_k e ℓ'_k, ℓ_n e ℓ'_n, respectivamente, os lados de polígonos regulares de **k** e **n** lados inscritos em circunferências de raios **r** e **r'**, tem-se sempre:

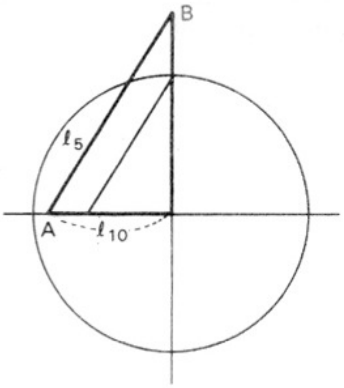
$$\frac{\ell_k}{\ell'_k} = \frac{\ell_n}{\ell'_n}$$

Então, tomamos uma circunferência de raio r′ arbitrário e construímos um triângulo de lados ℓ'_5, ℓ'_6 e ℓ'_{10}. Introduzindo nesse triângulo o ℓ_{10} dado, obtemos facilmente o ℓ_5 procurado.

1.º passo



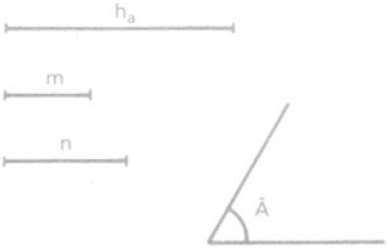
2.º passo



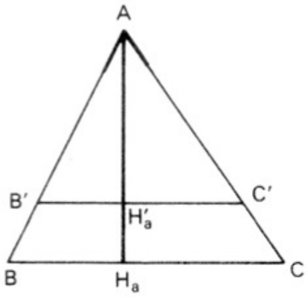
O segmento AB é o ℓ_5 procurado.

E2.8 Um pentágono e um decágono regulares estão inscritos numa mesma circunferência. Se o lado do pentágono mede 52mm, qual é a medida do lado do decágono? (Resolva graficamente.)

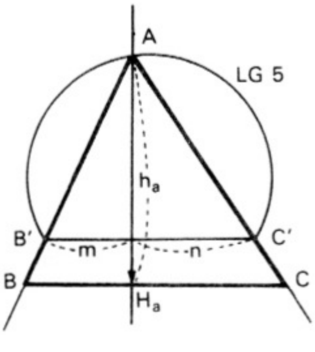
E2.9 Construa um triângulo ABC acutângulo, dados Â, h_a e sabendo que $\frac{BH_a}{CH_a} = \frac{m}{n}$.

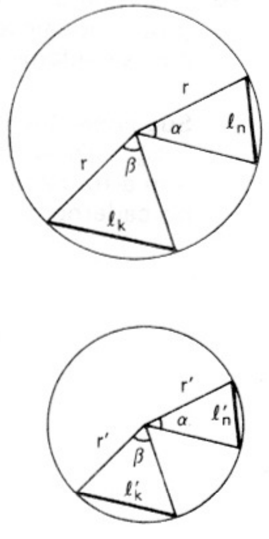


Suposto resolvido



Resolução: Suponhamos o problema já resolvido e tracemos $\overline{B'C'}$ paralelo a $\overline{BC}$. Ora, o triângulo AB′C′ é semelhante ao triângulo procurado, logo nele também se dá a proporção $\frac{D'H'_a}{C'H'_a} = \frac{m}{n}$. Como o seu tamanho é arbitrário, por conveniência, vamos tomar $B'H'_a = m$ e $C'H'_a = n$. Então, o triângulo AB′C′ pode ser construído, pois dele conhecemos Â, B′C′ e H'_a. Após sua construção, introduzimos h_a na figura e obtemos o triângulo ABC.



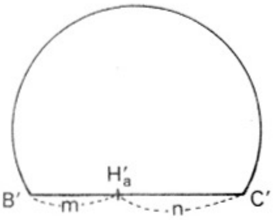


$$\frac{\ell_k}{\ell'_k} = \frac{r}{r'} \quad e \quad \frac{\ell_n}{\ell'_h} = \frac{r}{r'}$$

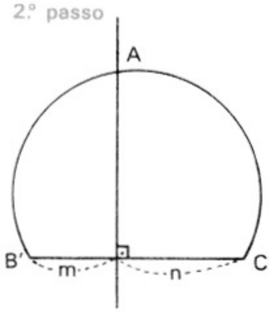
$$\therefore \boxed{\frac{\ell_k}{\ell'_k} = \frac{\ell_n}{\ell'_n}}$$

Evolução do traçado

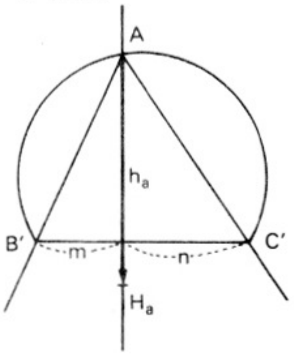
1.º passo



2.º passo

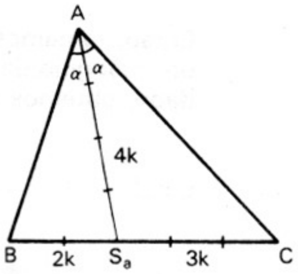


3.º passo



E2. **10** Construa um triângulo ABC, sabendo que $\overline{AS_a}$, $\overline{BS_a}$ e $\overline{CS_a}$ são proporcionais a 4, 2 e 3, respectivamente, e que AB = 65mm. Qual é, aproximadamente, o comprimento da bissetriz interna $\overline{AS_a}$?

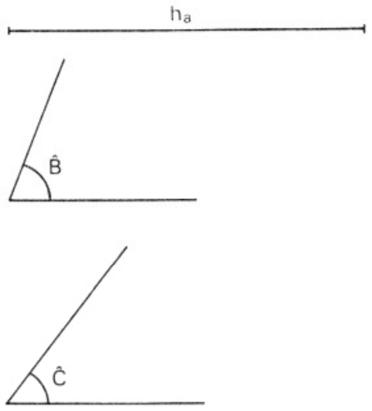
Sugestão: Sendo **u** uma unidade arbitrária e fazendo $AS'_a = 4u$, $B'S'_a = 2u$ e $C'S'_a = 3u$ é possível construir um triângulo AB'C' que tem a forma do triângulo procurado. Tal construção é o exercício 16 do caderno de atividades.

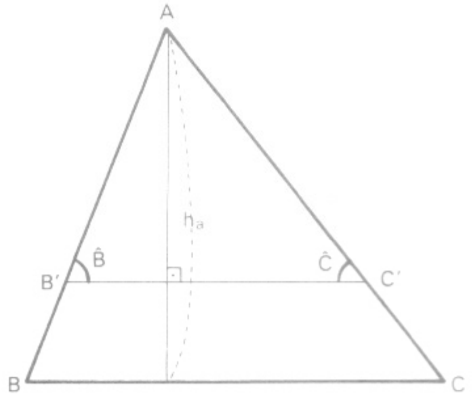


Resolva os exercícios de 19 a 26 do caderno de atividades.

Semelhança: construção de triângulos

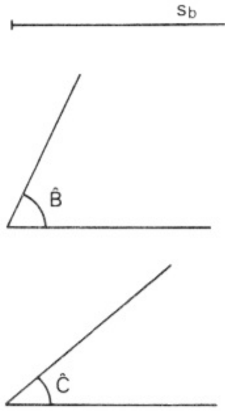
19 Construa um triângulo ABC, dados B̂, Ĉ e h_a.

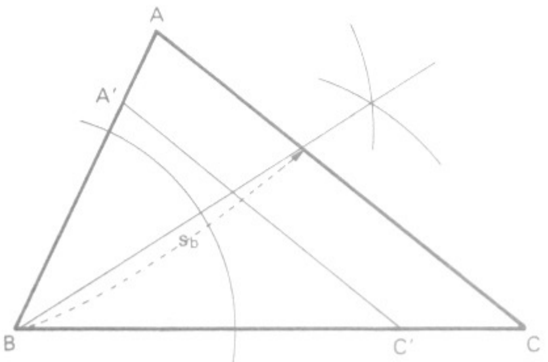




Construção a partir do triângulo AB′C′.

20 Construa um triângulo ABC, dados B̂, Ĉ e s_b.





Construção a partir do triângulo A′BC′.

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Reforce, para o aluno, que a construção pelo método da semelhança divide-se em duas etapas.

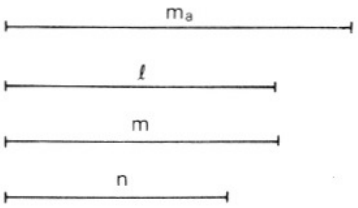
1.º) primeiro, caracteriza-se a forma;
2.º) em seguida, define-se o tamanho.

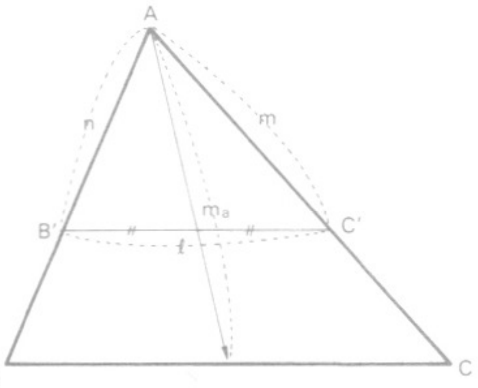
Semelhança: construção de triângulos

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Comente que um indício de que a forma da figura procurada está definida é a presença de razões entre elementos lineares e ângulos nos dados do problema.

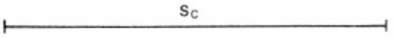
21 Construa um triângulo ABC, dados m_a e os segmentos **ℓ**, **m** e **n**, proporcionais aos lados **a**, **b** e **c**, respectivamente.

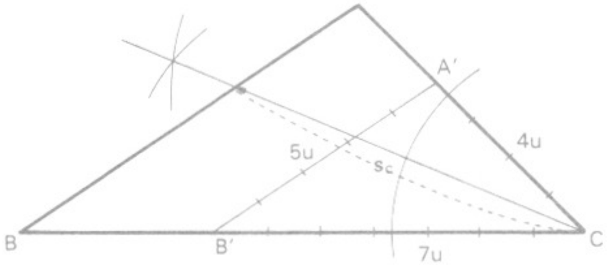




Construção a partir do triângulo AB'C'.

22 Construa um triângulo ABC, dado s_c, e sabendo que $\frac{a}{7} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$.



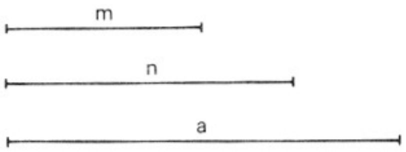


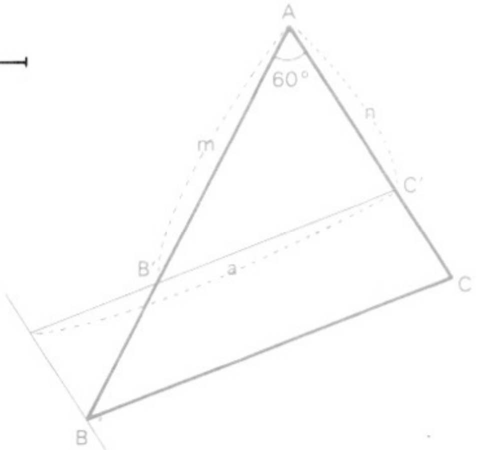
Construção a partir do triângulo A'B'C, com **u** arbitrário.

Semelhança: construção de triângulos

Figura auxiliar e anotações

23 Construa um triângulo ABC, dados $\hat{A} = 60°$, **a** e $\frac{b}{c} = \frac{m}{n}$.



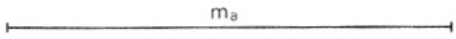


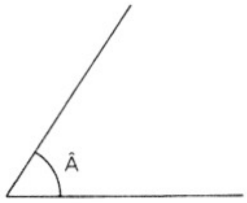
Construção a partir do triângulo AB'C'.

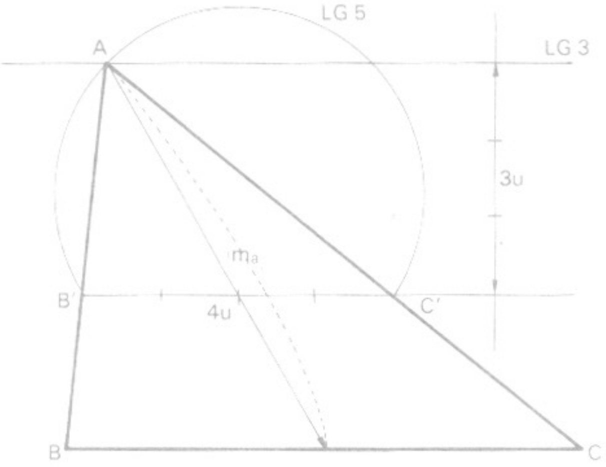
24 Construa um triângulo ABC, dados Â, m_a e sabendo que $\frac{a}{h_a} = \frac{4}{3}$.

Sugestão: Você pode construir um triângulo AB'C', semelhante ao triângulo procurado, utilizando os seguintes dados: Â, $a' = 4u$ e $h'_a = 3u$

Observação:
É interessante comentar que, além dos três critérios de semelhança apresentados, há muitos outros, estes, no entanto, não são suficientemente importantes para serem estudados isoladamente. Por exemplo, Â e $\frac{a}{h_a}$ definem a forma do triângulo.



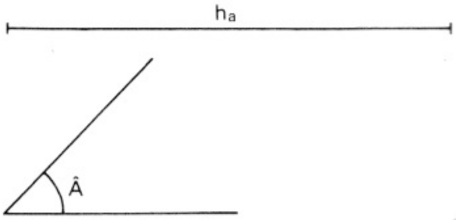


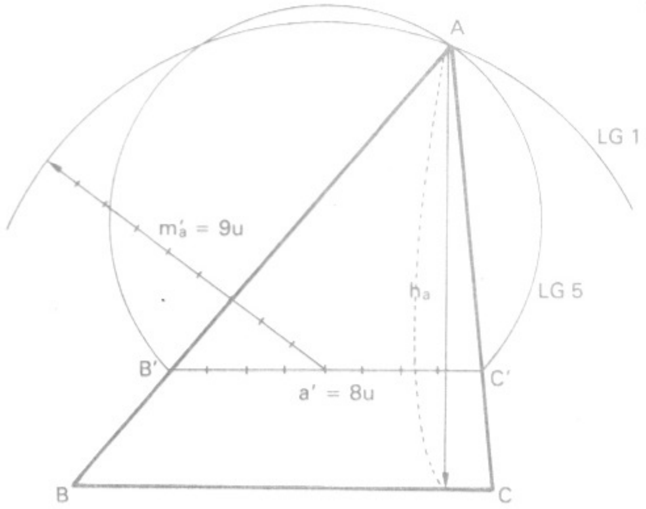


Construção a partir do triângulo AB'C'.

Semelhança: construção de triângulos

25 Construa um triângulo ABC, dados Â, h_a e sabendo que $\frac{a}{m_a} = \frac{8}{9}$.

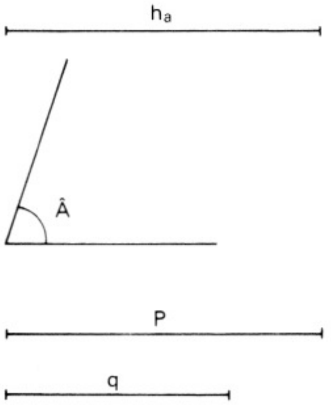


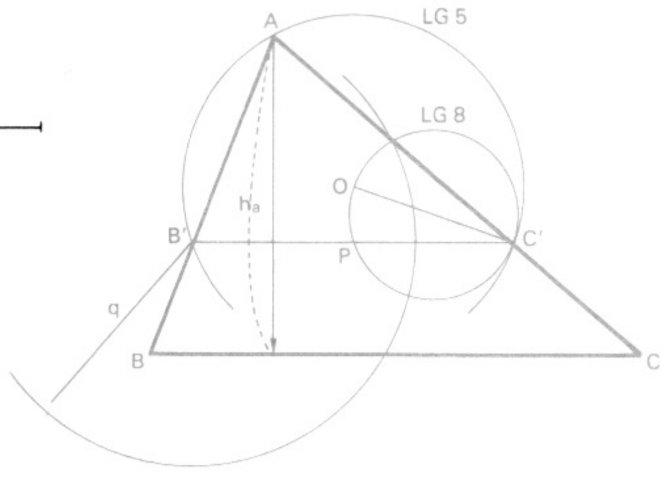

A
LG 1
m'_a = 9u
h_a
LG 5
B'
C'
a' = 8u
B
C

Construção a partir do triângulo AB'C'.

26 Construa um triângulo ABC, dados Â, h_a e sabendo que $\frac{a}{m_b} = \frac{p}{q}$.

Sugestão: Você pode construir um triângulo semelhante ao triângulo procurado com os seguintes elementos:
Â, $a' = p$ e $m'_b = q$
Ver E1.**4** (**LG 5** e **LG 8**)




A
LG 5
LG 8
O
h_a
B'
C'
P
q
B
C

3

Quadriláteros inscritíveis

No volume 1 desta coleção, há um capítulo dedicado às construções de quadriláteros. A título de complementação do assunto, vamos agora realizar um estudo das construções de quadriláteros inscritíveis em circunferências.

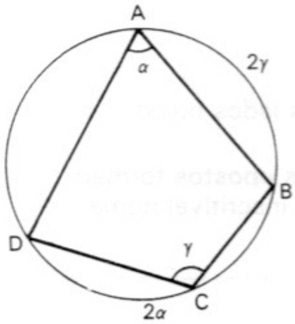
Teoremas

1.º) Todo quadrilátero inscrito numa circunferência possui os pares de **ângulos opostos suplementares**.

2.º) Reciprocamente, todo quadrilátero que possui um par de **ângulos opostos suplementares** é inscritível numa circunferência.

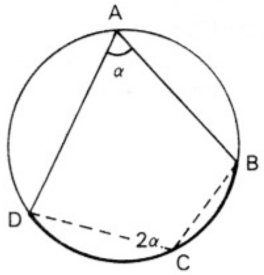
☐ Demonstrações:

Para o primeiro teorema, consideremos um quadrilátero ABCD inscrito numa circunferência e sejam $\hat{A} = \alpha$ e $\hat{C} = \gamma$.



Lembre-se de que a medida de um ângulo inscrito numa circunferência é igual à metade da medida do arco que ele enxerga. Isso permite concluir que:

$$\hat{A} = \alpha \Rightarrow \overset{\frown}{BCD} = 2\alpha$$
$$\hat{C} = \gamma \Rightarrow \overset{\frown}{BAD} = 2\gamma$$



Então, teremos: $\overset{\frown}{BCD} = 2\alpha$ e $\overset{\frown}{BAD} = 2\gamma$

Como $\overset{\frown}{BCD} + \overset{\frown}{BAD} = 360°$, podemos escrever:

$$2\alpha + 2\gamma = 360°$$
$$\therefore \ \boxed{\alpha + \gamma = 180°}$$

Esta última igualdade mostra que os ângulos opostos Â e Ĉ são suplementares.

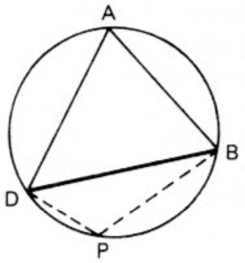
Note que, se $\measuredangle\hat{A}$ e $\measuredangle\hat{C}$ são suplementares, então $\measuredangle\hat{B}$ e $\measuredangle\hat{D}$ também são suplementares, pois:

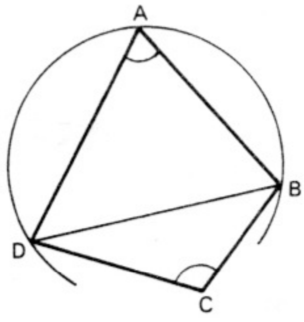
$$\underbrace{\hat{A} + \hat{C}}_{180°} + \hat{B} + \hat{D} = 360°$$
$$\therefore \ \boxed{\hat{B} + \hat{D} = 180°}$$

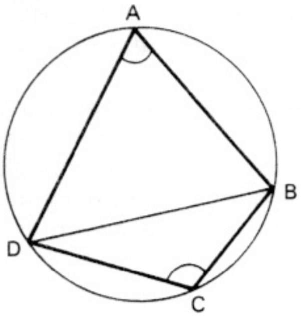
Passemos agora ao segundo teorema. Seja ABCD um quadrilátero em que Â e Ĉ são suplementares. Queremos provar que esse quadrilátero é inscritível numa circunferência.

Para tanto, consideremos a circunferência que passa pelos pontos A, B e D. Vamos provar que C também pertence a essa circunferência.

Observe que, se $\overset{\frown}{BAD}$ é um arco capaz do ângulo Â , construído sobre $\overline{BD}$, o arco que completa a circunferência de $\overset{\frown}{BAD}$ é um arco capaz do suplemento do ângulo Â.





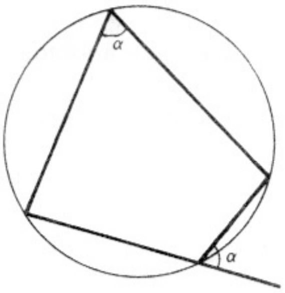


Notemos, inicialmente, que $\overset{\frown}{BAD}$ é um arco capaz do ângulo Â construído sobre $\overline{BD}$ e que o ponto C enxerga $\overline{BD}$ segundo o ângulo Ĉ. Como ∡Ĉ é o suplemento de ∡Â, o ponto C pertence a um arco capaz do suplemento de ∡Â construído sobre $\overline{BD}$. Ora, esse arco é precisamente aquele que completa a circunferência do arco BAD. Logo, A, B, C e D pertencem à mesma circunferência.

De fato, qualquer ponto P pertencente a esse arco determina um quadrilátero ABPD inscrito na circunferência. Mas o teorema anterior garante que ∡P̂ é o suplemento de ∡Â. Logo, $\overset{\frown}{BPD}$ é um arco capaz do suplemento de ∡Â.

■ c.q.d.

Observação: É importante você notar que em todo quadrilátero inscritível o ângulo externo de qualquer vértice é congruente ao ângulo interno do vértice oposto.

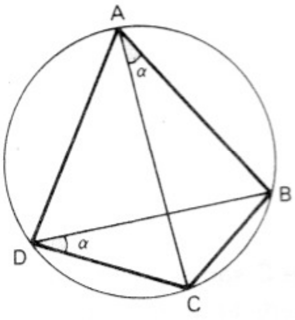


Teoremas

1.º) Em todo quadrilátero inscrito numa circunferência os lados opostos formam ângulos congruentes com as diagonais.

2.º) Reciprocamente, todo quadrilátero em que dois lados opostos formam ângulos congruentes com cada uma das diagonais é inscritível numa circunferência.

Essa propriedade característica dos quadriláteros inscritíveis praticamente não tem emprego nos problemas de construção, mas ela será fundamental para estabelecer uma outra propriedade desses quadriláteros, que teremos de estudar quando retomarmos os problemas de tangência.

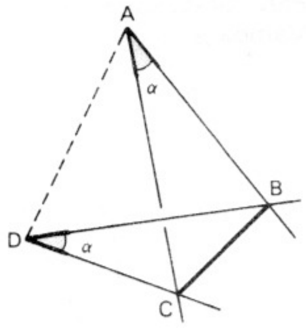


∡ BÂC ≡ ∡BD̂C ⇔ ABCD é inscritível

☐ **Demonstrações:**

Para demonstrar o primeiro teorema basta observar que ∡BÂC e ∡BD̂C são ângulos inscritos num mesmo arco capaz construído sobre $\overline{BC}$. Então, é imediato que ∡BÂC ≡ ∡BD̂C.

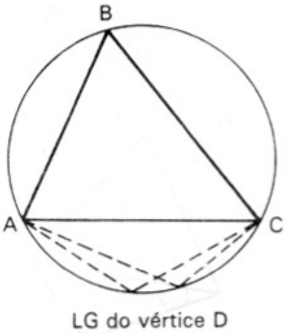
Também para o segundo teorema a demonstração é imediata, pois, nesse caso, por hipótese, os pontos A e D enxergam $\overline{BC}$ segundo um mesmo ângulo α. E como A e D situam-se num mesmo semiplano determinado pela reta BC, ambos pertencem a um mesmo arco capaz do ângulo α construído sobre $\overline{BC}$. Segue-se, então, que A, B, C e D pertencem a uma mesma circunferência, isto é, ABCD é um quadrilátero inscritível.



■ c.q.d.

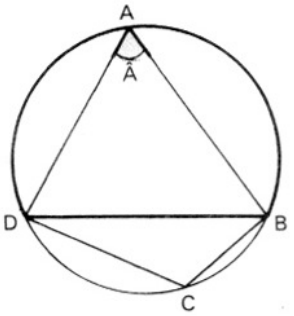
Antes de passarmos aos exercícios, convém que você se detenha nas seguintes observações, que podem ser úteis nas construções de quadriláteros inscritíveis.

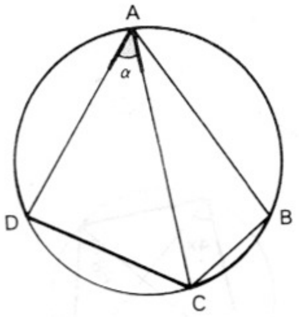
- Quando três vértices quaisquer do quadrilátero inscritível já estiverem posicionados, note que a circunferência que passa pelos mesmos é a circunferência circunscrita ao quadrilátero. Isto é, **posicionando três vértices você pode construir a circunferência circunscrita.**



A figura ao lado ilustra a situação em que são dados a diagonal $\overline{AC}$ e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. A circunferência circunscrita ao triângulo ABC é a circunferência circunscrita ao quadrilátero ABCD.

- Sempre que é conhecido um ângulo segundo o qual um vértice enxerga uma diagonal dada, ou um lado dado, você pode construir a circunferência circunscrita, pois esta é a circunferência que contém um arco capaz construtível.





Exercícios

E3. **1** Num quadrilátero ABCD os ângulos internos têm as seguintes medidas: $\hat{A} = 2x$, $\hat{B} = \frac{x}{2} + 40°$, $\hat{C} = x$ e $\hat{D} = 2x - 10°$.

Verifique que esse quadrilátero é inscritível numa circunferência.

Resolução: Como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°, podemos escrever:

$$2x + \left(\frac{x}{2} + 40°\right) + x + (2x - 10°) = 360°$$

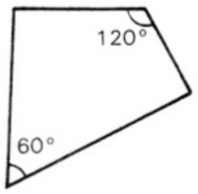
Dessa equação obtém-se x = 60°. Então, as medidas dos ângulos do quadrilátero podem ser calculadas.

$$\hat{A} = 120°, \hat{B} = 70°, \hat{C} = 60° \text{ e } \hat{D} = 110°$$

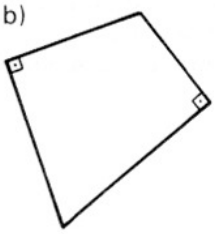
Assim, vê-se que os pares de ângulos opostos ∡Â e ∡Ĉ, ∡B̂ e ∡D̂ são suplementares. Logo, o quadrilátero é inscritível.

E3.**2** Dentre os quadriláteros seguintes, identifique os que são inscritíveis numa circunferência.

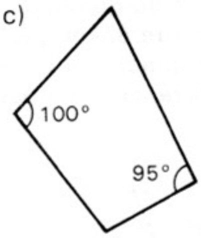
a)



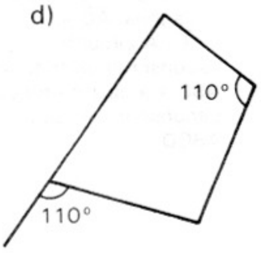
b)



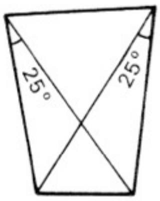
c)



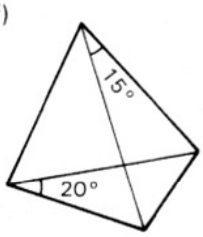
d)



e)

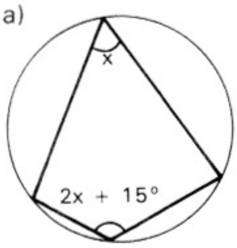


f)

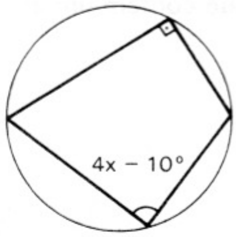


E3.**3** Calcule x nas figuras seguintes.

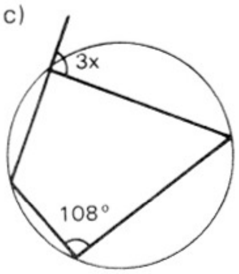
a)



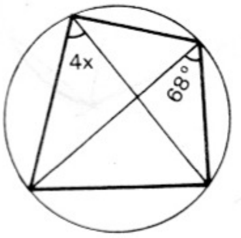
b)



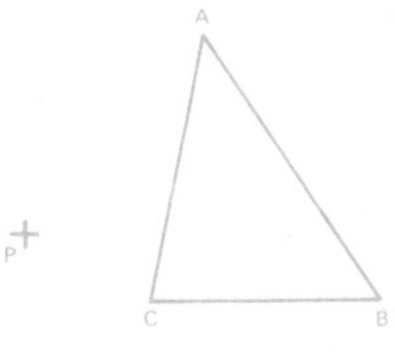
c)



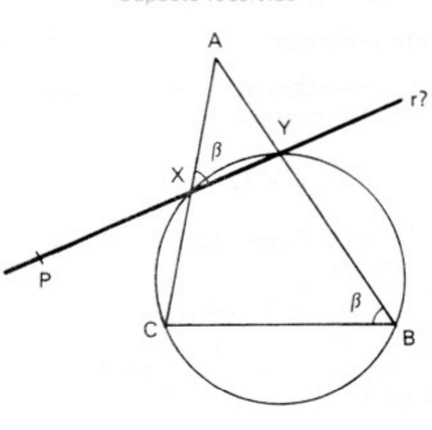
d)



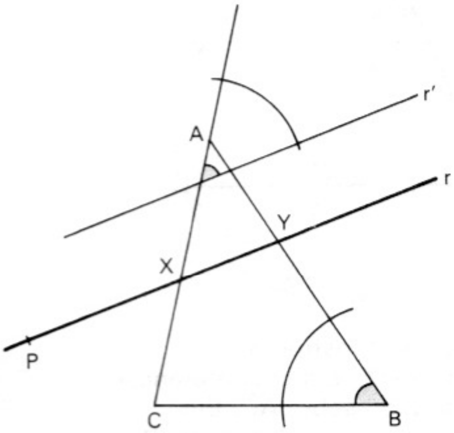
E3.**4** São dados um triângulo ABC e um ponto P. Conduza uma reta **r** que passe por P e corte os lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ nos pontos X e Y, respectivamente, de modo que B, C, X e Y pertençam a uma mesma circunferência.



Suposto resolvido

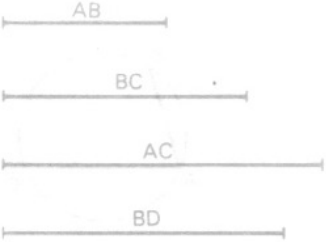


Resolução: Observe a figura onde já se imagina o problema resolvido. Como o quadrilátero BCXY é inscritível, sendo $\hat{B} = \beta$ tem-se, também, $A\hat{X}Y = \beta$. Então a direção da reta **r** é conhecida, pois ela forma o ângulo β (conhecido) com o lado $\overline{AC}$. Assim, podemos traçar primeiramente uma reta r′ arbitrária, mas que forme o ângulo β com $\overline{AC}$. Então, a reta **r** procurada é aquela que passa por P e é paralela a r′.

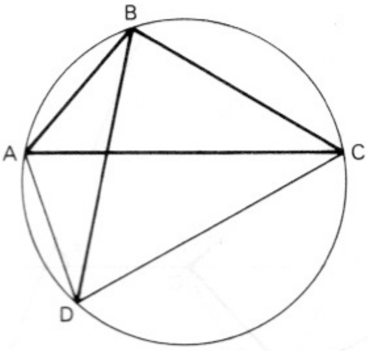


E3.**5** Dados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

Nos enunciados dos exercícios seguintes fica subentendido: "**Construa um quadrilátero inscritível numa circunferência...**"



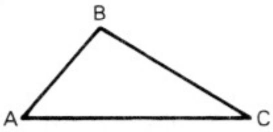
Suposto resolvido



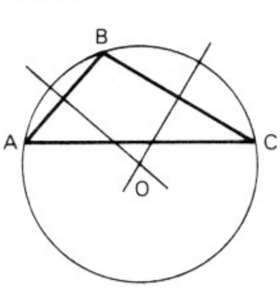
Resolução: Primeiramente construímos o triângulo ABC, pois dele conhecemos os três lados. Em seguida, construímos a circunferência circunscrita a esse triângulo, a qual é também a circunferência circunscrita ao quadrilátero procurado. Por fim, sobre essa circunferência, determinamos o vértice D, pois sua distância ao vértice B é conhecida.

Evolução do traçado

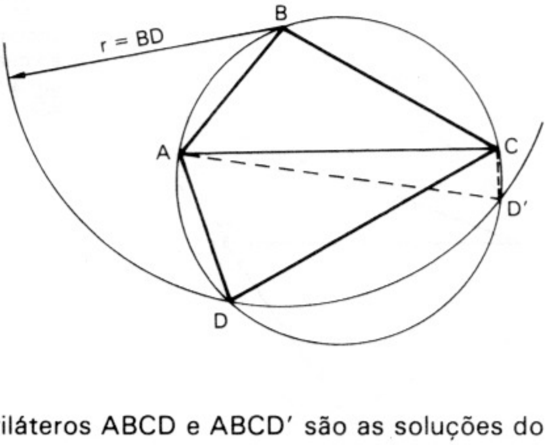
1.º passo



2.º passo



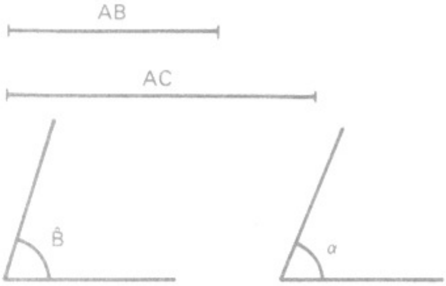
Lembre-se de que o centro da circunferência circunscrita a um triângulo (circuncentro) é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados.



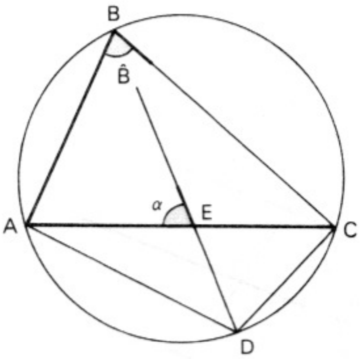
Os quadriláteros ABCD e ABCD′ são as soluções do problema.

E3.**6** Dados: AB = 30mm, BC = 35mm, AC = 50mm. Sabendo que as diagonais são perpendiculares, qual é, aproximadamente, o perímetro desse quadrilátero?

E3.**7** Dados: AB, AC, B̂ e AÊB = α, onde E é o ponto de intersecção das diagonais.



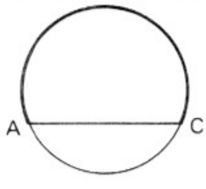
Suposto resolvido



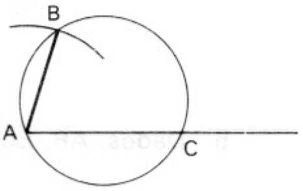
Evolução do traçado

1.º passo

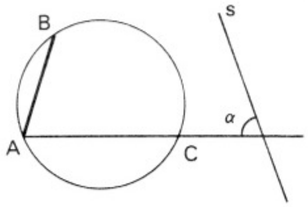
arco capaz do ângulo B̂



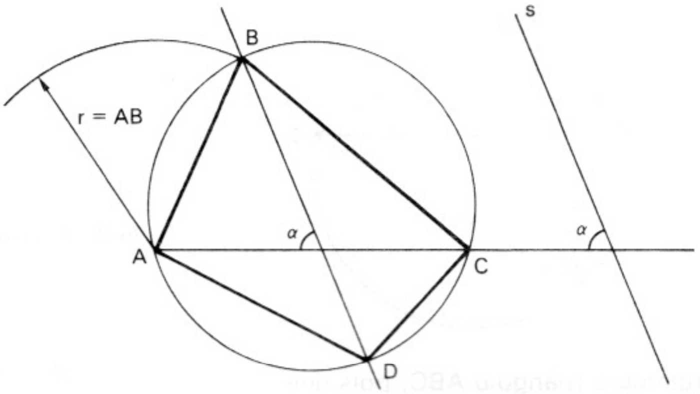
2.º passo



3.º passo



Resolução: Como foram dados AC e B̂, podemos construir a circunferência circunscrita ao quadrilátero, pois esta é a circunferência que contém um arco capaz do ângulo B̂ construído sobre $\overline{AC}$. Em seguida determinamos B, já que sua distância ao vértice A é dada. Por fim, já que o ângulo das diagonais é dado, podemos traçar a diagonal $\overline{BD}$, pois a sua direção é conhecida. Para tanto, traçamos uma reta **s** arbitrária formando o ângulo α com a reta AC e, em seguida, traçamos por B uma paralela a **s**.

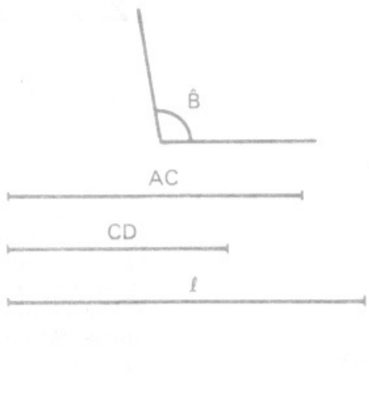


E3.**8** Dados: AB = 55mm, AC = 50mm, CD = 18mm e B̂ = 45°. Qual é, aproximadamente, a medida da diagonal $\overline{BD}$?

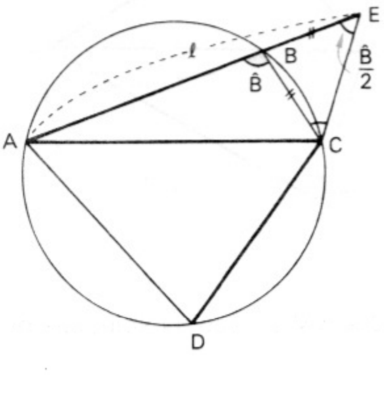
E3.**9** Dados: AB = 40mm, AD = 30mm, B̂ = 90° e AB̂D = 30°. Qual é, aproximadamente, a medida do lado $\overline{CD}$?

Sugestão: Note que B enxerga $\overline{AD}$ segundo um ângulo de 30°. Então, você pode construir a circunferência circunscrita ao quadrilátero a partir de um arco capaz de 30° sobre $\overline{AD}$.

E3.**10** Dados: B̂, AC, CD e ℓ = AB + BC.



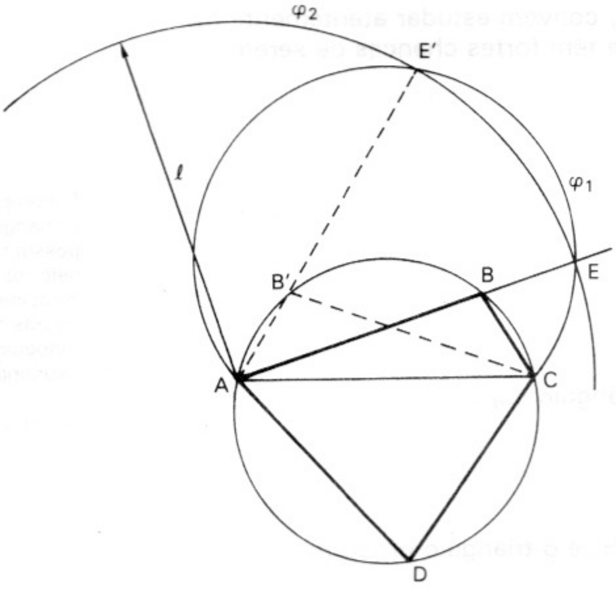
Suposto resolvido



Resolução: Primeiramente, traçamos um arco capaz do ângulo $\hat{B}$ sobre $\overline{AC}$, o qual, como sabemos, determina a circunferência circunscrita ao quadrilátero procurado. Introduzindo a soma ℓ dada, na forma do segmento AE, conforme indica a figura onde o problema está suposto resolvido podemos deduzir facilmente que E enxerga $\overline{AC}$ segundo um ângulo $\frac{\hat{B}}{2}$. (Se necessário, consulte o volume 1, no capítulo 16, **soma ou diferença de elementos lineares**.) Então, podemos determinar E, pois desse ponto conhecemos duas propriedades:

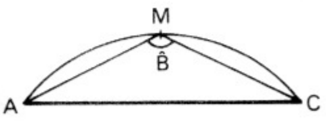
$$\begin{cases} \varphi_1\text{: E enxerga } \overline{AC} \text{ segundo o ângulo } \frac{\hat{B}}{2} \text{ (LG 5).} \\ \varphi_2\text{: E dista } \ell \text{ de A (LG 1).} \end{cases}$$

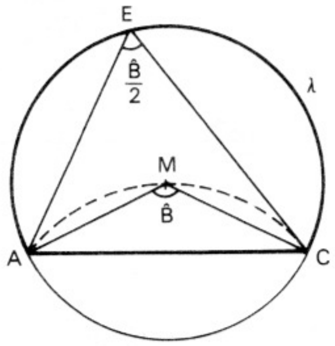
Uma vez determinado E, obtemos o vértice B na intersecção de $\overline{AE}$ com a circunferência circunscrita. Finalmente, determinamos D, pois sua distância ao vértice C é dada.



Os quadriláteros ABCD e AB'CD são as soluções do problema.

Observação: Convém notar que o centro do arco capaz do ângulo $\frac{\hat{B}}{2}$ construído sobre $\overline{AC}$ é o **ponto médio** M do arco capaz do ângulo $\hat{B}$ construído sobre esse mesmo segmento. De fato, nas figuras seguintes, observe que o ângulo $A\hat{M}C$ é central com relação à circunferência que tem centro em M e passa por A e C (λ).

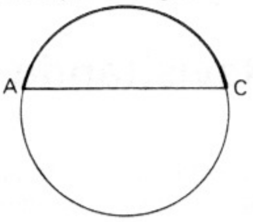




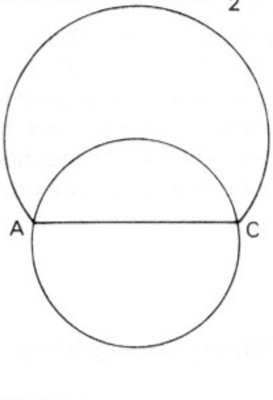
Então, é imediato que $A\hat{E}C = \frac{\hat{B}}{2}$, pois todo ângulo inscrito numa circunferência é a metade do ângulo central correspondente.

Evolução do traçado

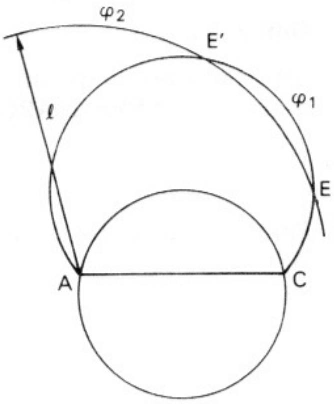
1.º passo
arco capaz do ângulo $\hat{B}$

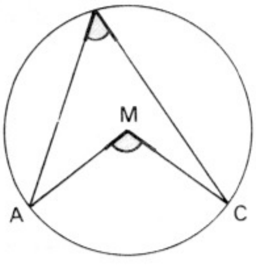


2.º passo
arco capaz do ângulo $\frac{\hat{B}}{2}$



3.º passo





$A\hat{M}C$ é um ângulo central
$A\hat{E}C$ é um ângulo inscrito

$$\boxed{A\hat{E}C = \frac{A\hat{M}C}{2}}$$

Resolva os exercícios de 27 a 34 do caderno de atividades.

Construção de quadriláteros inscritíveis

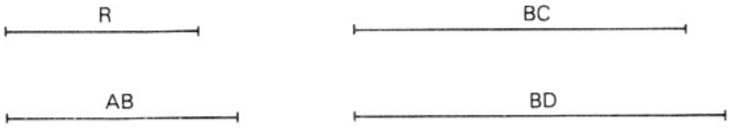
Figura auxiliar e anotações

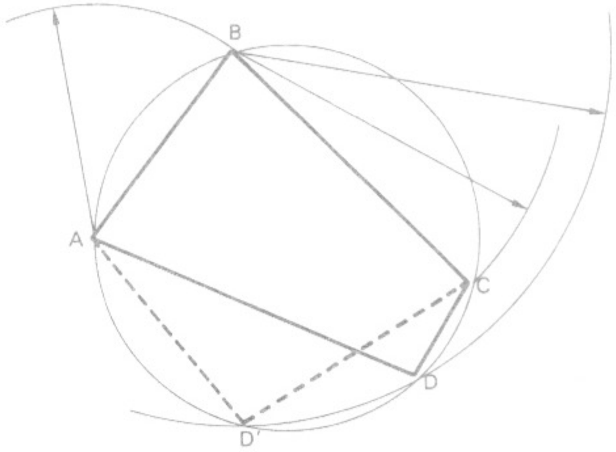
Para os exercícios de 27 a 34, o enunciado é o seguinte: **Construa um quadrilátero ABCD inscritível numa circunferência, dados...**

27 R, AB, BC e BD.

Observação: R é o raio da circunferência circunscrita.

Observação:
Comente que, em geral, quando é dado R, convém começar a construção pela circunferência circunscrita.



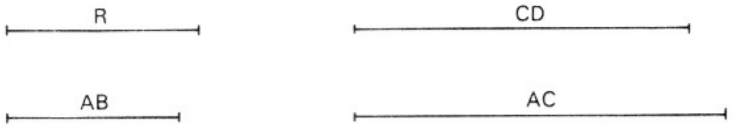


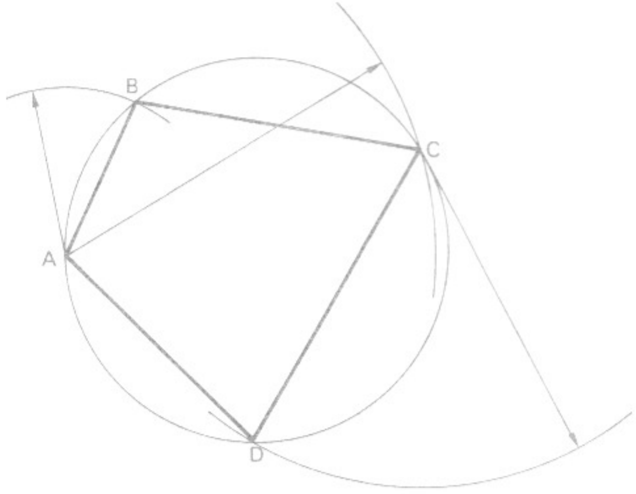
Os quadriláteros ABCD e ABCD' são as soluções do problema.

28 R, AB, CD e AC, sabendo que $\hat{B}$ é obtuso.

Sugestão: Comece pela circunferência circunscrita e, em seguida, coloque a diagonal $\overline{AC}$ numa posição arbitrária. Então, note que $\hat{B}$ deve estar no menor dos arcos determinados por A e C, para que $\sphericalangle\hat{B}$ seja obtuso.

Observação:
Comente que, se não houvesse a exigência de $\hat{B}$ ser obtuso, o vértice B poderia estar também no maior arco, $\widehat{AC}$. Ou seja, novamente trata-se de uma estratégia para restringir o número de soluções do problema.



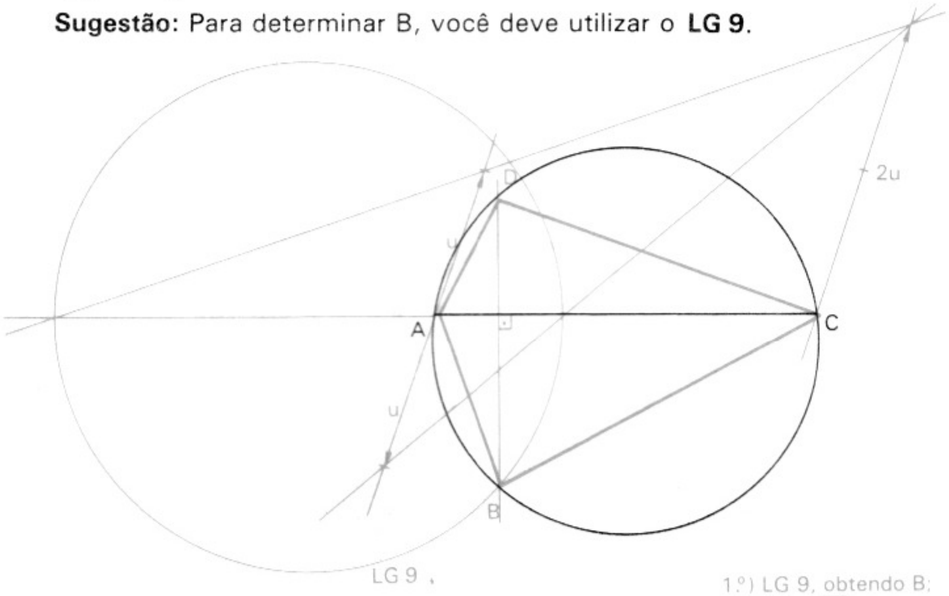


Construção de quadriláteros inscritíveis

Figura auxiliar e anotações

29 A circunferência circunscrita, a diagonal $\overline{AC}$ em posição e sabendo que $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$, $\sphericalangle\hat{B}$ é agudo e as diagonais são perpendiculares.

Sugestão: Para determinar B, você deve utilizar o **LG 9**.

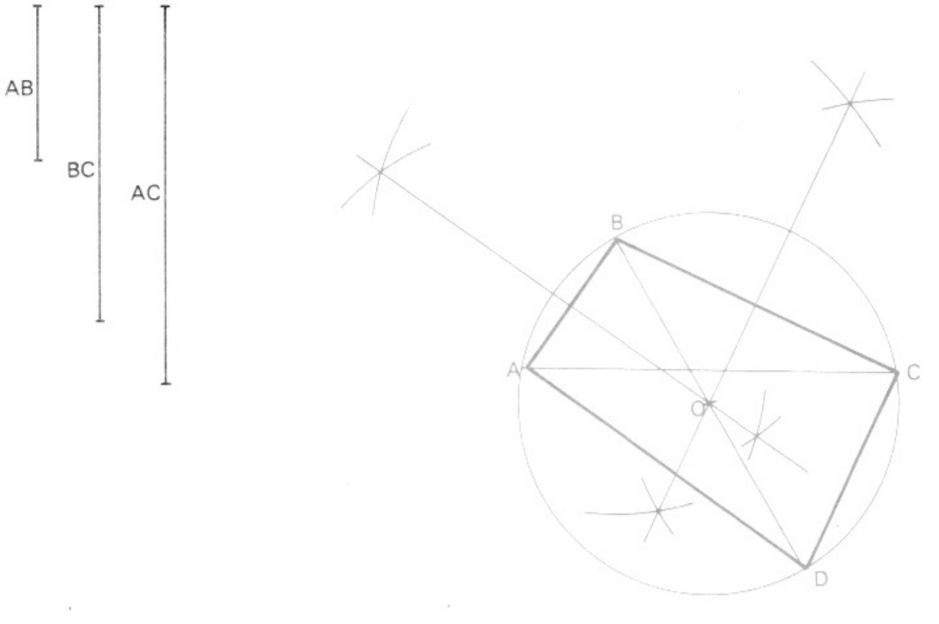


1.º) LG 9, obtendo B;
2.º) $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

30 AB, BC, AC e $\hat{C} = 90°$

Sugestão: Construindo o triângulo ABC, você poderá construir a circunferência circunscrita ao quadrilátero procurado.

Observação: Insista que, sendo $\hat{C}$ um ângulo reto, ele estará inscrito numa semicircunferência, isto é, a diagonal $\overline{BD}$ é o diâmetro da circunferência circunscrita.



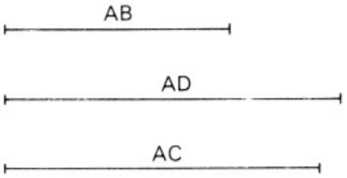
Construção de quadriláteros inscritíveis

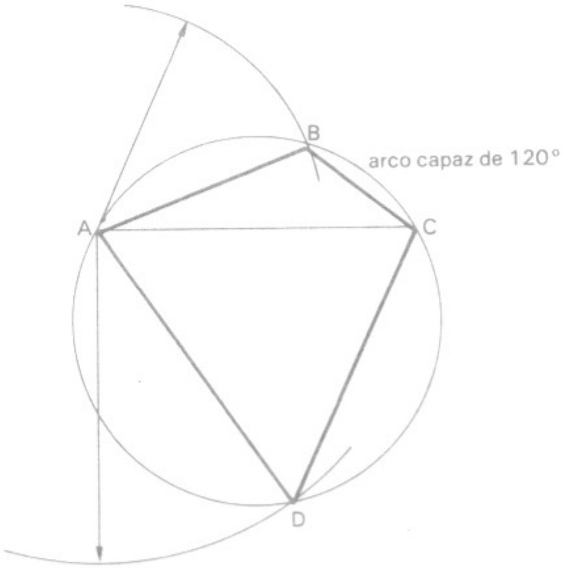
Figura auxiliar e anotações

31 AB, AD, AC e $\hat{B} = 120°$.

Sugestão: Lembre-se que a circunferência circunscrita ao quadrilátero procurado é aquela que contém um arco capaz de 120° construído sobre $\overline{AC}$.

Nota:
Como de costume, não foram registrados os traçados necessários para construir o arco capaz de 120°.



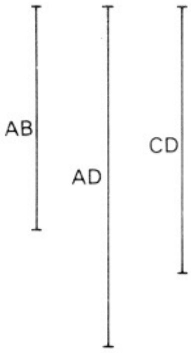


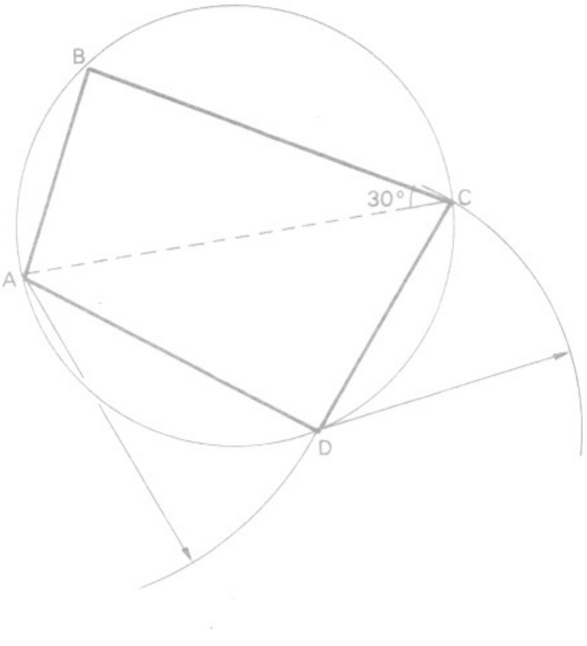
Construção a partir do arco capaz de 120° sobre $\overline{AC}$ (arco ABC).

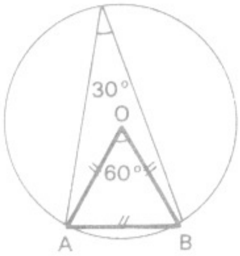
32 AB, AD, CD e $A\hat{C}B = 30°$

Sugestão: Note que um arco capaz de 30°, construído sobre $\overline{AB}$, determina a circunferência circunscrita ao quadrilátero procurado.

Sugestão:
Comente que AB = R, raio da circunferência do arco capaz de 30° sobre $\overline{AB}$. De fato, a um ângulo inscrito de 30° corresponde um ângulo central de 60°, então, na figura abaixo, é fácil verificar que o △OAB é eqüilátero.



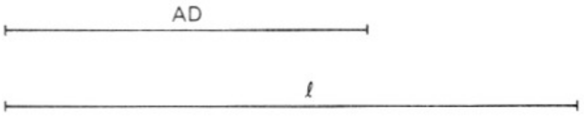


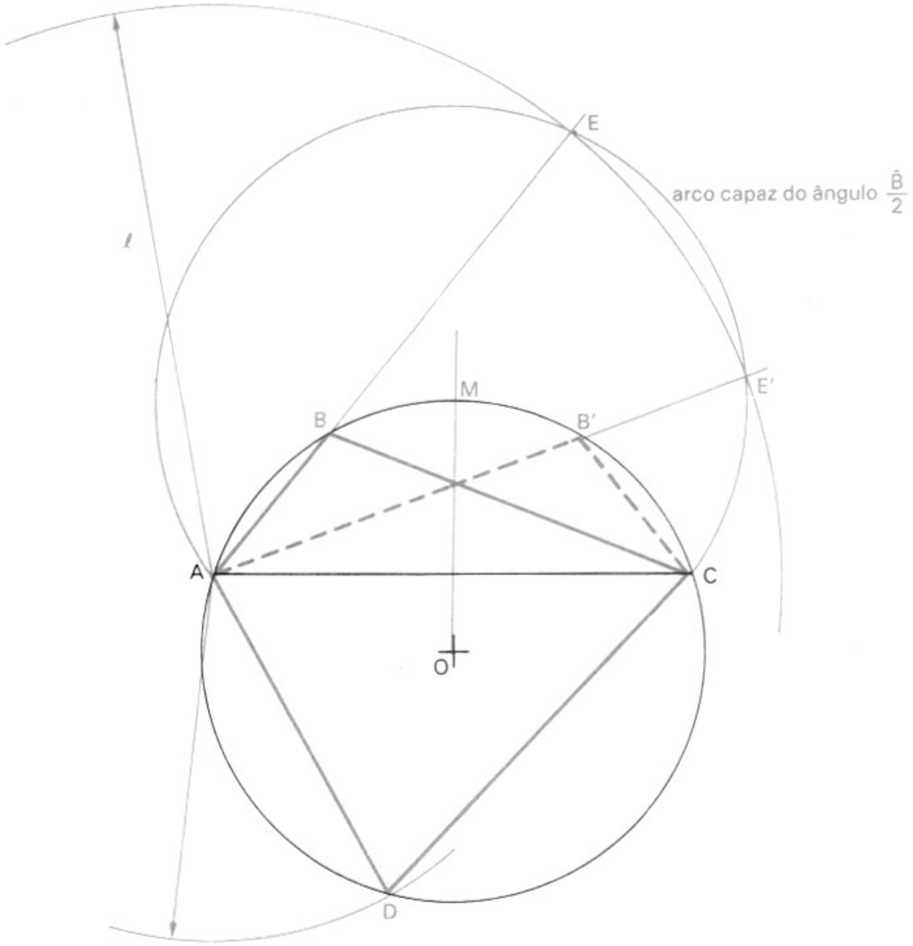


Construção de quadriláteros inscritíveis

33 AD, AB + BC = ℓ, a circunferência circunscrita, a diagonal $\overline{AC}$ em posição e com A, B, C e D no sentido horário.

Sugestão: Estude o exercício E3.**10** do livro-texto, bem como a observação que segue aquele problema.





Os quadriláteros ABCD e AB'CD são as soluções do problema.

Figura auxiliar e anotações

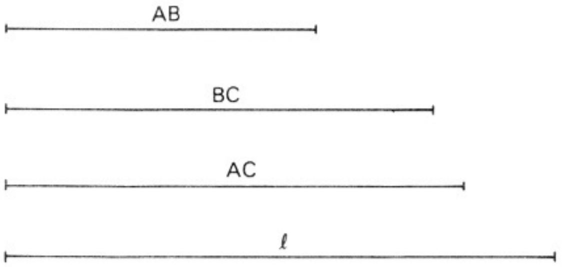
Observação:
Comente que se poderia restringir o número de soluções a apenas uma, por exemplo, acrescentando aos dados do enunciado que AB < BC. Nesse caso, somente o quadrilátero ABCD seria solução do problema.

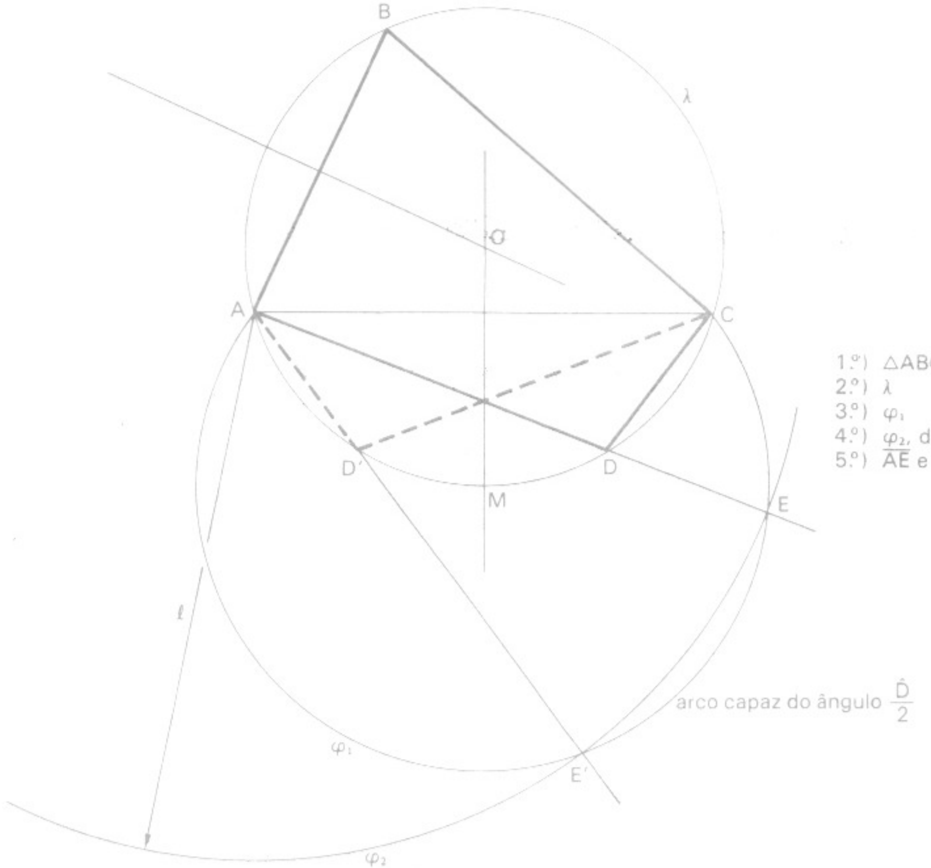
Construção de quadriláteros inscritíveis

Figura auxiliar e anotações

34 AB, BC, AC e CD + DA = ℓ

Observação: Procure planejar a construção no que diz respeito à posição em que você deve começá-la, de modo a fazê-la caber no espaço a ela reservado.




B
λ
O
A
C
D'
D
M
E
ℓ
φ_1
E'
φ_2
arco capaz do ângulo $\frac{\hat{D}}{2}$

1.º) △ABC
2.º) λ
3.º) φ_1
4.º) φ_2, determinando E e E'
5.º) $\overline{AE}$ e $\overline{AE'}$, determinando D e D' em λ

Os quadriláteros ABCD e ABCD' são as soluções do problema.

4

Revisitando os triângulos

No volume 1 desta coleção há um capítulo dedicado aos triângulos, onde se faz um estudo de vários métodos empregados nas construções desses polígonos; é fundamental que você os conheça. No entanto, há situações em que a construção de um triângulo não recai em qualquer método geral. São casos em que os elementos dados para construí-lo nos obrigam a criar uma resolução muito particular e, por essa razão, esses problemas costumam apresentar um maior grau de dificuldade. Alguns deles tornaram-se problemas clássicos, e são exatamente alguns desses que vamos estudar neste capítulo. Se você vai se submeter a exames vestibulares que têm provas de Desenho Geométrico, principalmente no caso do ITA, convém estudar atentamente os problemas aqui analisados, pois eles sempre têm fortes chances de serem propostos nesses exames.

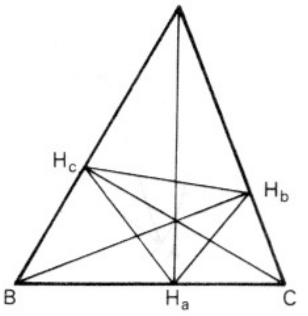
Dada a imensa variedade de situações a que podem levar as construções de triângulos, esse assunto é, sem dúvida, o mais rico filão das construções geométricas. Por isso, ele é quase que obrigatório em exames vestibulares de Desenho Geométrico.

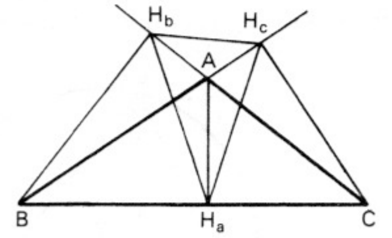
Triângulo órtico

Definição

Chama-se **órtico** de um triângulo ABC o triângulo cujos vértices são os pés das alturas do triângulo ABC.

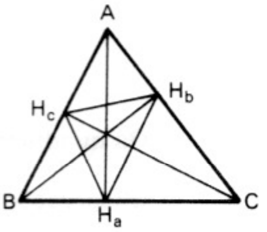
Para cada uma das figuras seguintes, $H_aH_bH_c$ é o triângulo órtico do triângulo ABC.

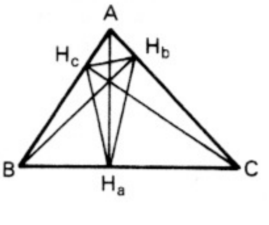


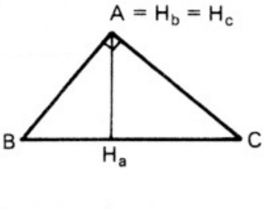


É muito importante notar que todo triângulo não-retângulo possui um único triângulo órtico. Porém, um mesmo triângulo $H_1H_2H_3$ é órtico de quatro triângulos diferentes, entre os quais um é acutângulo e os outros três são obtusângulos. **O triângulo acutângulo é denominado triângulo fundamental do triângulo órtico** $H_1H_2H_3$.

É interessante observar que o triângulo retângulo não possui triângulo órtico pois, nele, os pés de duas alturas coincidem. Observe nas figuras seguintes como o triângulo órtico vai "sumindo" quando Â se aproxima de 90° e deixa de existir para Â = 90°.

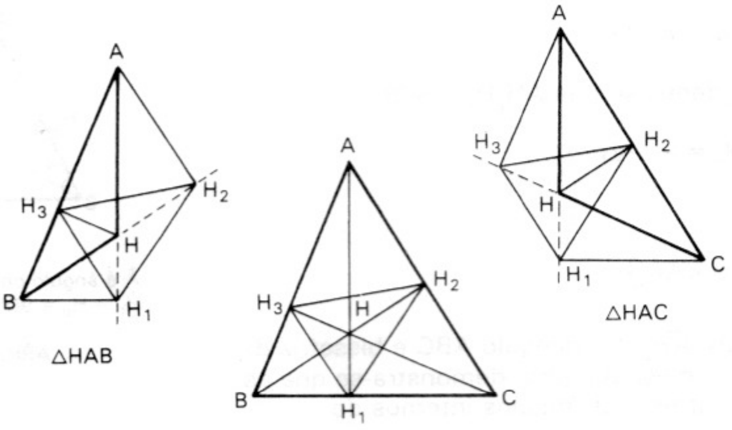


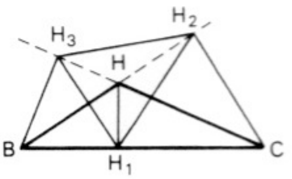




H_b e H_c coincidem com A no triângulo retângulo.

As figuras seguintes mostram os quatro triângulos que possuem o mesmo órtico. Note que podemos ''enxergar'', no interior do triângulo fundamental ABC, os três triângulos obtusângulos que possuem o mesmo órtico $H_1H_2H_3$.


A
H_3
H_2
H
B
H_1
ΔHAB
A
H_3
H_2
H
B
H_1
C
A
H_3
H_2
H
H_1
C
ΔHAC


H_3
H_2
H
B
H_1
C
ΔHBC

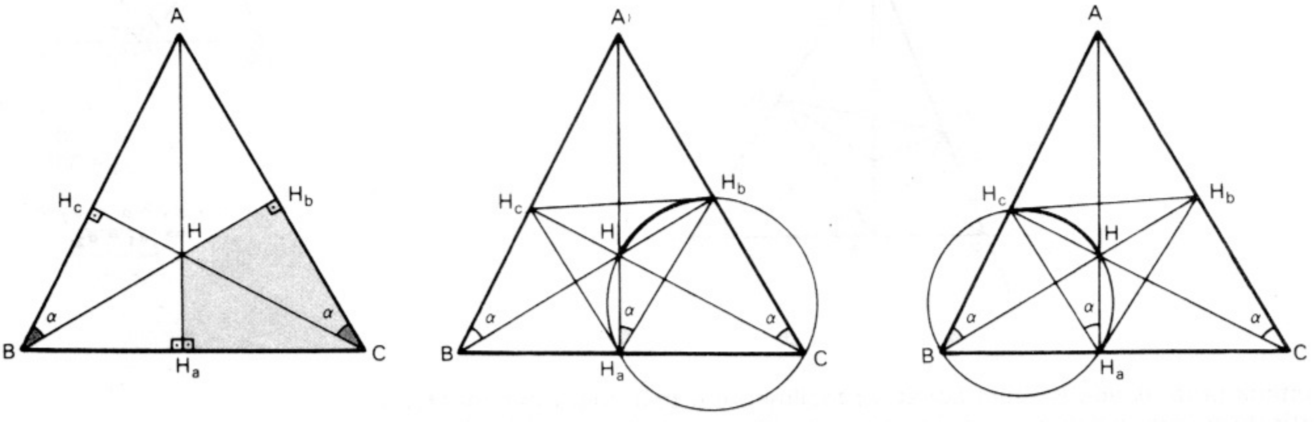
Agora vamos estudar uma propriedade que permitirá construir o triângulo fundamental a partir do triângulo órtico.

Teorema

As alturas de um triângulo acutângulo são bissetrizes dos ângulos internos do triângulo órtico.

☐ **Demonstração:**

Primeiramente, notemos que $\sphericalangle A\hat{B}H_b \equiv \sphericalangle A\hat{C}H_c$. Fazendo $A\hat{B}H_b = A\hat{C}H_c = \alpha$, vamos provar que também se tem $A\hat{H}_aH_b = A\hat{H}_aH_c = \alpha$.


A
H_c
H_b
H
α
α
B
H_a
C
A
H_c
H_b
H
α
α
α
B
H_a
C
A
H_c
H_b
H
α
α
α
B
H_a
C

Para tanto, observemos que os quadriláteros HH_aCH_b e HH_aBH_c são ambos inscritíveis, por possuírem, cada um deles, um par de ângulos opostos retos e, portanto, suplementares. Então, do quadrilátero HH_aCH_b, deduzimos que $A\hat{H}_aH_b = A\hat{C}H_c$, pois são ângulos inscritos que enxergam o mesmo arco HH_b.

$$\therefore \quad \boxed{A\hat{H}_aH_b = \alpha} \quad (1)$$

Analogamente, no quadrilátero HH_aBH_c deduz-se que $A\hat{H}_aH_c = A\hat{B}H_b$.

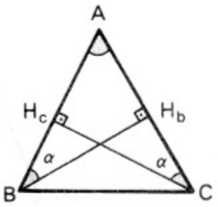
$$\therefore \quad \boxed{A\hat{H}_aH_c = \alpha} \quad (2)$$

De (1) e (2) concluímos que

$$\boxed{\sphericalangle A\hat{H}_aH_b \equiv \sphericalangle A\hat{H}_aH_c}$$

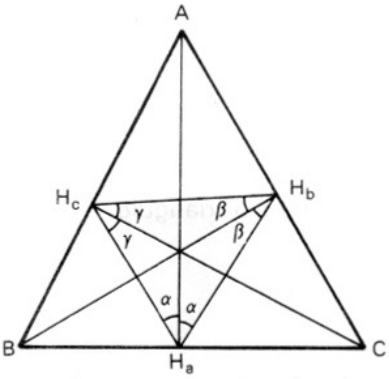
Essa última igualdade mostra que a altura $\overline{AH}_a$ do triângulo ABC é bissetriz de um ângulo interno do triângulo órtico. Do mesmo modo, demonstra-se que as outras duas alturas são bissetrizes dos outros dois ângulos internos do triângulo órtico.

Para justificar por que se tem $\sphericalangle A\hat{B}H_b \equiv \sphericalangle A\hat{C}H_c$, basta observar os triângulos ABH_b e ACH_c.



$\hat{A}$ é ângulo comum
$\hat{H}_b = \hat{H}_c = 90°$

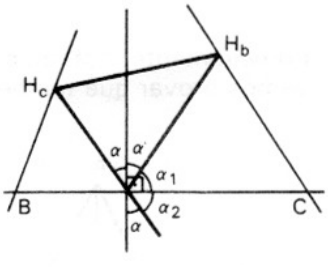
$\therefore A\hat{B}H_b = A\hat{C}H_c$



■ c.q.d.

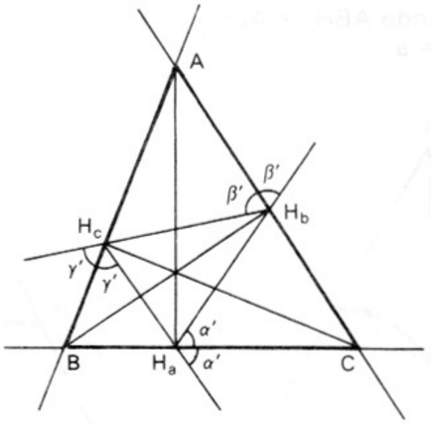
Observação: Desse teorema decorre de imediato que as retas que contêm **os lados de um triângulo acutângulo são bissetrizes dos ângulos externos do triângulo órtico.**

Prolongando-se a altura $\overline{AH}_a$ e observando ângulos o.p.v., é fácil justificar essa propriedade.



$\alpha + \alpha_1 = 90°$
$\alpha + \alpha_2 = 90°$

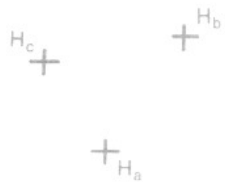
$\therefore \alpha + \alpha_1 = \alpha + \alpha_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \alpha_2}$



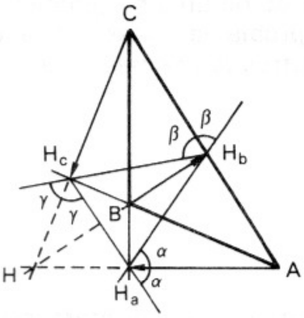
A última propriedade permite construir facilmente o triângulo fundamental a partir do triângulo órtico e, uma vez construído esse triângulo, é fácil obter qualquer um dos outros três triângulos obtusângulos que possuem o mesmo órtico.

Exercícios

E4.1 Construa um triângulo ABC, dados os pés das alturas, H_a, H_b e H_c, e sabendo que ∢$\hat{B}$ é obtuso.

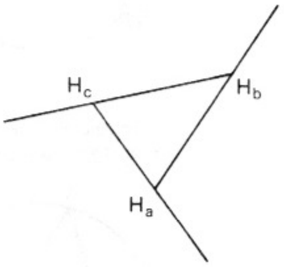


Suposto resolvido

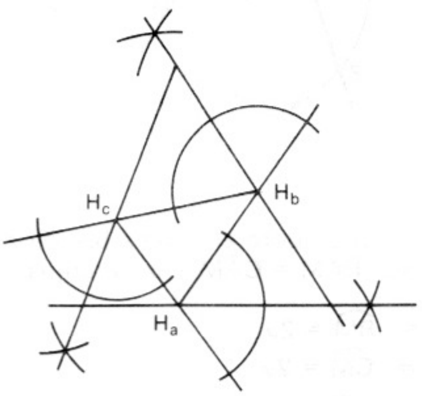


Resolução: Primeiramente, traçamos as bissetrizes dos ângulos externos do triângulo órtico obtendo o triângulo fundamental, isto é, o triângulo HAC da figura onde o problema está suposto resolvido. Então, as alturas do triângulo HAC interceptam-se em B.

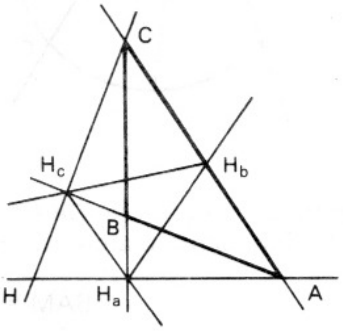
1.º passo



2.º passo

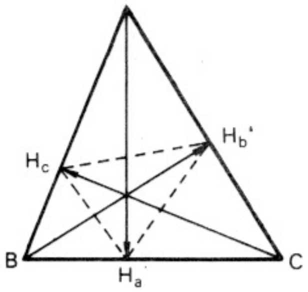


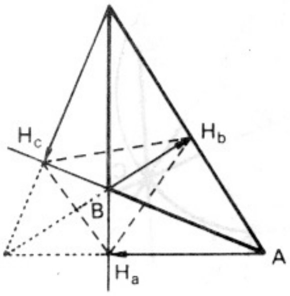
3.º passo

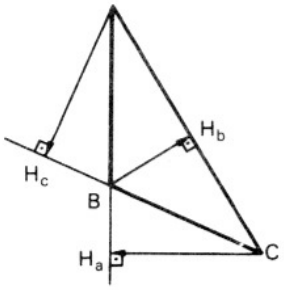


Observação: É preciso que você tenha bastante atenção ao marcar os vértices A, B e C do triângulo construído a partir do órtico. Lembre-se sempre de que H_a, H_b e H_c **são os pés das alturas que partem dos vértices** A, B e C, respectivamente. Observe nas figuras seguintes como as posições desses vértices variam quando se passa do triângulo fundamental a outro obtusângulo que tem o mesmo órtico.

Observe que **é errado** dispor os vértices conforme a figura abaixo. Nela, H_a é o pé da altura que parte de C e H_c, o pé da altura que parte de A, isto é, A e C estão em posições invertidas.







E4.**2** Construa um triângulo ABC acutângulo, dados $H_aH_b = 20mm$, $H_bH_c = 28mm$ e $H_aH_c = 30mm$. Qual é, aproximadamente, o perímetro do triângulo ABC?

E4.**3** Construa um triângulo ABC, com $\sphericalangle\hat{A}$ obtuso, dados $H_aH_b = 40mm$, $H_bH_c = 30mm$ e $H_aH_c = 35mm$. Qual é, aproximadamente, o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{AC}$?

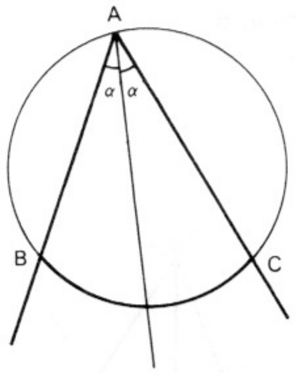
Resolva os exercícios de 35 a 38 do caderno de atividades.

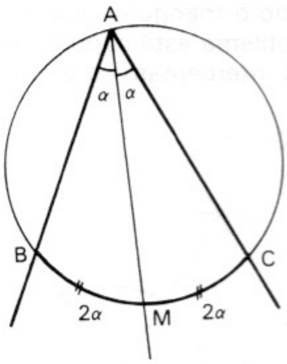
Agora, passaremos ao estudo de uma propriedade que não só permitirá resolver um dos problemas clássicos de construção de triângulos, mas também outros problemas gerais de construções geométricas.

Uma propriedade importante

Propriedade

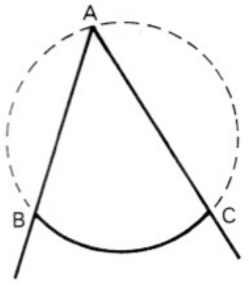
A bissetriz de qualquer ângulo inscrito numa circunferência passa pelo ponto médio do arco correspondente a esse ângulo.



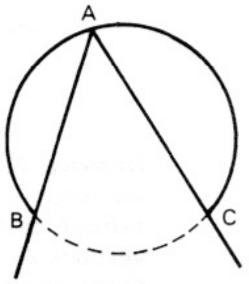


Lembre-se de que o arco correspondente a um ângulo inscrito é o arco que esse ângulo enxerga. Assim, nas figuras abaixo, dizemos que:

- $\widehat{BC}$ é o arco correspondente ao ângulo BÂC ou $\widehat{BC}$ é o arco que o ângulo BÂC enxerga;



- o ângulo BÂC está inscrito no arco BAC.



A demonstração é imediata. De fato, seja M o ponto em que a bissetriz do ângulo BÂC intercepta o arco BC. Fazendo BÂM = CÂM = α, teremos:

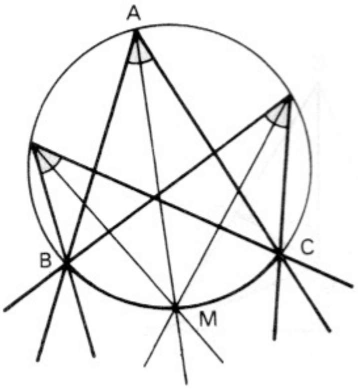
$$\begin{cases} B\hat{A}M = \alpha \Rightarrow \widehat{BM} = 2\alpha \\ C\hat{A}M = \alpha \Rightarrow \widehat{CM} = 2\alpha \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\widehat{BM} = \widehat{CM}}$$

A última igualdade mostra que M é o ponto médio do arco BC.

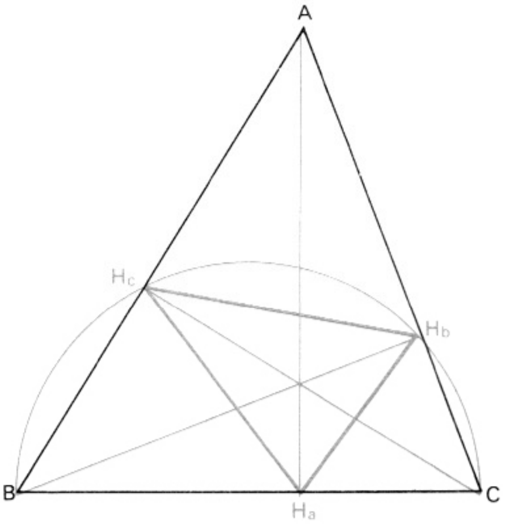
Observações:

- Note que essa propriedade vale para **todo** ângulo inscrito. Assim, se considerarmos outros ângulos inscritos no mesmo arco BAC, todos eles terão suas bissetrizes passando por M.



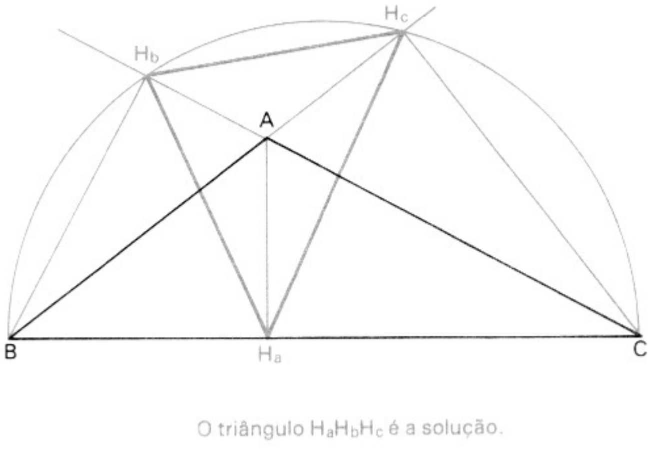
Construção de triângulos

35 Construa o triângulo órtico do triângulo ABC.



O triângulo $H_aH_bH_c$ é a solução.

36 Construa o triângulo órtico do triângulo ABC.



O triângulo $H_aH_bH_c$ é a solução.

Figura auxiliar e anotações

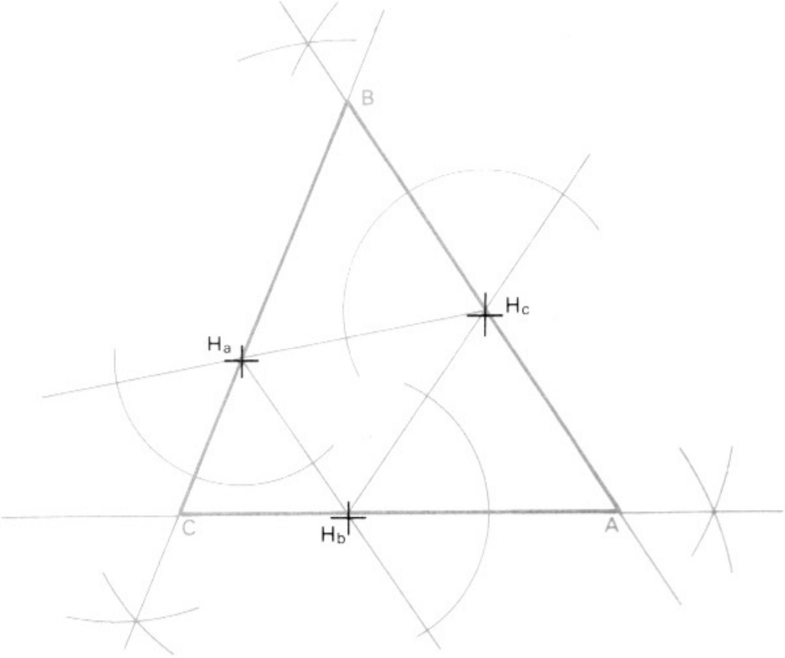
Observação:
Comente que quando se trata de traçar as três alturas de um triângulo é vantajoso determinar os pés de duas delas, simultaneamente, empregando um arco capaz de 90° sobre um dos lados. Evidentemente, esse recurso pode ser empregado quando não é permitido o uso do esquadro para o traçado de perpendiculares.

Construção de triângulos

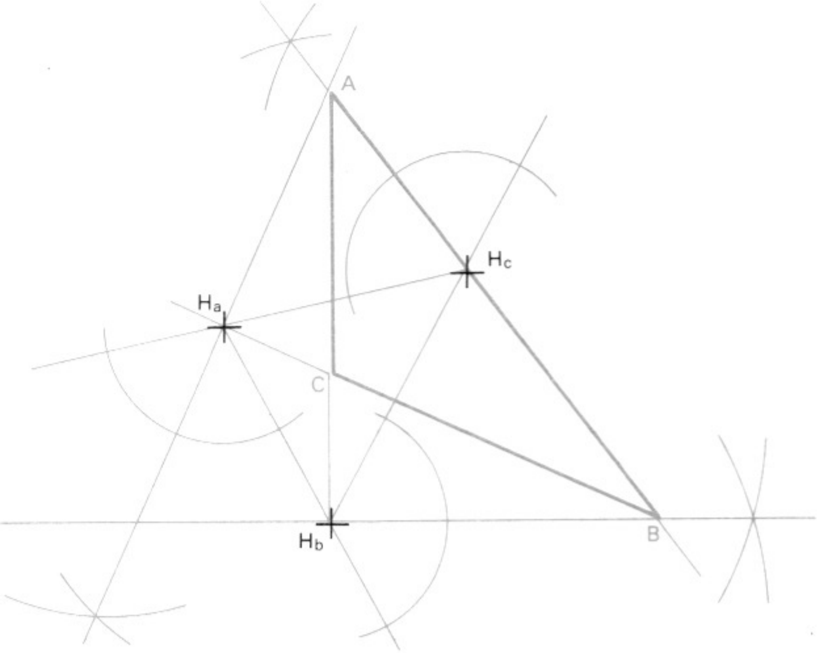
Figura auxiliar e anotações

Observação:
Insista que se deve ter bastante atenção no momento de marcar os vértices A, B e C, de modo que eles sejam opostos aos lados que contêm H_a, H_b e H_c, respectivamente.

37 Construa um triângulo acutângulo ABC, dados os pés das alturas.



38 Construa um triângulo ABC, com ∢Ĉ obtuso, dados os pés das alturas.



E4.**2** Construa um triângulo ABC acutângulo, dados $H_aH_b = 20mm$, $H_bH_c = 28mm$ e $H_aH_c = 30mm$. Qual é, aproximadamente, o perímetro do triângulo ABC?

E4.**3** Construa um triângulo ABC, com $\sphericalangle\hat{A}$ obtuso, dados $H_aH_b = 40mm$, $H_bH_c = 30mm$ e $H_aH_c = 35mm$. Qual é, aproximadamente, o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{AC}$?

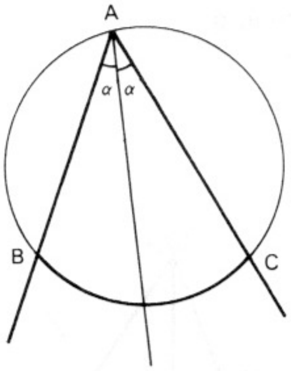
Resolva os exercícios de 35 a 38 do caderno de atividades.

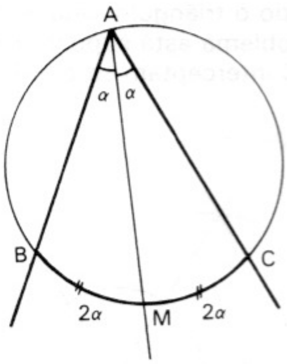
Agora, passaremos ao estudo de uma propriedade que não só permitirá resolver um dos problemas clássicos de construção de triângulos, mas também outros problemas gerais de construções geométricas.

Uma propriedade importante

Propriedade

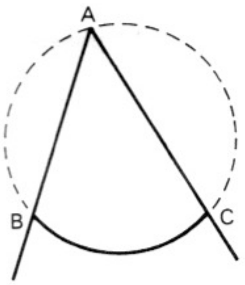
A bissetriz de qualquer ângulo inscrito numa circunferência passa pelo ponto médio do arco correspondente a esse ângulo.



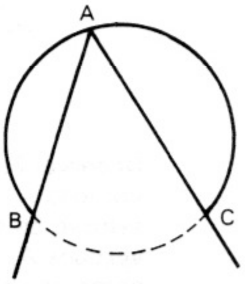


Lembre-se de que o arco correspondente a um ângulo inscrito é o arco que esse ângulo enxerga. Assim, nas figuras abaixo, dizemos que:

- $\widehat{BC}$ é o arco correspondente ao ângulo BÂC ou $\widehat{BC}$ é o arco que o ângulo BÂC enxerga;



- o ângulo BÂC está inscrito no arco BAC.



A demonstração é imediata. De fato, seja M o ponto em que a bissetriz do ângulo BÂC intercepta o arco BC. Fazendo BÂM = CÂM = α, teremos:

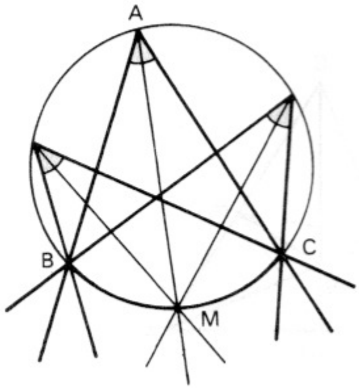
$$\begin{cases} B\hat{A}M = \alpha \Rightarrow \widehat{BM} = 2\alpha \\ C\hat{A}M = \alpha \Rightarrow \widehat{CM} = 2\alpha \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\widehat{BM} = \widehat{CM}}$$

A última igualdade mostra que M é o ponto médio do arco BC.

Observações:

- Note que essa propriedade vale para **todo** ângulo inscrito. Assim, se considerarmos outros ângulos inscritos no mesmo arco BAC, todos eles terão suas bissetrizes passando por M.

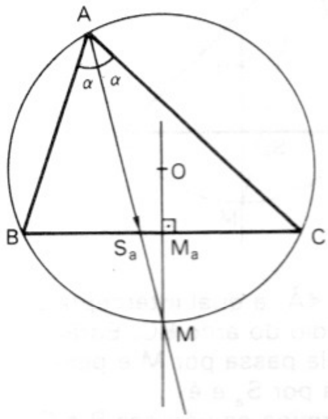


- Como o ponto M é eqüidistante de B e C, ele pertence à mediatriz de $\overline{BC}$. Então, considerando um triângulo ABC qualquer, pode-se enunciar a seguinte propriedade:

O prolongamento da bissetriz interna de ∢ Â e a mediatriz do lado $\overline{BC}$ interceptam-se num ponto pertencente à circunferência circunscrita ao triângulo ABC.

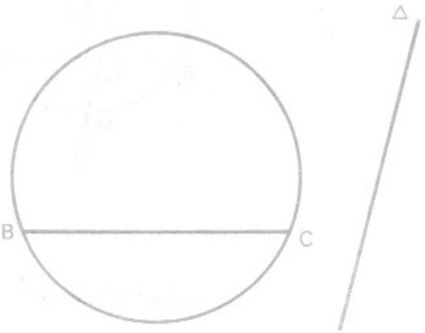
◁ IMPORTANTE

Essa propriedade permitirá, mais adiante, construir um triângulo ABC do qual são dados h_a, m_a e s_a.

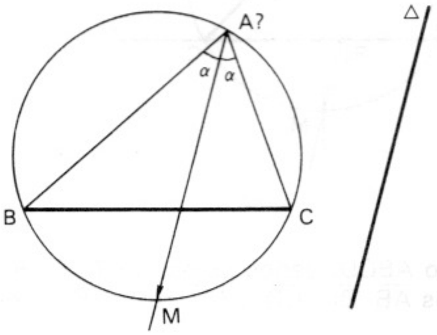


Exercícios

E4.4 De um triângulo ABC são dados o lado $\overline{BC}$ em posição, a circunferência circunscrita e a direção Δ da bissetriz de ∢Â. Determine o vértice A.



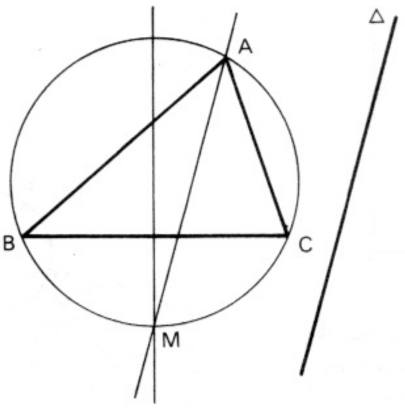
Suposto resolvido

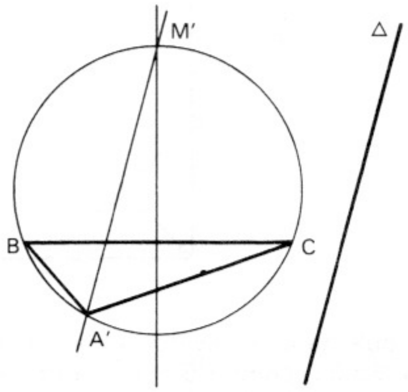


Resolução: Consideremos os dois arcos de extremidades B e C. A reta com a direção Δ, conduzida pelo ponto médio de um desses arcos, intercepta o outro arco no vértice A procurado.

Observações:

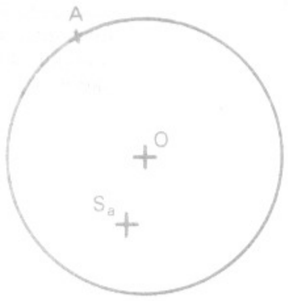
- As duas soluções apresentam-se em figuras distintas só para se conseguir maior clareza de exposição. Evidentemente, as duas soluções devem ser construídas numa só figura.
- Para determinar os pontos médios dos arcos M e M′, basta traçar a mediatriz de $\overline{BC}$.



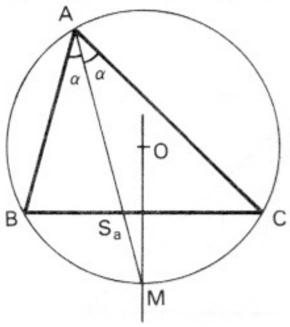


Os triângulos ABC e A′BC são as soluções do problema.

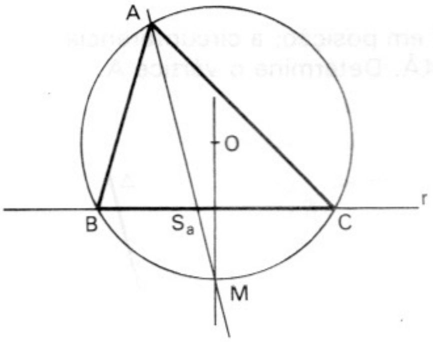
E4.**5** Construa um triângulo ABC, dados A, S_a e a circunferência circunscrita.



Suposto resolvido

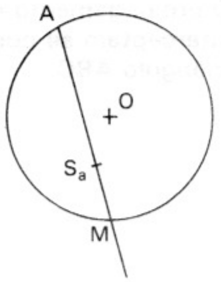


Resolução: Por A e S_a traçamos a bissetriz de ∢Â, a qual intercepta a circunferência no ponto M, isto é, o ponto médio do arco BC. Então, podemos traçar a mediatriz do lado $\overline{BC}$, pois ela passa por M e pelo centro O. Por fim, traçamos a reta **r** que passa por S_a e é perpendicular à mediatriz de $\overline{BC}$. A reta **r** determina os vértices B e C na circunferência.

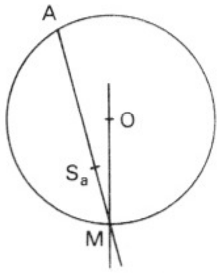


Evolução do traçado

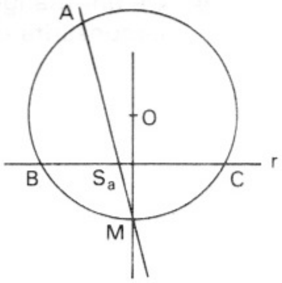
1.º passo



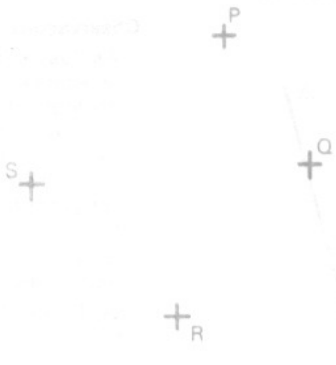
2.º passo



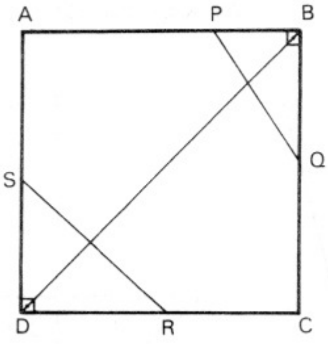
3.º passo



E4.**6** Construa um quadrado ABCD, dados os pontos P, Q, R e S pertencentes aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, respectivamente.



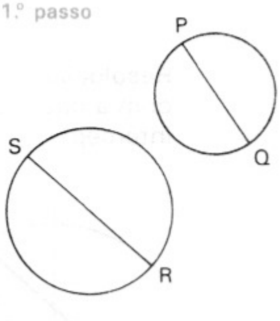
Suposto resolvido



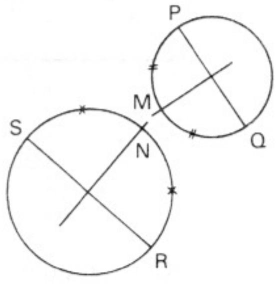
Resolução: Supondo o problema já resolvido, traçamos a diagonal $\overline{BD}$ e os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$. Então, como ∢B̂ e ∢D̂ são retas, sabemos que B pertence a um arco capaz de 90° construído sobre $\overline{PQ}$ e que D pertence a um arco capaz de 90° construído sobre $\overline{RS}$. Por outro lado, como $\overline{BD}$ é bissetriz dos ângulos B̂ e D̂, essa diagonal passa pelos

Evolução do traçado

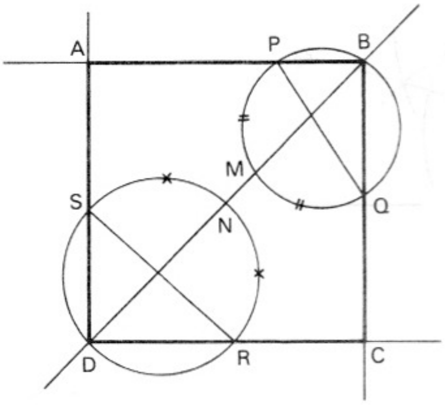
1.º passo



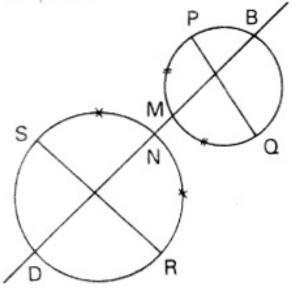
2.º passo



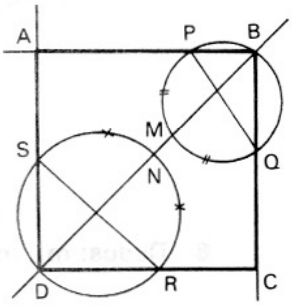
pontos médios M e N dos arcos que completam as circunferências desses arcos capazes. Assim, determinando M e N, traçamos a reta MN, obtendo os vértices B e D nos arcos capazes de 90°. Então, é fácil concluir a construção do quadrado.



3.º passo



4.º passo



Alguns problemas clássicos de triângulos

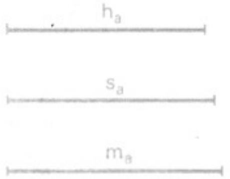
Convém que você estude com atenção os problemas que agora vamos apresentar, pois, como você irá perceber, as suas resoluções são, às vezes, bastante artificiosas. Para que você possa fixá-las mais facilmente, neste próprio livro estão propostos exercícios correspondentes a cada um desses problemas.

Resolva os exercícios de 39 a 42 do caderno de atividades.

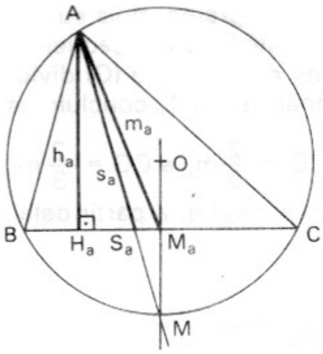
Exercícios

Como de costume, nos enunciados seguintes, fica subentendido: **Construa um triângulo ABC...**

E4.**7** Dados: h_a, m_a e s_a.

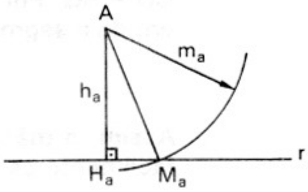


Suposto resolvido



Evolução do traçado

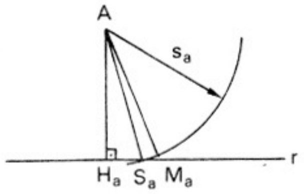
1.º passo



Resolução: Inicialmente, construímos o triângulo AH_aM_a, posicionando o vértice A e a reta r que contém os vértices B e C. Em seguida, determinamos o ponto S_a sobre r, pois sua distância ao vértice A é conhecida. Como a mediatriz de $\overline{BC}$ é a reta perpendicular a r conduzida por M_a, podemos traçá-la. Então, na intersecção dessa mediatriz com o prolongamento de $\overline{AS_a}$, obtemos o ponto M pertencente à circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Assim, para o centro O dessa circunferência conhecemos duas propriedades:

$$\begin{cases} \varphi_1\text{: O pertence à mediatriz de } \overline{BC}. \\ \varphi_2\text{: O pertence à mediatriz de } \overline{AM}. \end{cases}$$

2.º passo



Construção de triângulos

39 De um triângulo ABC são dados o lado $\overline{BC}$, S_a e a circunferência circunscrita. Determine o vértice A, sabendo que ∢Â é agudo.

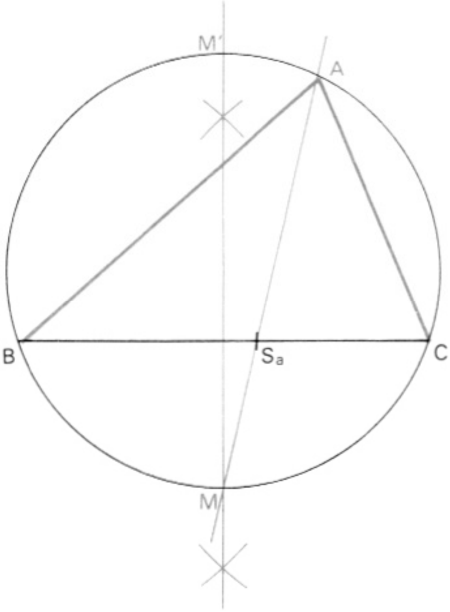
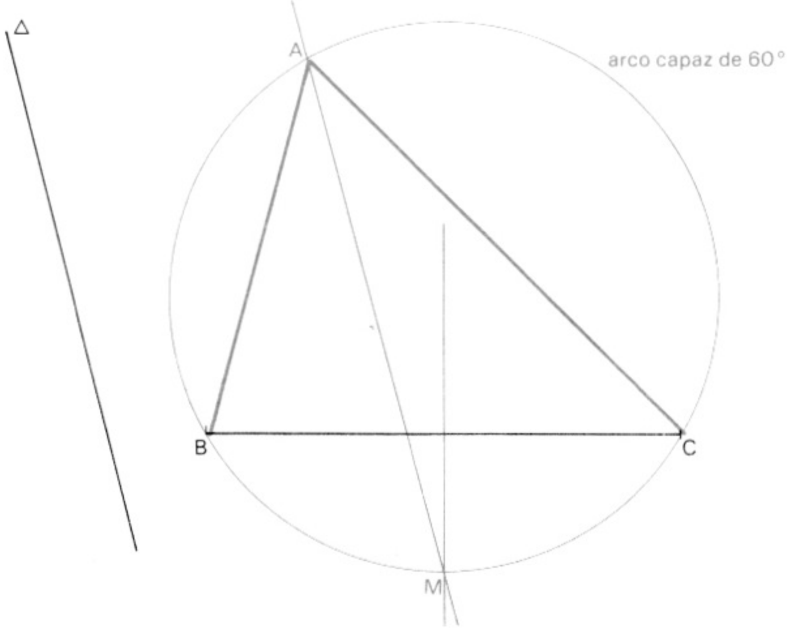


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Insista que, se não houvesse restrição para o ângulo Â, a bissetriz poderia ser traçada também por S_a e pelo ponto médio do outro arco BC, isto é, o ponto M' da figura. Nesse caso, o vértice A cairia no menor arco, $\overset{\frown}{BC}$, e ∢Â seria obtuso.

Sugestão:
Proponha que o mesmo exercício seja resolvido recorrendo ao **LG 9**.

40 Construa um triângulo ABC, dados Â = 60°, $\overline{BC}$ em posição, a direção △ da bissetriz de ∢Â, com A, B e C no sentido anti-horário.

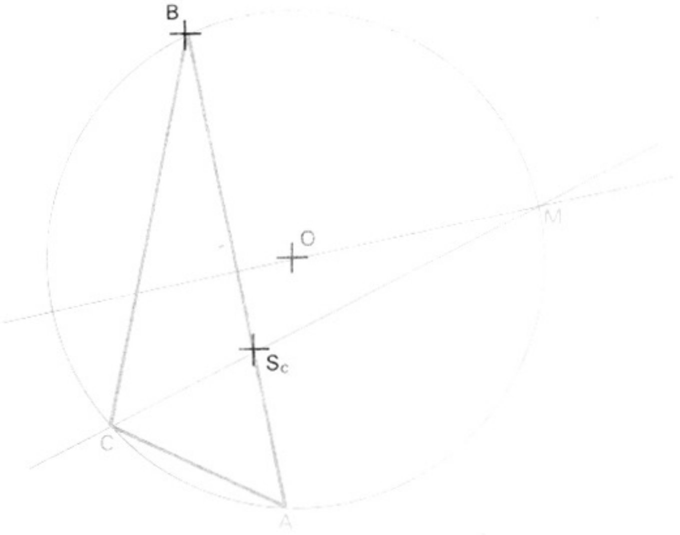


Construção de triângulo e quadrilátero

41 Construa um triângulo ABC, dados B, S_C e O em posição, com ∢Ĉ obtuso.

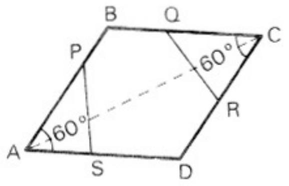
Observação: O é o circuncentro.

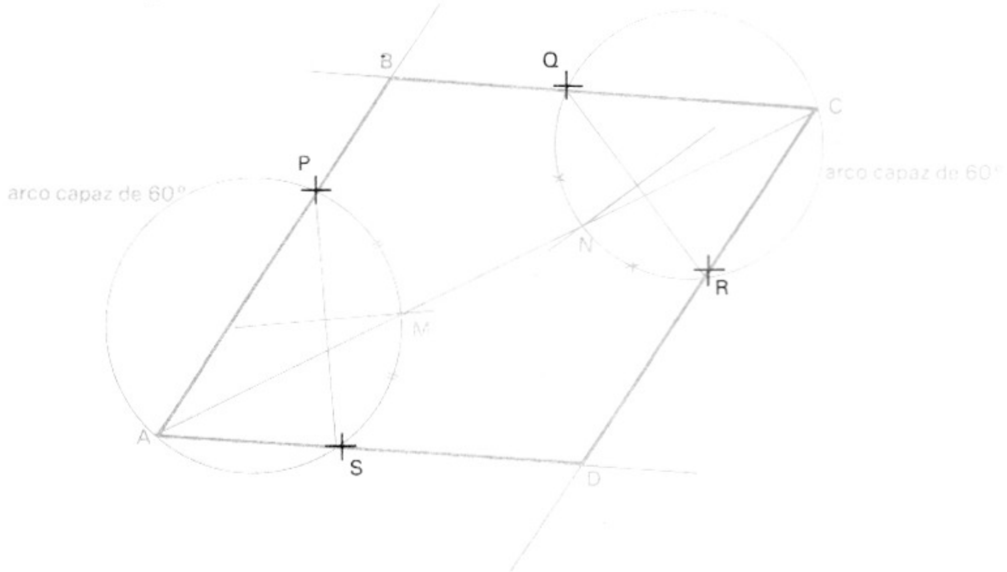
Sugestão: Traçando a circunferência circunscrita você poderá determinar o lado $\overline{AB}$ e recair no exercício 39 deste caderno.



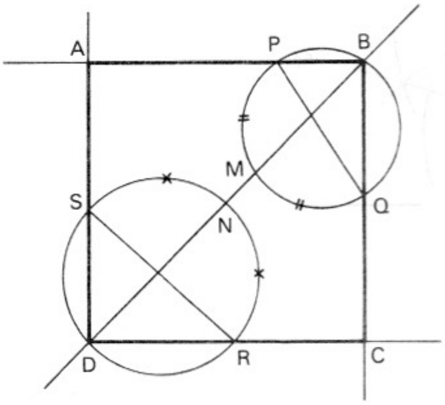
42 Construa um losango ABCD, dados $\hat{A} = 60°$ e os pontos P, Q, R e S pertencentes aos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.

Sugestão: Como as diagonais do losango são bissetrizes dos ângulos internos, esse exercício recai no E4.**6**.

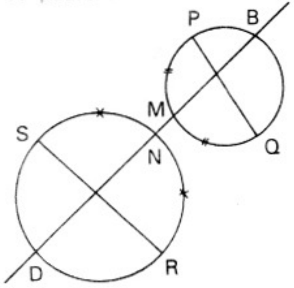

B
Q
C
P
60°
R
A
60°
S
D


B
Q
C
P
arco capaz de 60°
arco capaz de 60°
N
R
M
A
S
D

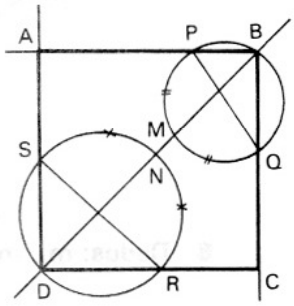
pontos médios M e N dos arcos que completam as circunferências desses arcos capazes. Assim, determinando M e N, traçamos a reta MN, obtendo os vértices B e D nos arcos capazes de 90°. Então, é fácil concluir a construção do quadrado.



3º passo



4º passo



Alguns problemas clássicos de triângulos

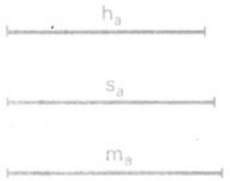
Convém que você estude com atenção os problemas que agora vamos apresentar, pois, como você irá perceber, as suas resoluções são, às vezes, bastante artificiosas. Para que você possa fixá-las mais facilmente, neste próprio livro estão propostos exercícios correspondentes a cada um desses problemas.

Resolva os exercícios de 39 a 42 do caderno de atividades.

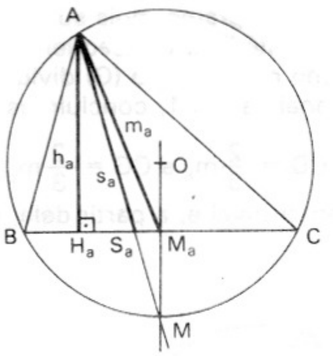
Exercícios

Como de costume, nos enunciados seguintes, fica subentendido: **Construa um triângulo ABC...**

E4.**7** Dados: h_a, m_a e s_a.

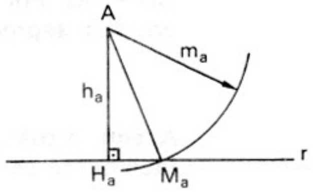


Suposto resolvido



Evolução do traçado

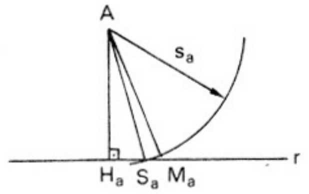
1º passo



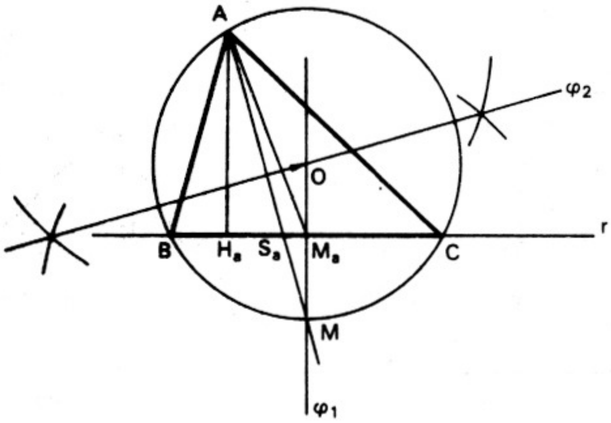
Resolução: Inicialmente, construímos o triângulo AH_aM_a, posicionando o vértice A e a reta r que contém os vértices B e C. Em seguida, determinamos o ponto S_a sobre r, pois sua distância ao vértice A é conhecida. Como a mediatriz de $\overline{BC}$ é a reta perpendicular a r conduzida por M_a, podemos traçá-la. Então, na intersecção dessa mediatriz com o prolongamento de $\overline{AS_a}$, obtemos o ponto M pertencente à circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Assim, para o centro O dessa circunferência conhecemos duas propriedades:

φ_1: O pertence à mediatriz de $\overline{BC}$.
φ_2: O pertence à mediatriz de $\overline{AM}$.

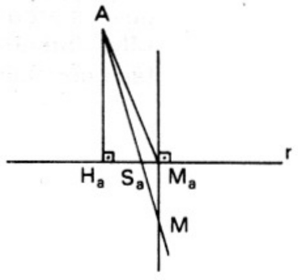
2º passo



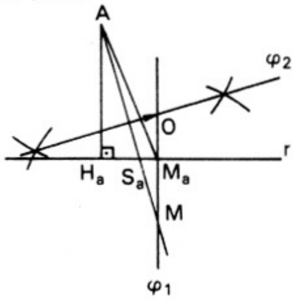
Uma vez determinado esse ponto, com centro em O e raio OA, traçamos a circunferência circunscrita, a qual determina os vértices B e C na reta r.


A
φ2
O
r
B
Hₐ
Sₐ
Mₐ
C
M
φ1

3.º passo

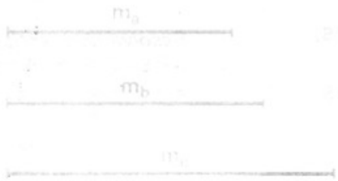


4.º passo

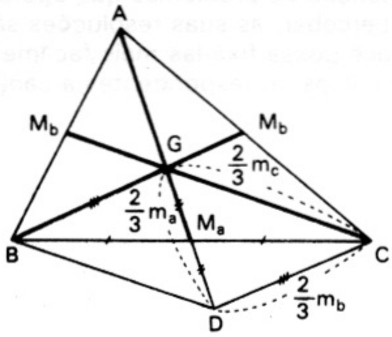

A
φ2
O
r
Hₐ
Sₐ
Mₐ
M
φ1

Resolva o exercício 43 do caderno de atividades.

E4 **8 Dados: m_a, m_b e m_c.**

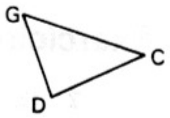


Suposto resolvido

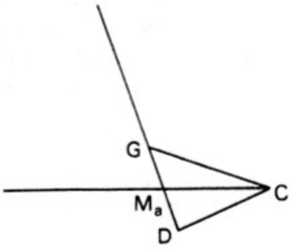

A
M_b
M_b
G
2/3 m_c
2/3 mₐ
Mₐ
B
C
D
2/3 m_b

Evolução do traçado

1.º passo



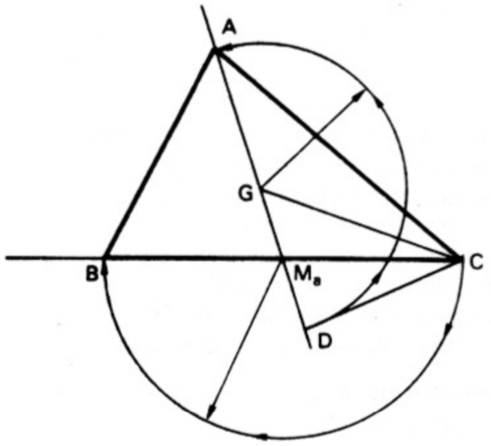
2.º passo



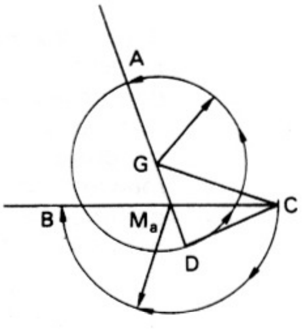
Resolução: Na figura onde já se supõe o problema resolvido, prolongamos $\overline{AM}_a$ até o ponto D de modo a obter $M_aD = GM_a$. Então, o quadrilátero BGMD é um paralelogramo, pois suas diagonais interceptam-se em seus pontos médios. Conseqüentemente, tem-se CD = BG. Por outro lado, como o baricentro (G) divide cada mediana em dois segmentos proporcionais a 2 e 1, concluímos que:

$$GD = \frac{2}{3}m_a,\ CD = \frac{2}{3}m_b \text{ e } CG = \frac{2}{3}m_c$$

Assim, o triângulo CDG é construtível e, a partir dele, determinamos facilmente os vértices A e B.



3.º passo



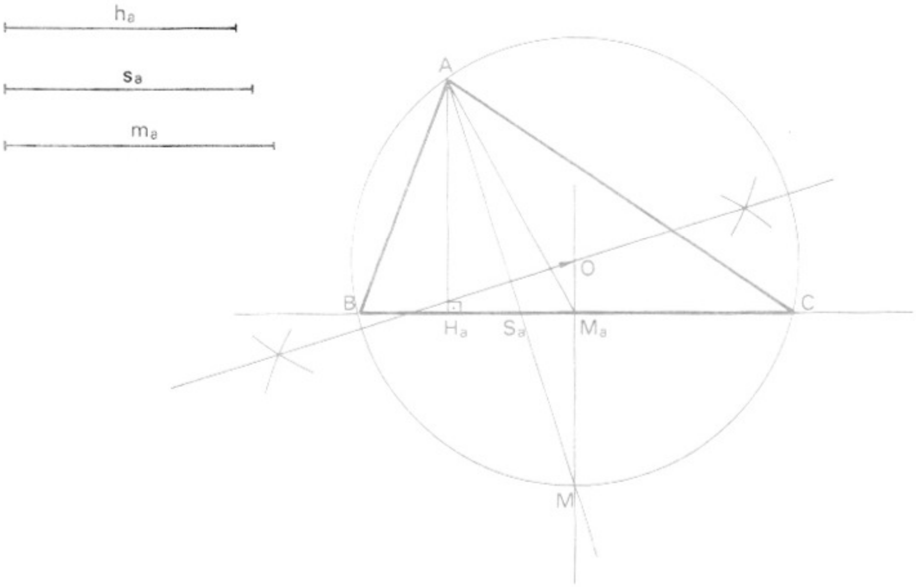
Construção de triângulos

Figura auxiliar e anotações

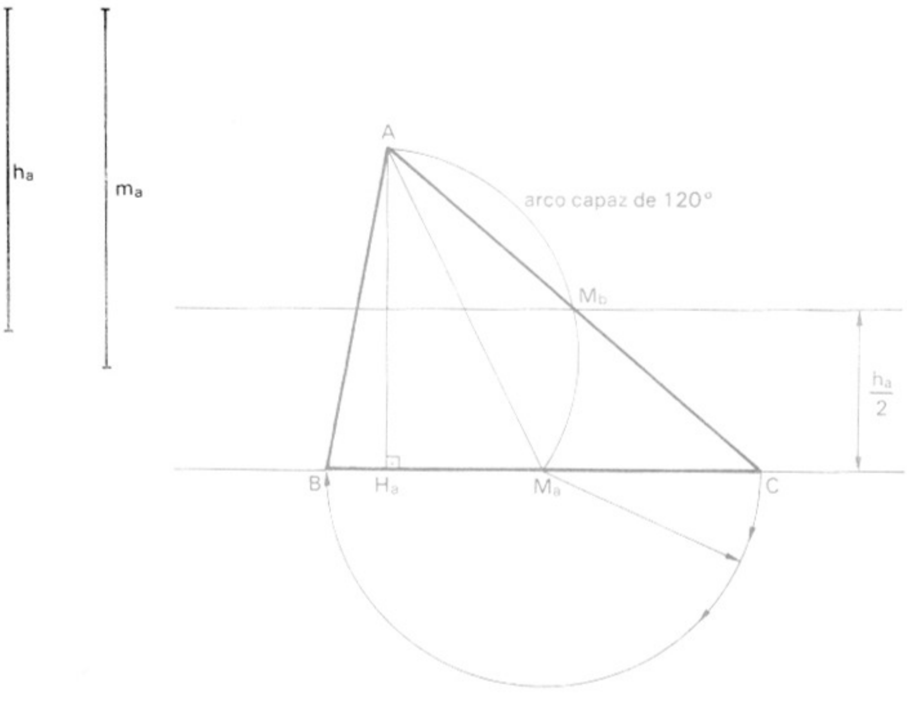
Observação:
Conscientize o estudante de que essa construção exige bastante precisão nos traçados.

Nos enunciados dos exercícios de 43 a 45, ficará subentendido:
Construa um triângulo ABC, dados...

43 h_a, m_a e s_a
Sugestão: Veja o E4.**7**.

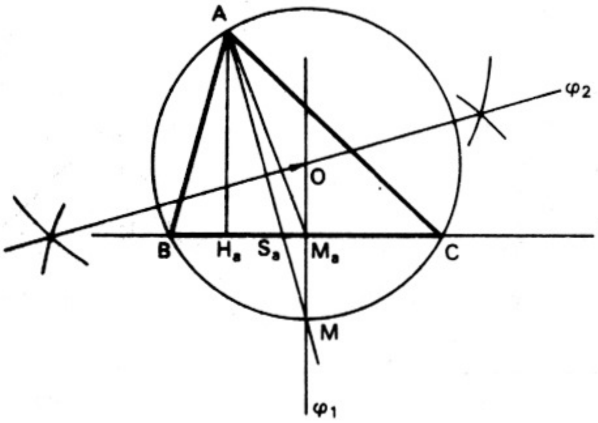

h_a
s_a
m_a
A
O
B
C
H_a
S_a
M_a
M

44 h_a, m_a e $\hat{A} = 60°$
Sugestão: Veja o E4.**12**.

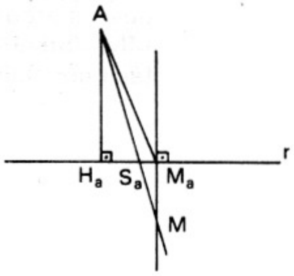

h_a
m_a
A
arco capaz de 120°
M_b
$\frac{h_a}{2}$
B
H_a
M_a
C

Construção a partir do triângulo AH_aM_a.

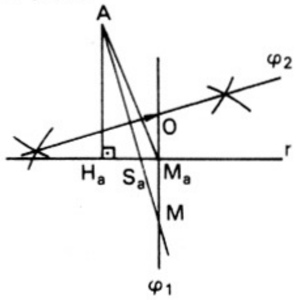
Uma vez determinado esse ponto, com centro em O e raio OA, traçamos a circunferência circunscrita, a qual determina os vértices B e C na reta r.


A
φ_2
O
r
B
H_a
S_a
M_a
C
M
φ_1

3.º passo

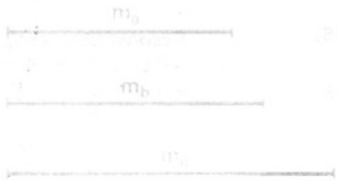


4.º passo

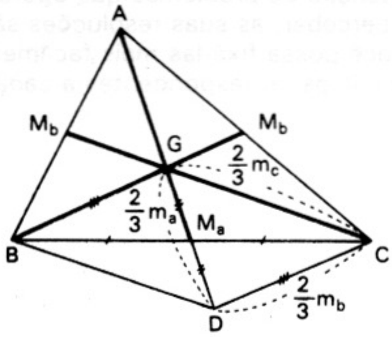

A
φ_2
O
r
H_a
S_a
M_a
M
φ_1

Resolva o exercício 43 do caderno de atividades.

E4.**8 Dados: m_a, m_b e m_c.**



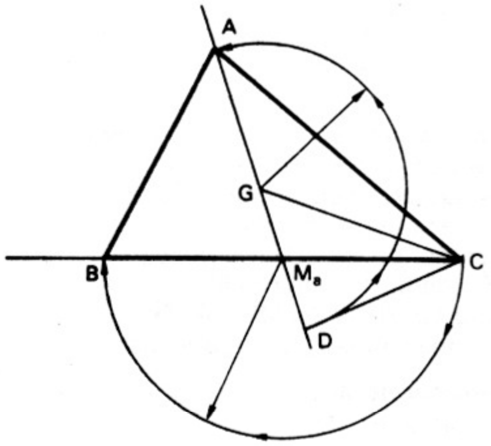
Suposto resolvido


A
M_b
M_b
G
$\frac{2}{3}m_c$
$\frac{2}{3}m_a$
M_a
B
C
$\frac{2}{3}m_b$
D

Resolução: Na figura onde já se supõe o problema resolvido, prolongamos $\overline{AM_a}$ até o ponto D de modo a obter $M_aD = GM_a$. Então, o quadrilátero BGMD é um paralelogramo, pois suas diagonais interceptam-se em seus pontos médios. Conseqüentemente, tem-se CD = BG. Por outro lado, como o baricentro (G) divide cada mediana em dois segmentos proporcionais a 2 e 1, concluímos que:

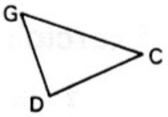
$$GD = \frac{2}{3}m_a,\ CD = \frac{2}{3}m_b \text{ e } CG = \frac{2}{3}m_c$$

Assim, o triângulo CDG é construtível e, a partir dele, determinamos facilmente os vértices A e B.

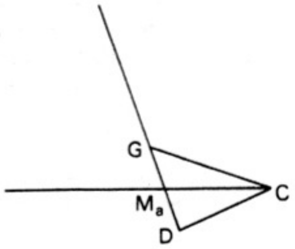


Evolução do traçado

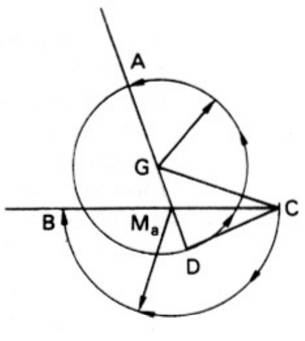
1.º passo



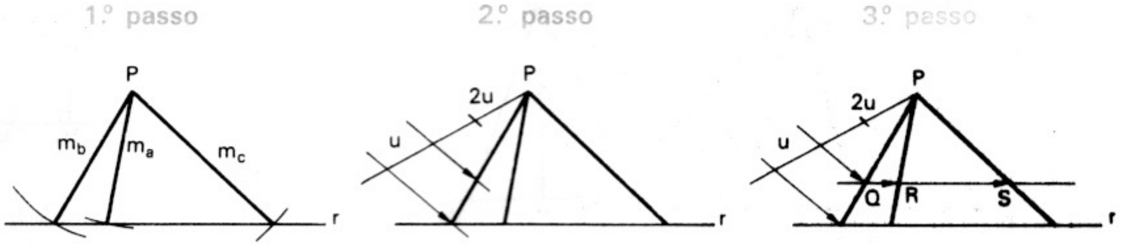
2.º passo



3.º passo



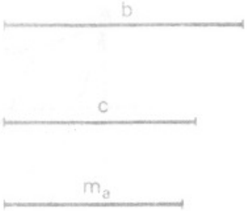
Observação: Os lados do triângulo CDG são $\frac{2}{3}m_a$, $\frac{2}{3}m_b$ e $\frac{2}{3}m_c$. Para construir esses segmentos, é prático proceder conforme indicam as figuras seguintes, onde, no 1.º passo, a reta **r** e o ponto **P** são posicionados de forma arbitrária.



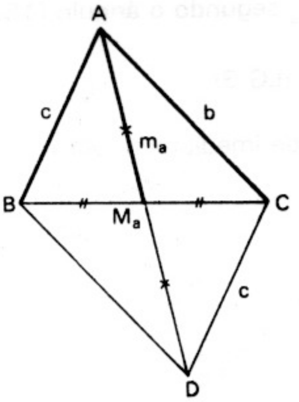
$$PQ = \frac{2}{3}m_b,\ PR = \frac{2}{3}m_a \text{ e } PS = \frac{2}{3}m_c$$

E4.**9** Dados: $m_a = 45mm$, $m_b = 50mm$ e $m_c = 60mm$. Qual é, aproximadamente, o perímetro desse triângulo?

E4.**10** Dados: b, c e m_a.

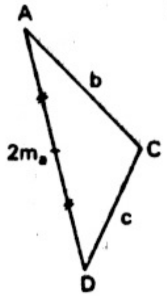


Suposto resolvido

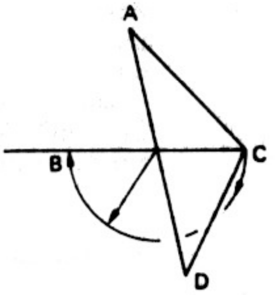


Evolução do traçado

1.º passo



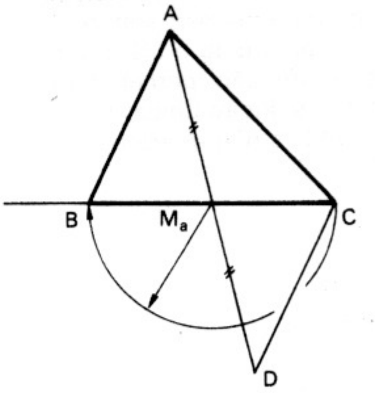
2.º passo



Resolução: Supondo o problema já resolvido, prolongamos $\overline{AM_a}$ até o ponto D, de modo a obter $M_aD = AM_a$. Então, o quadrilátero ABDC é um paralelogramo, pois suas diagonais interceptam-se em seus pontos médios. Logo, CD = AB. Assim o triângulo ACD é construtível, já que dele conhecemos os três lados:

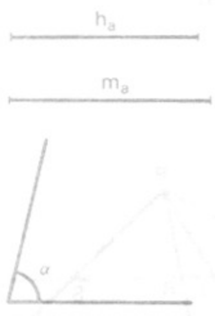
$$AC = b,\ CD = c \text{ e } AD = 2m_a$$

Construindo o triângulo ACD obtemos, facilmente, o vértice B.

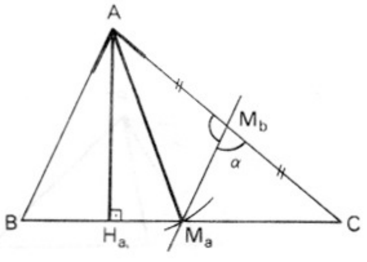


E4.**11** Dados: $a = 42mm$, $b = 50mm$ e $m_c = 40mm$. Qual é, aproximadamente, a medida de ∢Â?

E4.**12** Dados: h_a, m_a e $\hat{A} = \alpha$.

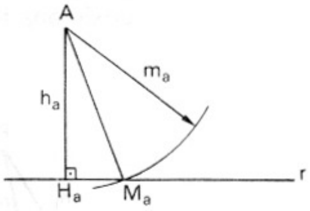


Suposto resolvido

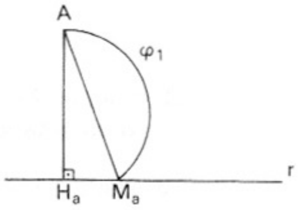


Evolução do traçado

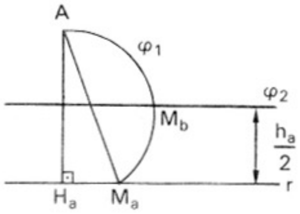
1.º passo



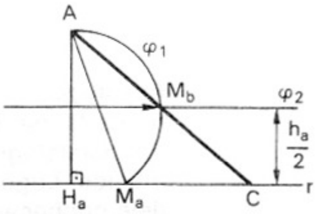
2.º passo



3.º passo



4.º passo

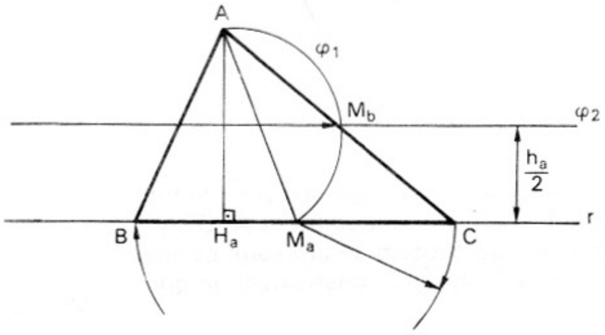


Resolução: Na figura onde já se supõe o problema resolvido, traçamos a reta por M_a e M_b. Lembrando que essa reta é paralela ao lado $\overline{AB}$, é imediato que $M_a\hat{M}_bC = \alpha$. Com isso, para obter o triângulo ABC, primeiramente construímos o triângulo AH_aM_a, posicionando o vértice A e a reta **r**, que contém os vértices B e C. Então, do ponto M_b conhecemos duas propriedades.

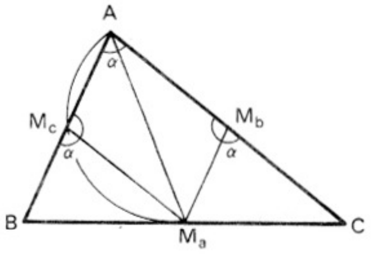
φ_1: M_b enxerga AM_a segundo o ângulo $(160° - \alpha)$ (LG 5)

φ_2: M_b dista $\frac{h_a}{2}$ de **r** (LG 3).

Determinando M_b obtemos de imediato os vértices C e B.



Observação: Nesta resolução só foi construído um dos arcos capazes de $180° - \alpha$ sobre $\overline{AM}$. É justo indagar se o problema não admite outra solução, que se perdeu por não termos construído o LG 5 por completo. Porém, analisando essa dúvida com atenção, percebemos que ela não procede, isto é, o problema admite solução única, pois o arco capaz não construído determina o ponto M_c e não altera o triângulo na forma ou no tamanho.



Resolva o exercício 44 do caderno de atividades.

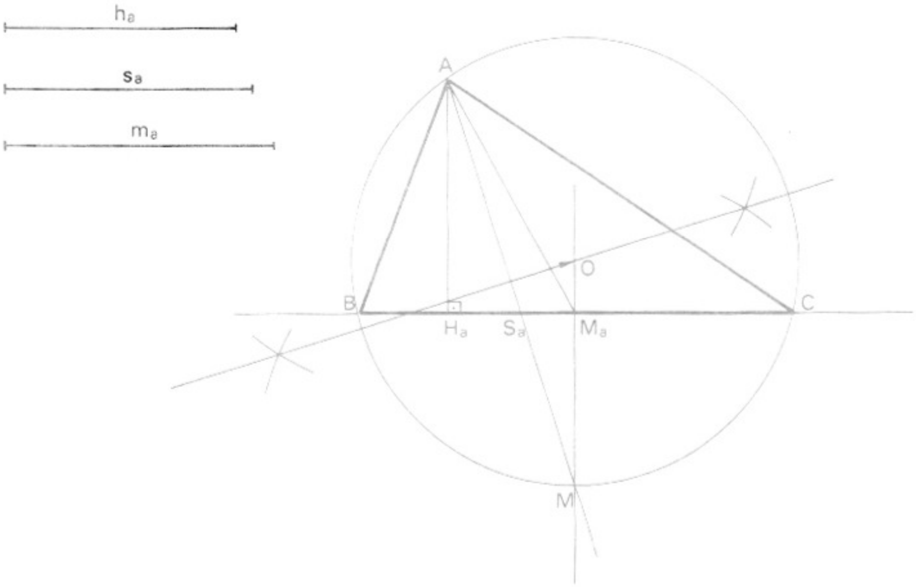
Construção de triângulos

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Conscientize o estudante de que essa construção exige bastante precisão nos traçados.

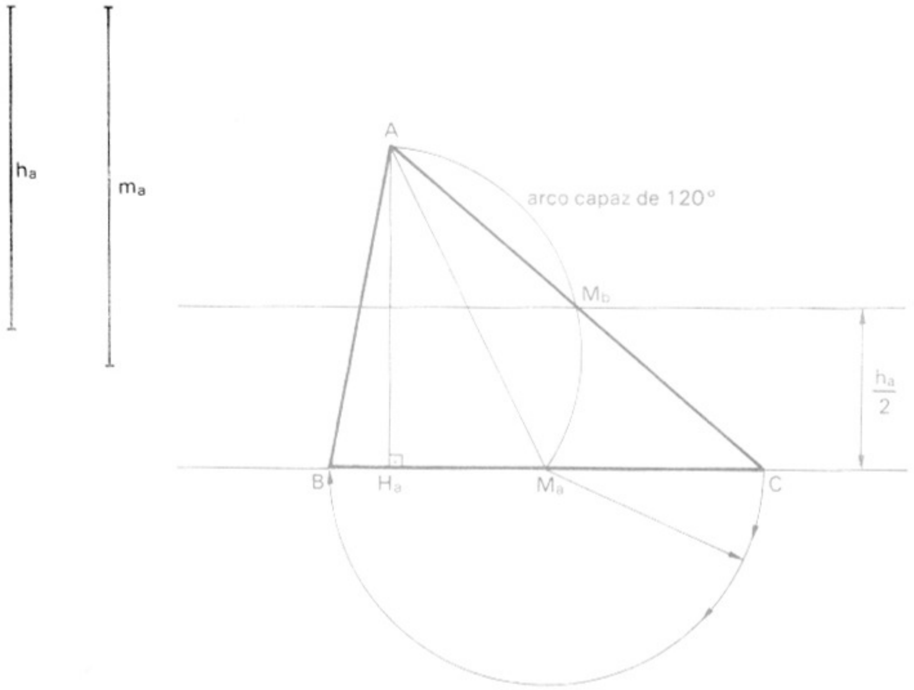
Nos enunciados dos exercícios de 43 a 45, ficará subentendido:
Construa um triângulo ABC, dados...

43 h_a, m_a e s_a
Sugestão: Veja o E4.**7**.



h_a
s_a
m_a
A
O
B
C
H_a
S_a
M_a
M

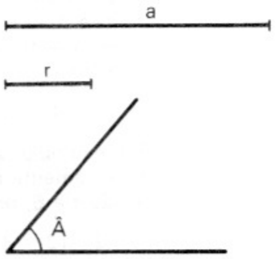
44 h_a, m_a e $\hat{A} = 60°$
Sugestão: Veja o E4.**12**.



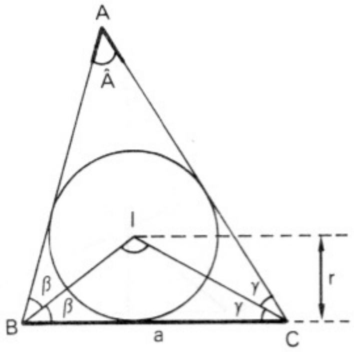
h_a
m_a
A
arco capaz de 120°
M_b
$\frac{h_a}{2}$
B
H_a
M_a
C

Construção a partir do triângulo AH_aM_a.

E4 **13** Dados: a, r e Â.



Suposto resolvido



Resolução: Vamos imaginar o problema já resolvido e seja I o incentro do triângulo ABC. Então, $\overline{BI}$ e $\overline{CI}$ são segmentos das bissetrizes de $\sphericalangle\hat{B}$ e $\sphericalangle\hat{C}$. Fazendo $\frac{\hat{B}}{2} = \beta$ e $\frac{\hat{C}}{2} = \gamma$, temos:

$$\triangle BIC: \quad \boxed{B\hat{I}C + \beta + \gamma = 180^\circ} \quad (I)$$

$$\triangle ABC: \quad \hat{A} + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\beta + 2\gamma = 180^\circ - A \xRightarrow{:2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta + \gamma = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}} \quad (II)$$

De (I) e (II), vem:

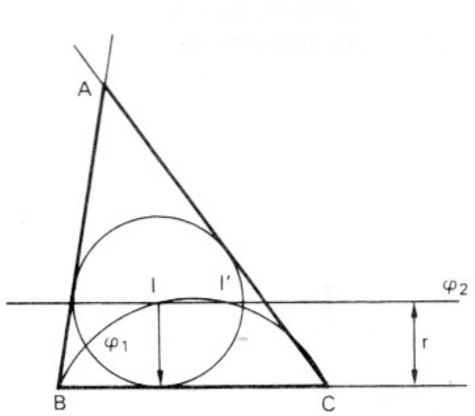
$$B\hat{I}C + 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} = 180^\circ$$

$$\therefore \quad \boxed{B\hat{I}C = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}}$$

De posse dessa relação, podemos proceder à construção pedida. Para tanto, primeiramente posicionamos $\overline{BC}$ e, então, temos duas propriedades para o incentro:

φ_1: I enxerga $\overline{BC}$ segundo o ângulo $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ (LG 5)
φ_2: I dista **r** de $\overline{BC}$ (LG 3)

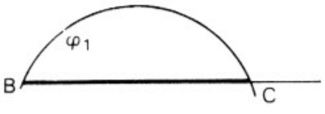
Após obter I, construímos a circunferência inscrita. Por B e C traçamos as tangentes a ela. Essas tangentes interceptam-se no vértice A.



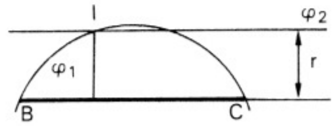
Observação: Usando I' para incentro obtém-se a mesma solução, mudando apenas a posição.

Evolução do traçado

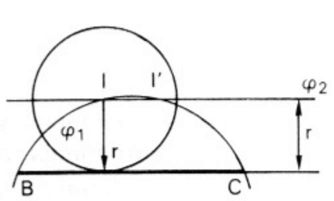
1.º passo



2.º passo



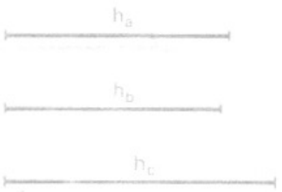
3.º passo

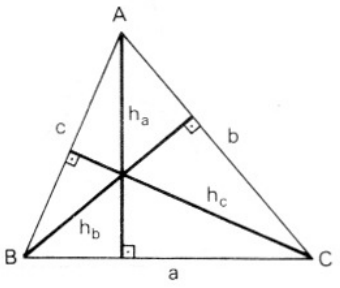


E4.14 Dados: a = 50mm, r = 13mm e Â = 60°. Qual é, aproximadamente, a soma das medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$?

◀ **Atenção!** Essa construção exige muita precisão nos traçados.

E4.15 Dados: h_a, h_b e h_c.





Lembre-se de que duas seqüências de números (m, n, p) e (t, u, v) são inversamente proporcionais quando:

m . t = n . u = p . v

Por exemplo, 2, 3 e 4 são inversamente proporcionais a 12, 8 e 6, pois:

2 . 12 = 3 . 8 = 4 . 6

Resolução: Sendo S a área do triângulo, temos:

$$S = \frac{a\ .\ h_a}{2} = \frac{b\ .\ h_b}{2} = \frac{c\ .\ h_c}{2}$$

$$\therefore\ \boxed{a\ .\ h_a = b\ .\ h_b = c\ .\ h_c}\ (1)$$

As igualdades em (1) mostram que **a, b** e **c** são **inversamente proporcionais** a h_a, h_b e h_c.

Consideremos, agora, três segmentos quaisquer de comprimentos a′, b′ e c′, tais que:

$$\boxed{a'\ .\ h_a = b'\ .\ h_b = c'\ .\ h_c}\ (2)$$

Dividindo, membro a membro, as igualdades em (1) e (2), temos:

$$\frac{a\ .\ h_a}{a'\ .\ h_a} = \frac{b\ .\ h_b}{b'\ .\ h_b} = \frac{c\ .\ h_c}{c'\ .\ h_c}$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}}\ (3)$$

As igualdades em (1) mostram que **as alturas de um triângulo são inversamente proporcionais aos lados.**

Dessa análise, concluímos que quaisquer segmentos a′, b′ e c′ inversamente proporcionais às alturas dadas são diretamente proporcionais aos lados do triângulo procurado. Assim, **o triângulo de lados** a′, b′ e c′ **terá a mesma forma do triângulo procurado.**

Então, uma vez obtidos segmentos a′, b′ e c′ quaisquer, inversamente proporcionais a h_a, h_b e h_c, podemos construir o triângulo procurado. Para tanto, basta aplicar o **método da semelhança.**

Ora, como as alturas de um triângulo são inversamente proporcionais aos respectivos lados, podemos obter a′, b′, c′ como alturas do triângulo de lados h_a, h_b e h_c. Assim, a construção seguinte se justifica.

Observe as seguintes seqüências:

(2, 3, 4)
(4, 6, 8)
(12, 8, 6)

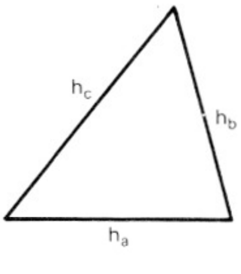
Tanto a primeira quanto a segunda são inversamente proporcionais à terceira, isto é:

$$\begin{cases} 2\ .\ 12 = 3\ .\ 8 = 4\ .\ 6 \\ 4\ .\ 12 = 6\ .\ 8 = 8\ .\ 6 \end{cases}$$

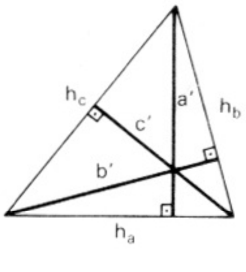
Mas, note que as duas primeiras são diretamente proporcionais:

$$\left\{ \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} \right.$$

1.º passo



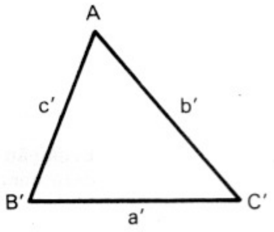
2.º passo



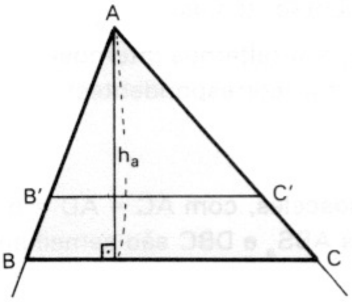
Note, no **2.º passo**, que:

$a'\ .\ h_a = b'\ .\ h_b = c'\ .\ h_c$

3.º passo



4.º passo

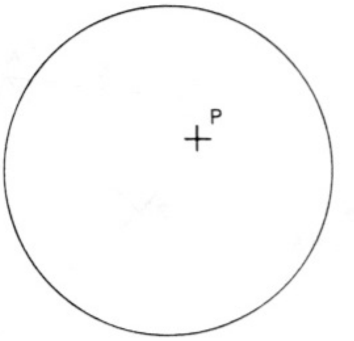


Resolva o exercício 45 do caderno de atividades.

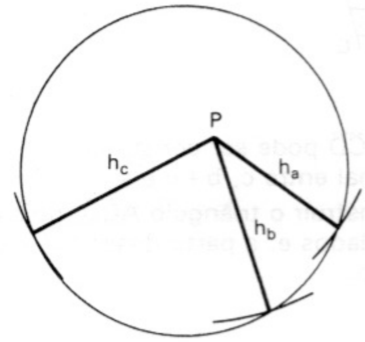
Observação: Para construir segmentos inversamente proporcionais a segmentos dados, há outros artifícios além daquele que foi utilizado na resolução desse problema. Um deles, bastante interessante, é o seguinte:

A partir de uma circunferência de raio arbitrário e de um ponto P escolhido de forma conveniente no seu interior, procedemos segundo os seguintes passos:

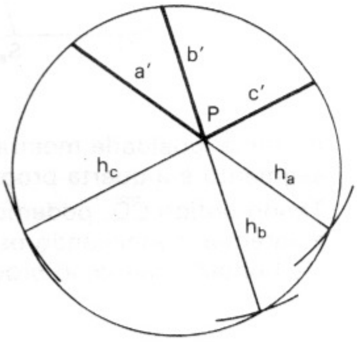
1.º passo



2.º passo



3.º passo

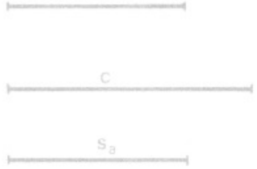


Da potência de P em relação à circunferência, conclui-se, no 3.º passo, que:

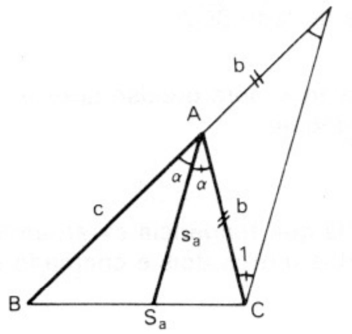
$$a' \cdot h_a = b' \cdot h_b = c' \cdot h_c$$

Isto é, a', b' e c' são inversamente proporcionais a h_a, h_b e h_c.

E4. **16** Dados: b, c e s_a.



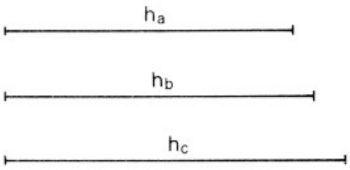
Suposto resolvido

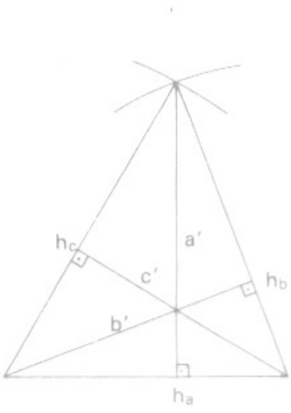


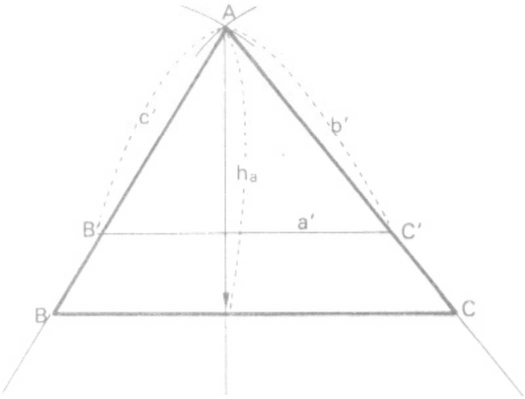
Construção de triângulos

Figura auxiliar e anotações

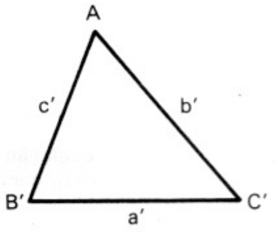
45 h_a, h_b e h_c
Sugestão: Veja o E4.**15**.



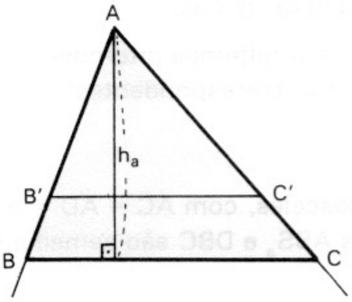



A
c'
b'
h_a
B'
a'
C'
B
C

3.º passo



4.º passo

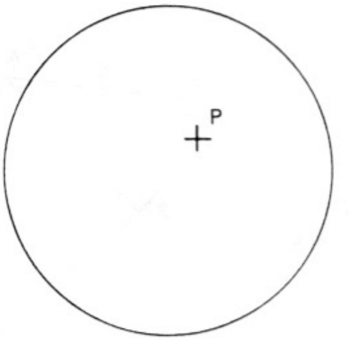


Resolva o exercício 45 do caderno de atividades.

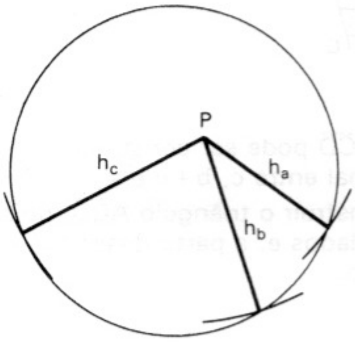
Observação: Para construir segmentos inversamente proporcionais a segmentos dados, há outros artifícios além daquele que foi utilizado na resolução desse problema. Um deles, bastante interessante, é o seguinte:

A partir de uma circunferência de raio arbitrário e de um ponto P escolhido de forma conveniente no seu interior, procedemos segundo os seguintes passos:

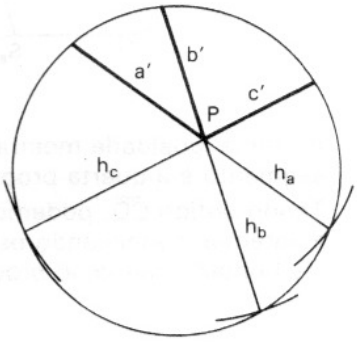
1.º passo



2.º passo



3.º passo



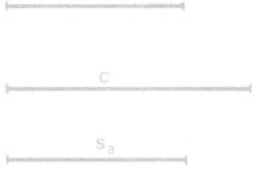
Da potência de P em relação à circunferência, conclui-se, no 3.º passo, que:

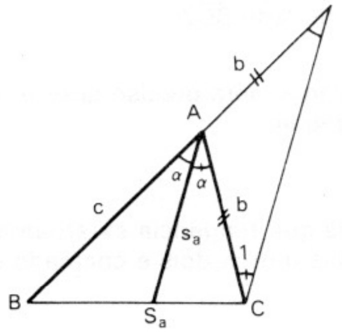
$$a' \cdot h_a = b' \cdot h_b = c' \cdot h_c$$

Isto é, a', b' e c' são inversamente proporcionais a h_a, h_b e h_c.

E4. **16** Dados: b, c e s_a.

Suposto resolvido





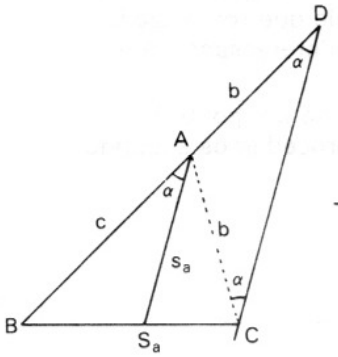
Resolução: Na figura onde já se supõe o problema resolvido, traçamos $\overline{CD}$ paralelo à bissetriz $\overline{AS_a}$. Então, temos:

$$\begin{cases} \hat{C}_1 = C\hat{A}S_a = \alpha \text{ (alternos internos)} \\ \hat{D} = B\hat{A}S_a = \alpha \text{ (correspondentes)} \end{cases}$$

Logo, $\boxed{\hat{C}_1 = \hat{D}}$

Assim, o triângulo ACD é isósceles, com AC = AD = b.

Por outro lado, os triângulos ABS_a e DBC são semelhantes e disso podemos concluir que:



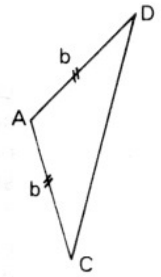
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AS_a}{CD} \Rightarrow \boxed{\frac{c}{b+c} = \frac{s_a}{CD}}$$

A última igualdade mostra que $\overline{CD}$ pode ser construído, pois esse segmento é a quarta proporcional entre c, b + c e s_a.

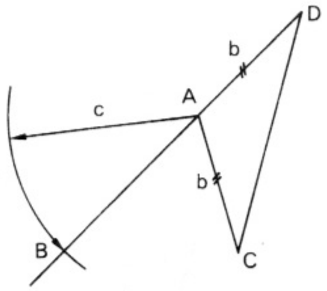
Tendo obtido $\overline{CD}$, podemos construir o triângulo ACD, pois dele estaremos conhecendo os três lados e, a partir desse triângulo, será fácil obter o triângulo procurado.

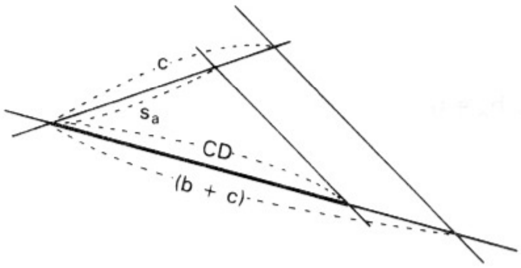
Evolução do traçado, após a determinação de $\overline{CD}$.

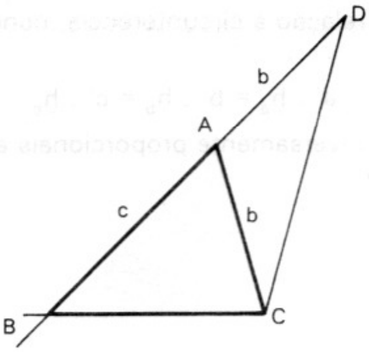
1.º passo



2.º passo







E4. **17** Dados: b = 35mm, c = 50mm e s_a = 32mm. Qual é, aproximadamente, a medida do lado $\overline{BC}$?

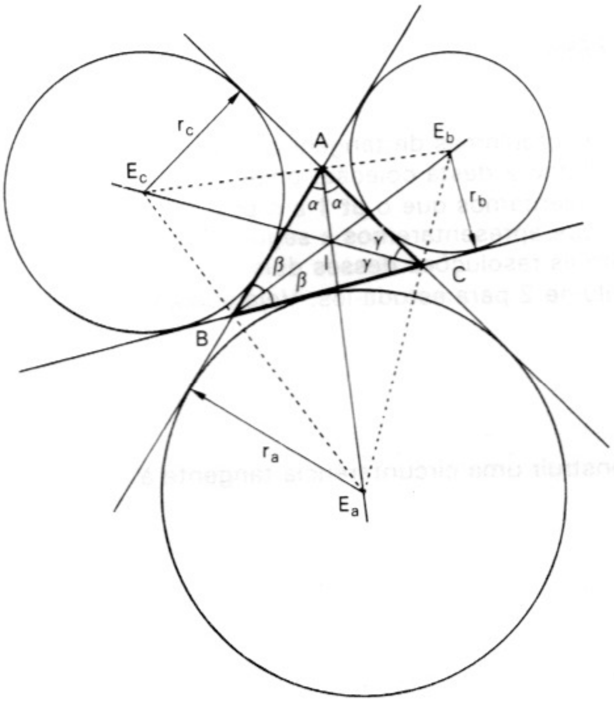
Antes de passarmos ao próximo problema, será preciso apresentar o conceito de circunferência ex-inscrita a um triângulo.

Definição

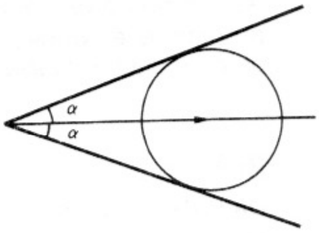
Num triângulo, qualquer circunferência que tangencia externamente um dos lados e também os prolongamentos dos outros dois é chamado **circunferência ex-inscrita** ao triângulo.

Observe que todo triângulo possui três circunferências ex-inscritas, cada uma relativa a um lado. Os centros dessas circunferências são chamados **ex-incentros**.

Os centros das circunferências ex-inscritas tangentes aos lados opostos aos vértices A, B e C serão denotados por E_a, E_b e E_c, respectivamente, e os seus raios, por r_a, r_b e r_c.



Lembre-se de que, quando uma circunferência tangencia os lados de um ângulo, o centro pertence à bissetriz desse ângulo.



São de verificação imediata as seguintes propriedades:

- As semi-retas AE_a, BE_b e CE_c são bissetrizes dos ângulos internos do triângulo ABC.
- As retas E_aE_b, E_aE_c e E_bE_c são bissetrizes dos ângulos externos do triângulo ABC.
- Como as bissetrizes interna e externa relativas a um mesmo vértice são perpendiculares, A, B e C são os pés das alturas do triângulo $E_aE_bE_c$. Isto é, ABC **é o triângulo órtico do triângulo** $E_aE_bE_c$.

◁ IMPORTANTE
Essa propriedade permite construir facilmente o triângulo ABC quando são dados E_a, E_b e E_c. Esse também é um problema clássico.

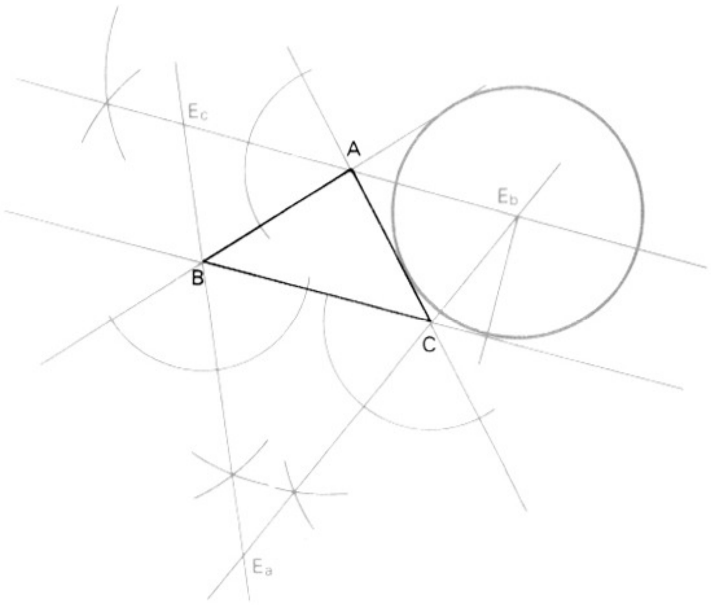
E4. **18** Dados: a = 35mm, b = 44mm e c = 52mm. Qual é, aproximadamente, a medida de r_a?

Observação: Você pode obter E_a na intersecção das bissetrizes externas relativas aos vértices B e C.

Resolva os exercícios 46 e 47 do caderno de atividades.

Ex-incentro — Construção de triângulo

46 Obtenha os ex-incentros do triângulo ABC e construa a circunferência ex-inscrita tangente ao lado $\overline{AC}$ (centro em E_b).



47 Construa um triângulo ABC, dados os ex-incentros E_a, E_b e E_c.
Sugestão: Lembre-se que o triângulo ABC é o órtico do triângulo $E_aE_bE_c$.

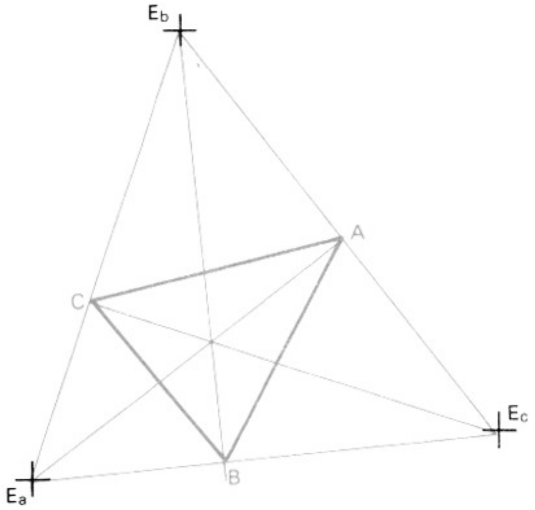


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Chame a atenção do aluno para o fato de que determinar os ex-incentros equivale a determinar o triângulo fundamental de um triângulo órtico dado. Então, reforce que ABC é o órtico do triângulo $E_aE_bE_c$.

5

Tangência: complementos

Neste capítulo, vamos retomar o estudo dos problemas de tangência — **pt** — entre retas e circunferências iniciado no volume 2 desta coleção, onde apresentamos seis problemas desse tipo. Adiantamos que o **pt 1** e o **pt 3** serão bastante utilizados nas construções que apresentaremos a seguir. Por isso, é fundamental que você conheça bem as resoluções desses dois problemas e, se necessário, consulte o volume 2 para estudá-los. Veja abaixo os enunciados desses problemas.

pt 1

Dados dois pontos A e B e uma reta **t**, construir uma circunferência tangente à reta **t** e que passe pelos pontos A e B.

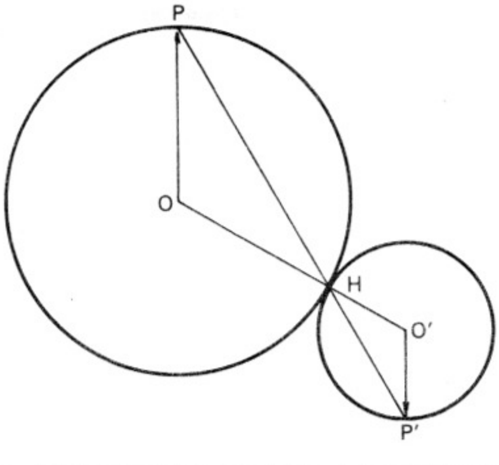
pt 3

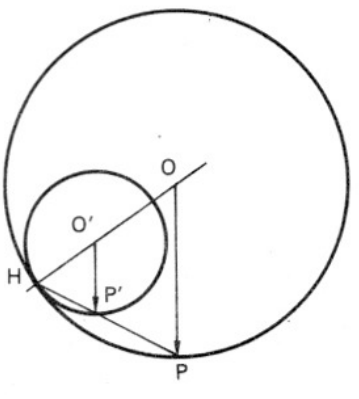
Dados dois pontos A e B e uma circunferência φ, construir uma circunferência λ que passe pelos pontos A e B e tangencie a circunferência λ.

Para reiniciar o estudo dos problemas de tangência, teremos que relembrar as seguintes propriedades da homotetia.

Lembre-se

- Se duas circunferências são tangentes, o ponto H de tangência é um centro de homotetia das mesmas.
- Toda reta conduzida por H intercepta as circunferências em pontos homólogos, os quais são extremidades de raios paralelos.
- Reciprocamente, toda reta conduzida pelas extremidades de dois raios paralelos passa pelo centro de homotetia, isto é, pelo ponto H de tangência.

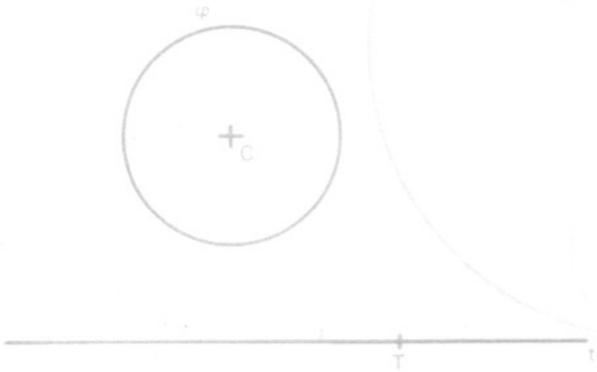




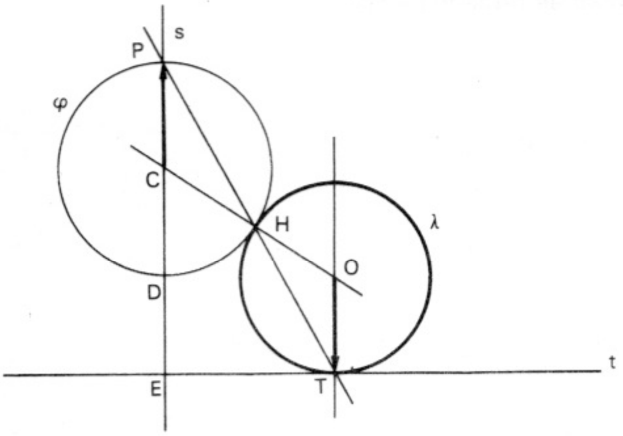
Veja como essas propriedades permitem uma nova resolução, diferente da que foi apresentada no volume 2, para o **pt 5**.

pt 5

Construir uma circunferência tangente à reta **t** no ponto T e tangente também à circunferência φ.

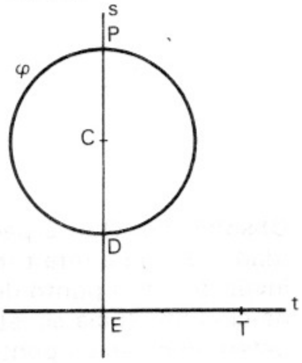


Vamos imaginar o problema já resolvido.

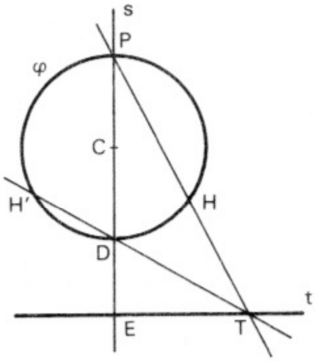


Evolução do traçado

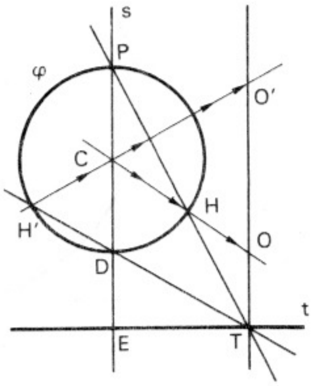
1º passo



2º passo



3º passo



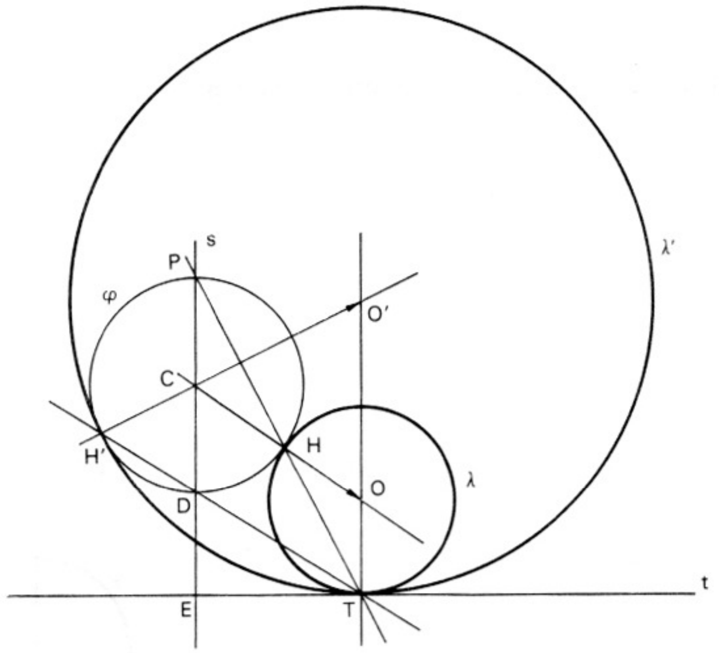
Seja $\overline{CP}$ o raio homólogo de $\overline{OT}$. Então, pelo que acabamos de relembrar, a reta conduzida por P e T intercepta a circunferência φ no ponto em que ela tangencia a circunferência procurada. Assim, a construção seguinte se justifica.

1º) Por C traça-se **s** perpendicular a **t**, determinando P e D em φ.

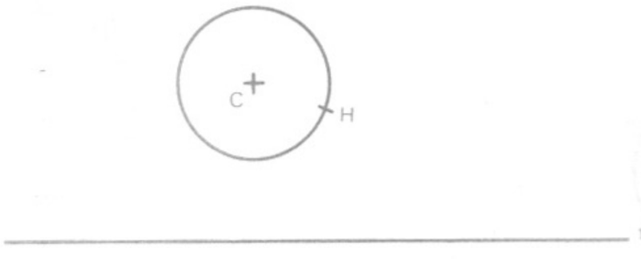
2º) A reta por P e T intercepta φ em H.

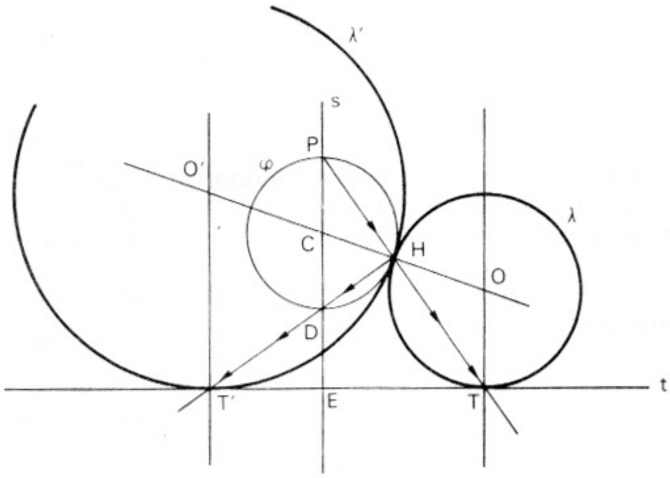
3º) A reta por D e T intercepta φ em H'.

4º) $\overleftrightarrow{CH}$ e $\overleftrightarrow{CH'}$ determinam os centros procurados na reta conduzida por T perpendicularmente a **t**.



Observação: O **pt 5** pede uma circunferência tangente a outra circunferência φ (dada) e a uma reta **t** (dada), conhecido o ponto T de tangência na reta. Ora, ao invés de dar o ponto de tangência na reta **t**, podemos dar o ponto de tangência na circunferência φ, isto é, ao invés de dar T, pode-se dar H. Nesse caso determinam-se os pontos T e T' em t, traçando-se as retas PH e HD.



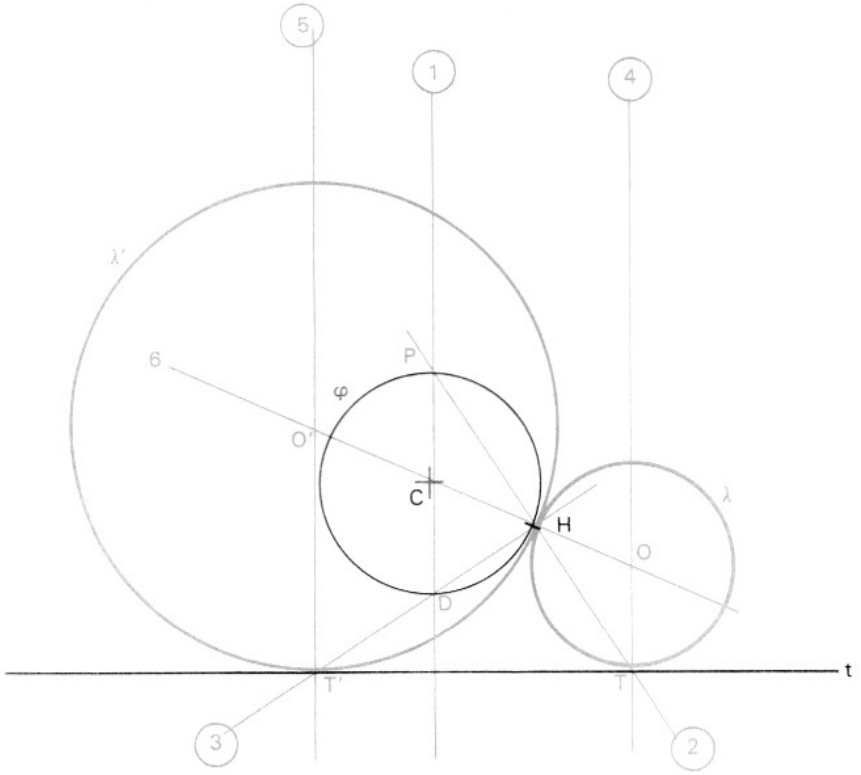


Resolva o exercício 48 do caderno de atividades.

Agora podemos passar ao estudo de um novo problema de tangência.

Tangência

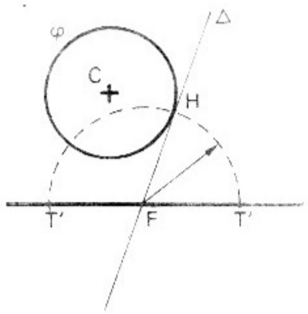
48 São dados uma circunferência φ, um ponto H sobre ela e uma reta **t**. Construa uma circunferência que tangencie a reta **t** e tangencie a circunferência φ em H.



Traçam-se sucessivamente as retas:
① determinando P e D
② determinando T
③ determinando T'
④, ⑤ e ⑥ determinando O e O'.

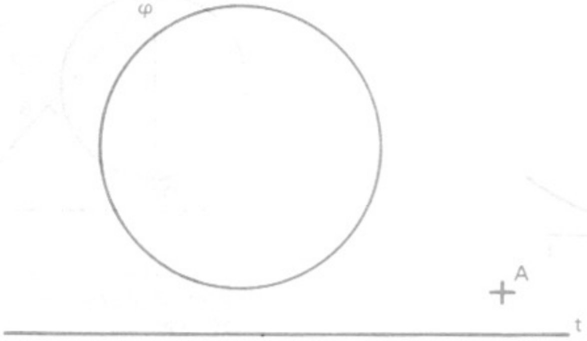
Figura auxiliar e anotações

Sugestão:
Peça ao aluno que resolva o mesmo problema pela teoria dos feixes de circunferências.
Como se conhece H, é possível traçar o eixo radical do feixe, o qual intercepta t em F. Com centro F e raio FH, determinam-se T e T'.

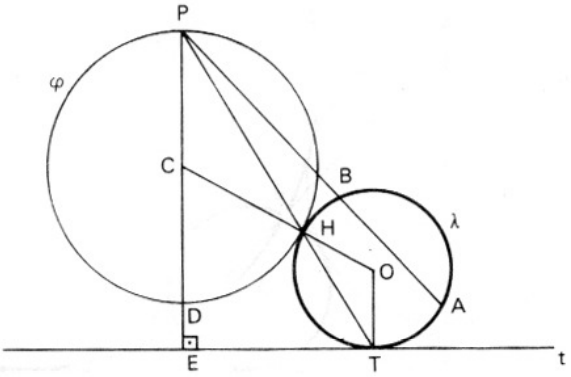


pt 7

São dados um ponto A, uma reta **t** e uma circunferência φ. Construir uma circunferência que passe por A e tangencie **t** e φ.

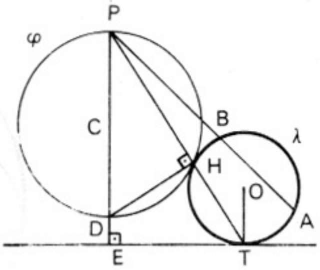


Suposto resolvido



Resolução: Há dois casos a serem analisados.

1.º caso: Observemos a figura onde já se supõe o problema resolvido. Sendo T o ponto em que a circunferência λ procurada tangencia **t**, pelo que acabamos de relembrar, o raio $\overline{OT}$ tem como homólogo o raio $\overline{CP}$ em φ. Logo, $\overline{OT}$ e $\overline{CP}$ são paralelos, o que garante que a reta conduzida por P e C é perpendicular a **t**.



PĤD é um ângulo reto por estar inscrito numa semicircunferência.

Assim, os triângulos PET e PHD são semelhantes, pois:

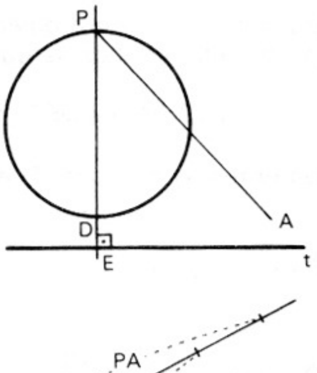
$$\begin{cases} \hat{P} \text{ é ângulo comum e} \\ \measuredangle\, P\hat{E}T \equiv \measuredangle\, P\hat{H}D \text{ (ambos são retos)} \end{cases}$$

Então, temos:

$$(\triangle PET \sim \triangle PHD) \Rightarrow \frac{PE}{PH} = \frac{PT}{PD} \Rightarrow \boxed{PE \times PD = PT \times PH} \quad (1)$$

Por outro lado, da potência do ponto P em relação à circunferência λ, podemos escrever:

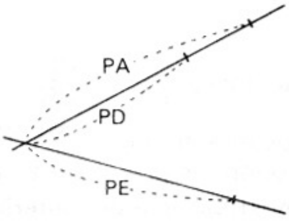
$$\boxed{PA \times PB = PT \times PH} \quad (2)$$



Por fim, de (1) e (2) vem:

$$\boxed{PA \times PB = PE \times PD}$$

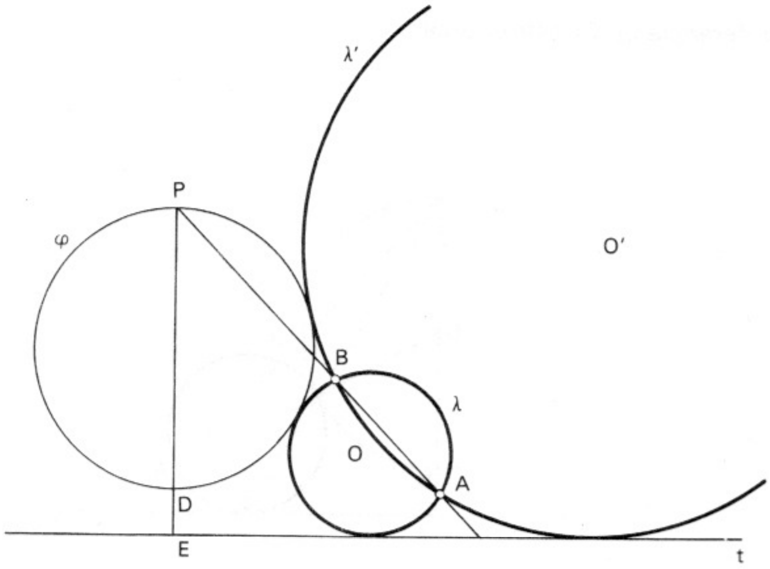
Ou ainda: $\boxed{\dfrac{PA}{PE} = \dfrac{PD}{PB}}$



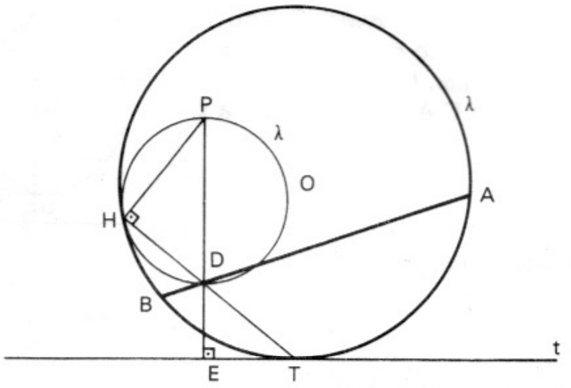
Nesta última igualdade, os segmentos PA, PE e PD são facilmente determináveis; então, por quarta proporcional, obtemos PB. Ora, mas se A e B são conhecidos, o problema se reduz ao seguinte:

Construir uma circunferência que passe pelos pontos A e B e tangencie a reta t.

Isto é, determinando B, recaímos no **pt 1**.



2.º caso: Esse problema pode admitir mais duas soluções, nas quais a circunferência φ tangencia internamente as circunferências procuradas.



Vamos imaginar o problema já resolvido. Seguindo a mesma linha de raciocínio já utilizada, verifica-se que os triângulos DHP e DET são semelhantes.

$$(\triangle DHP \sim \triangle DET) \Rightarrow \frac{DP}{DT} = \frac{DH}{DE} \Rightarrow \boxed{DP \times DE = DT \times DH} \quad (1)$$

Da potência do ponto D em relação à circunferência λ, tem-se:

$$\boxed{DA \times DB = DT \times DH} \quad (2)$$

De (1) e (2), vem:

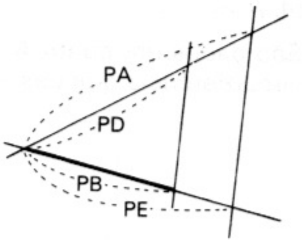
$$\boxed{DA \times DB = DP \times DE}$$

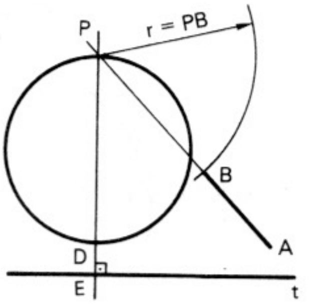
Ou ainda, $\boxed{\frac{DA}{DE} = \frac{DP}{DB}}$

Novamente, como $\overline{DA}$, $\overline{DE}$ e $\overline{DP}$ são conhecidos, determinamos $\overline{DB}$ por quarta proporcional. Uma vez obtido B, o problema se reduz ao seguinte:

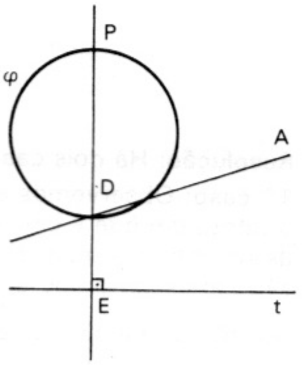
Construir uma circunferência que passe pelos pontos A e B e seja tangente à reta t.

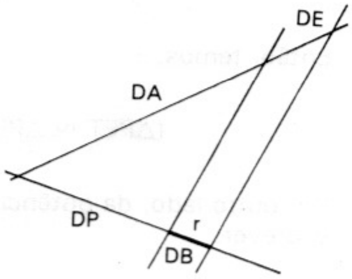
Isto é, recaímos no **pt 1**.

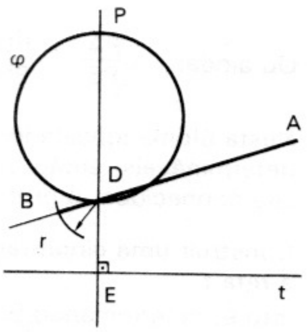




Após a determinação do ponto B, o problema passa a ser o **pt 1**.



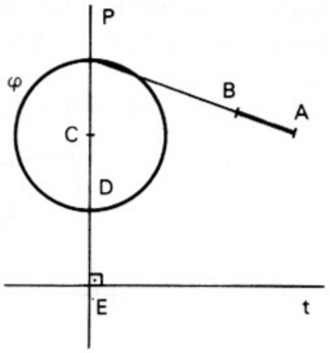




Resumindo

Para obter as soluções tangentes externas, traçamos $\overline{PA}$ e determinamos B no segmento AP através de:

$$\boxed{\frac{PA}{PE} = \frac{PD}{PB}}$$



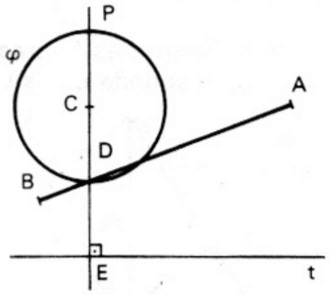
Para obter as soluções tangentes internas, traçamos $\overline{DA}$ e determinamos B no prolongamento de $\overline{DA}$ através de:

$$\boxed{\frac{DA}{DE} = \frac{DP}{DB}}$$

Após a determinação do ponto B, nos dois casos, recaímos no **pt 1**.

O próximo problema de tangência requer uma preparação teórica mais elaborada. Mas vale a pena estudá-lo, pois trata-se de um problema que intrigou grandes geômetras ao longo da história; isso porque é através dele que se resolve o mais famoso problema de Apolônio: **"Construir uma circunferência tangente a três circunferências dadas"**. Além disso você irá enriquecer ainda mais os seus conhecimentos de Geometria.

Além dos teoremas sobre quadriláteros inscritíveis que enunciamos no capítulo 3 deste volume, teremos que estabelecer outras duas propriedades desses quadriláteros.

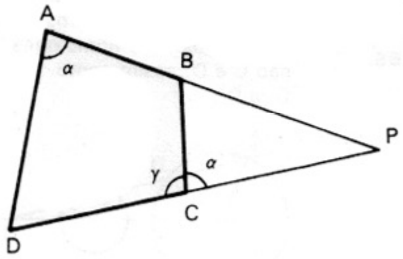


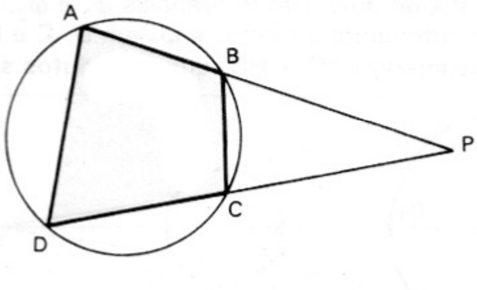
Teorema

Seja P o ponto de intersecção dos prolongamentos dos lados opostos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um quadrilátero ABCD.
Então, se PA × PB = PC × PD, o quadrilátero é inscritível numa circunferência.

Resolva os exercícios de 49 a 51 do caderno de atividades.

Se { PA × PB = PC × PD   Então { ABCD é inscritível





☐ Demonstração

Da hipótese, temos:

$$PA \times PB = PC \times PD \Rightarrow \boxed{\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}}$$

Então, pelo critério **LAL** de semelhança, os triângulos PAD e PCB são semelhantes, pois dois lados de um são proporcionais a dois do outro e esses lados compreendem o ângulo $\hat{P}$, que é comum aos triângulos. Dessa semelhança, conclui-se que:

Os triângulos PAD e PCB são semelhantes, mas estão em posições invertidas.

$$P\hat{C}B = P\hat{A}D = \alpha$$

Assim, o quadrilátero ABCD possui os ângulos opostos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ suplementares ($\alpha + \gamma = 180°$), o que prova que ele é inscritível.

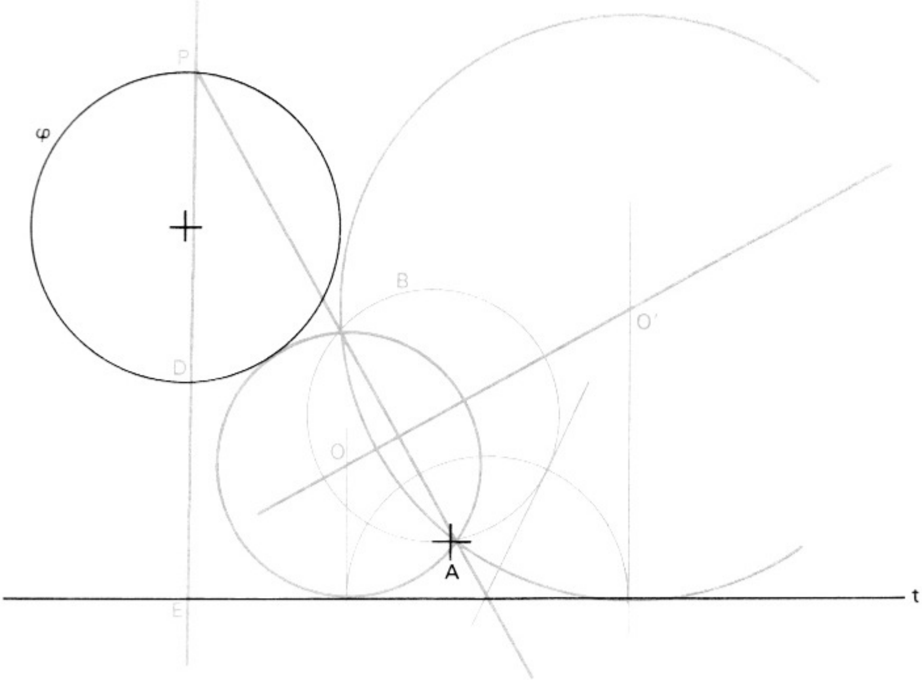
■ c.q.d.

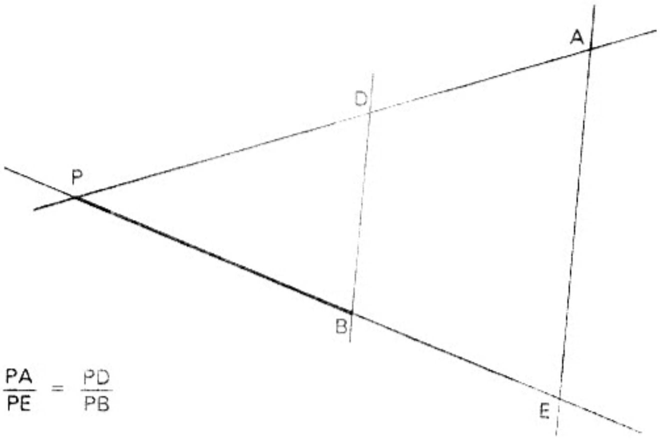
Tangência

Figura auxiliar e anotações

49 São dados um ponto A, uma reta **t** e uma circunferência φ. Construa uma circunferência que passe por A, tangencie **t** e tangencie φ externamente.

Observação: É o **pt 6**.



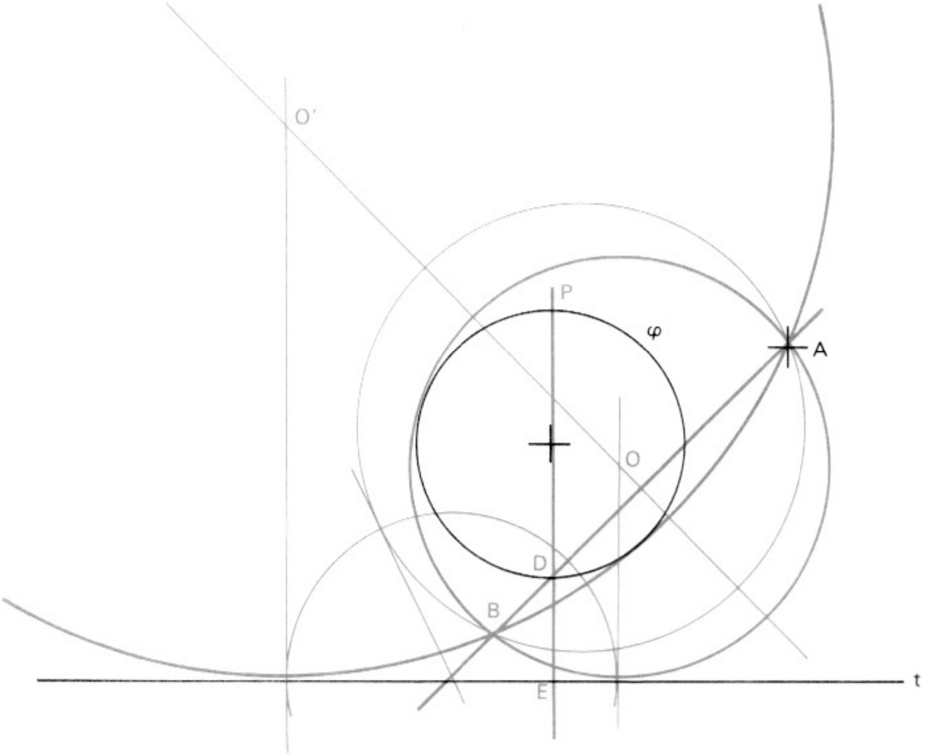


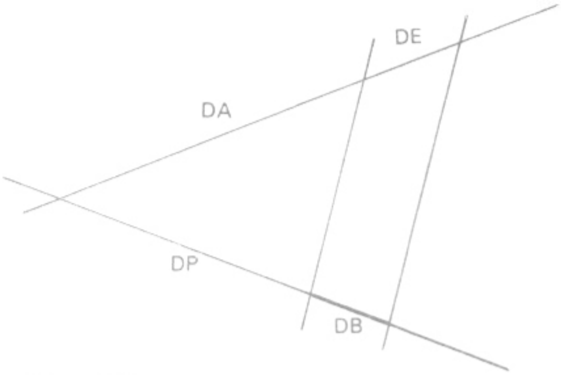
$$\frac{PA}{PE} = \frac{PD}{PB}$$

Tangência

Figura auxiliar e anotações

50 São dados um ponto A, uma reta **t** e uma circunferência φ. Construa uma circunferência que passe por A e tangencie **t** de modo que φ a tangencie internamente.

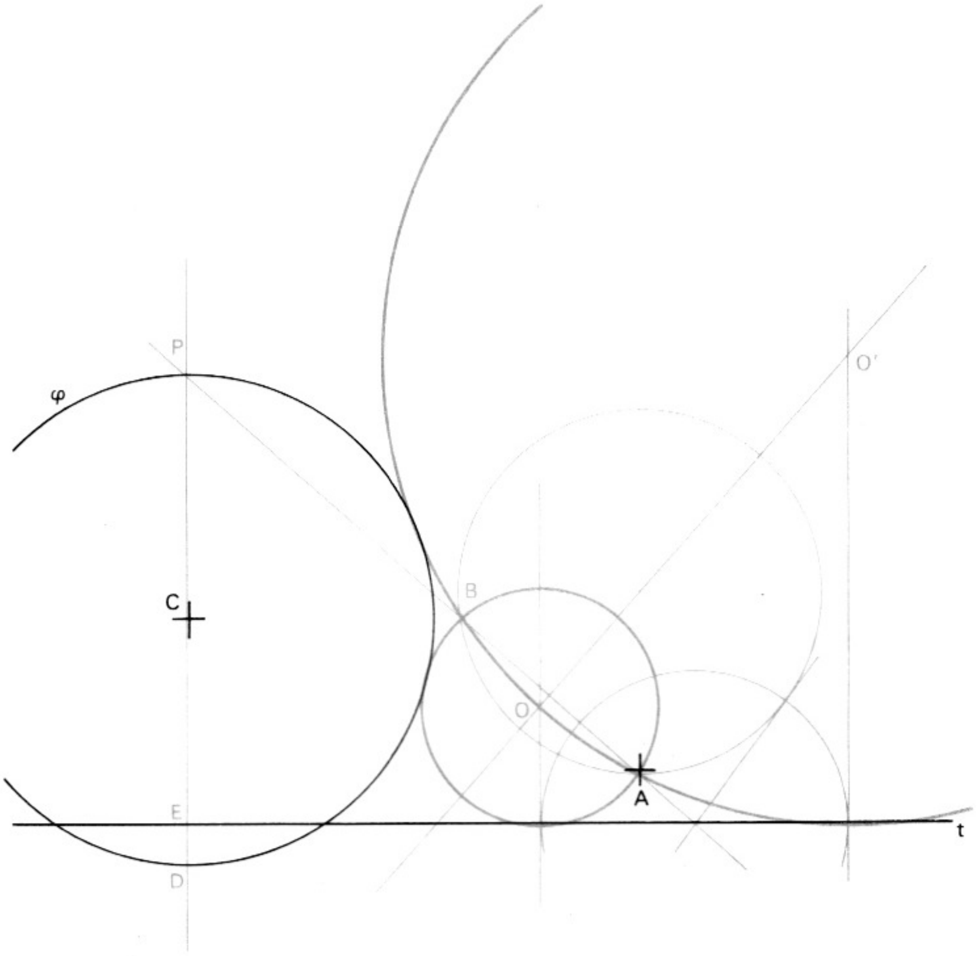

O'
P
φ
A
O
D
B
E
t

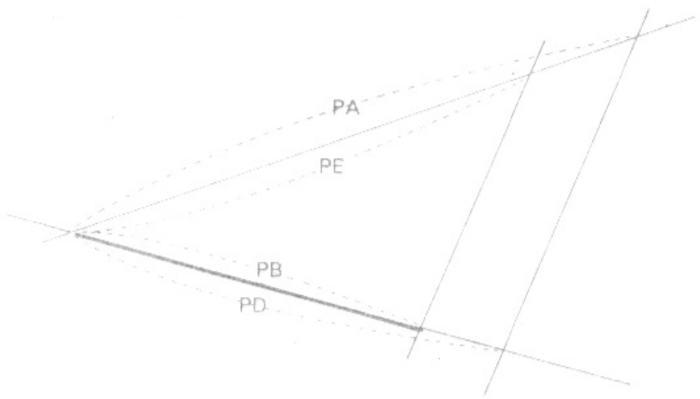


$$\frac{DA}{DE} = \frac{DP}{DB}$$

51 São dados um ponto A, uma reta **t** e uma circunferência φ. Construa uma circunferência que passe por A e tangencie φ e **t**.

Observação: Note que, com os dados dispostos dessa forma, o problema não admite como solução circunferências tangentes internamente a φ.

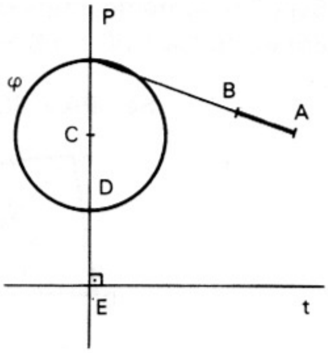




Resumindo

Para obter as soluções tangentes externas, traçamos $\overline{PA}$ e determinamos B no segmento AP através de:

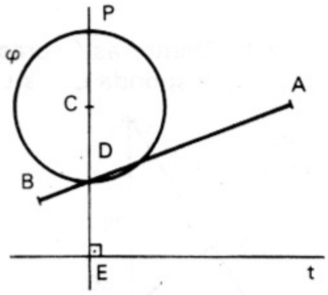
$$\boxed{\frac{PA}{PE} = \frac{PD}{PB}}$$



Para obter as soluções tangentes internas, traçamos $\overline{DA}$ e determinamos B no prolongamento de $\overline{DA}$ através de:

$$\boxed{\frac{DA}{DE} = \frac{DP}{DB}}$$

Após a determinação do ponto B, nos dois casos, recaímos no **pt 1**.



O próximo problema de tangência requer uma preparação teórica mais elaborada. Mas vale a pena estudá-lo, pois trata-se de um problema que intrigou grandes geômetras ao longo da história; isso porque é através dele que se resolve o mais famoso problema de Apolônio: **''Construir uma circunferência tangente a três circunferências dadas''**. Além disso você irá enriquecer ainda mais os seus conhecimentos de Geometria.

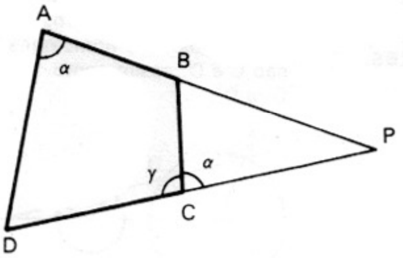
Além dos teoremas sobre quadriláteros inscritíveis que enunciamos no capítulo 3 deste volume, teremos que estabelecer outras duas propriedades desses quadriláteros.

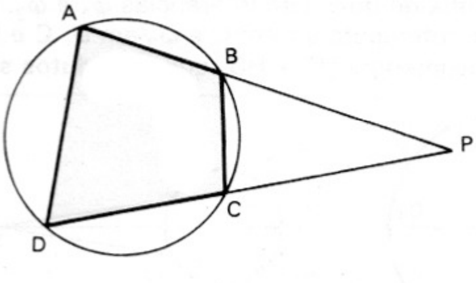
Teorema

Seja P o ponto de intersecção dos prolongamentos dos lados opostos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de um quadrilátero ABCD.
Então, se PA × PB = PC × PD, o quadrilátero é inscritível numa circunferência.

Resolva os exercícios de 49 a 51 do caderno de atividades.

Se { PA × PB = PC × PD   Então { ABCD é inscritível





☐ **Demonstração**

Da hipótese, temos:

$$PA \times PB = PC \times PD \Rightarrow \boxed{\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}}$$

Então, pelo critério **LAL** de semelhança, os triângulos PAD e PCB são semelhantes, pois dois lados de um são proporcionais a dois do outro e esses lados compreendem o ângulo $\hat{P}$, que é comum aos triângulos. Dessa semelhança, conclui-se que:

Os triângulos PAD e PCB são semelhantes, mas estão em posições invertidas.

$$P\hat{C}B = P\hat{A}D = \alpha$$

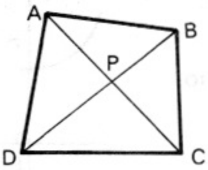
Assim, o quadrilátero ABCD possui os ângulos opostos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ suplementares ($\alpha + \gamma = 180°$), o que prova que ele é inscritível.

■ c.q.d.

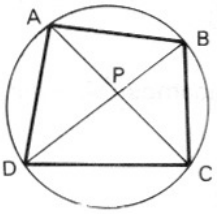
Teorema

Seja P o ponto de intersecção das diagonais de um quadrilátero ABCD. Então, se PA × PC = PB × PD, o quadrilátero é inscritível numa circunferência.

Se { PA × PC = PB × PD



Então { ABCD é inscritível

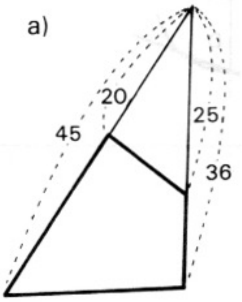


A demonstração desse teorema é análoga à que foi apresentada no teorema precedente, por isso vamos omiti-la.

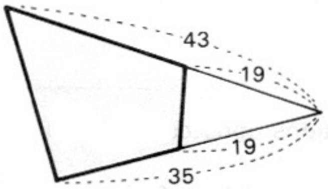
Exercício

E5.1 Dentre as figuras seguintes há quadriláteros inscritíveis? Se houver, responda quais são.

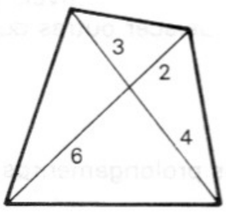
a)



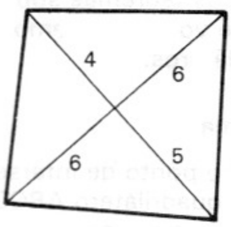
b)



c)

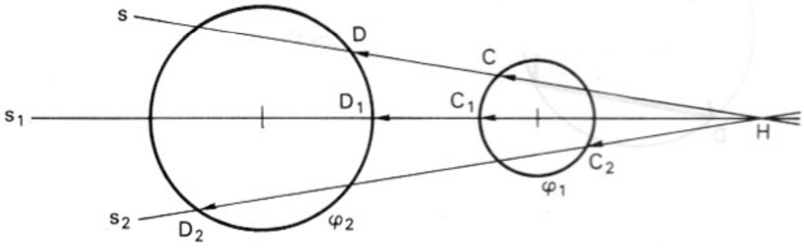


d)



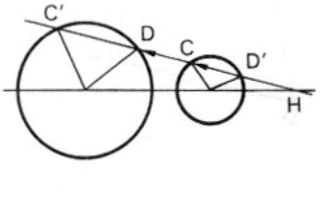
Teorema

Seja H um centro de homotetia de duas circunferências φ_1 e φ_2. Então, toda reta **s** que, conduzida por H, intercepta φ_1 em C e φ_2 em D, C e D **não-homólogos**, determina os segmentos HC e HD, cujos produtos são constantes.



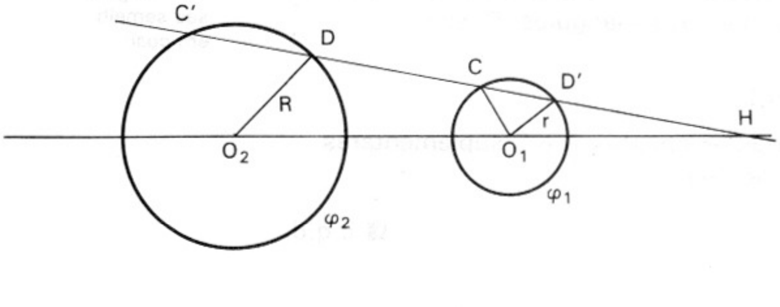
$$HC \times HD = HC_1 \times HD_1 = HC_2 \times HD_2 = \ldots = c^{te}$$

Lembrete: Observe a figura abaixo. Nela C e C′ assim como D e D′ são pontos homólogos. **Não-homólogos** são C e D, assim como C′ e D′.



Observação: Os pontos C e D, bem como C_1 e D_1 ou C_2 e D_2, são denominados **anti-homólogos.**

☐ **Demonstração:**



É interessante notar que pontos homólogos, ligados a H, determinam segmentos de razão constante, enquanto os anti-homólogos determinam segmentos de produto constante.

$$\frac{HC}{HC'} = \frac{HD'}{HD} = \frac{HO_1}{HO_2} = \ldots$$

$$HC \times HD = HC' \times HD' = \ldots$$

Da potência de H com relação a φ_1 sabemos que HC × HD′ é constante. Façamos, então:

$$\boxed{HC \times HD' = k} \quad (1)$$

Da homotetia (ou, se você preferir, da semelhança dos triângulos HO_2D e HO_1D'), tem-se:

$$\frac{HD'}{HD} = \frac{r}{R} \Rightarrow \boxed{HD' = HD \cdot \frac{r}{R}} \quad (2)$$

Substituindo HD′, obtido em (2), na relação (1), vem:

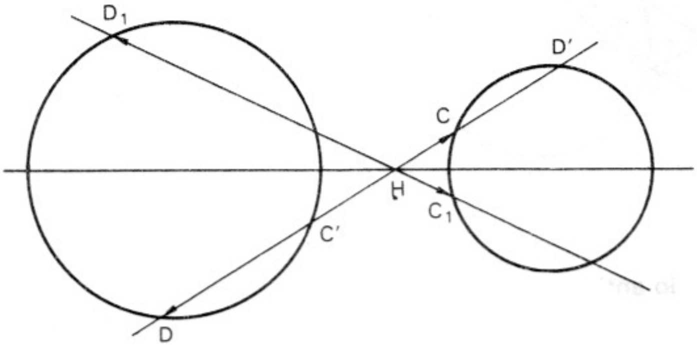
$$HC \times \overbrace{HD \cdot \frac{r}{R}}^{HD'} = k$$

$$\therefore \boxed{HC \times HD = k \cdot \frac{R}{r}}$$

Nessa última relação **k** e $\frac{R}{r}$ são constantes, o que prova que HC × HD também é constante, quaisquer que sejam C e D anti-homólogos.

■ c.q.d.

Observação: Na demonstração apresentada, tomou-se o centro H de homotetia direta, mas o teorema é válido também para o centro de homotetia inversa.

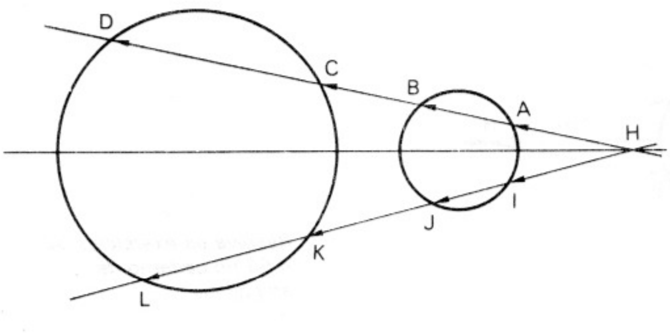


$$\boxed{HC \times HD = HC' \times HD' = HC_1 \times HD_1 = \ldots}$$

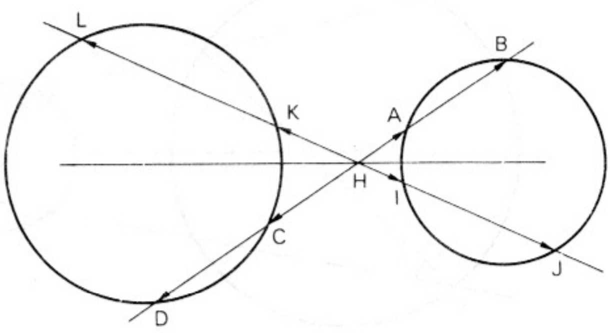
Exercícios

E5.2 Nas figuras seguintes H é um centro de homotetia das circunferências. Identifique os pares de pontos homólogos e os pares de pontos anti-homólogos ali indicados.

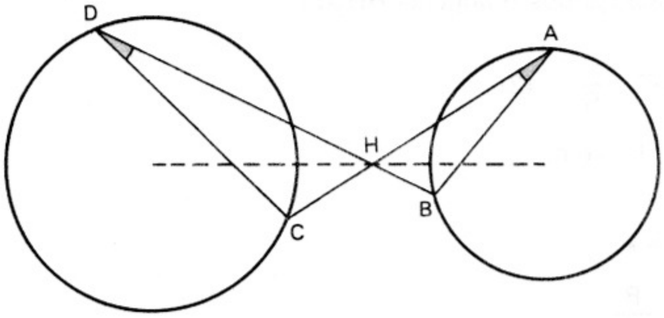
a)



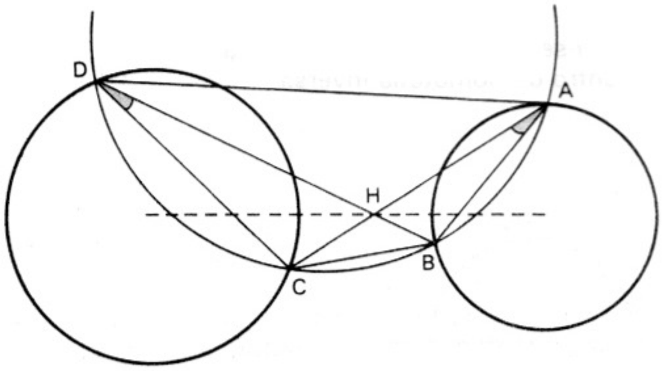
b)



E5.**3** Na figura seguinte, H é o centro de homotetia inversa das circunferências. Demonstre que ∡ HÂB ≡ ∡ HD̂C.



Resolução:



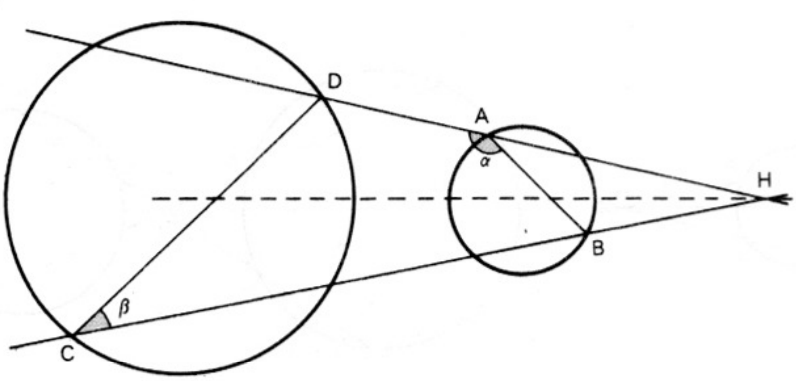
Os pares de pontos A e C, B e D são anti-homólogos. Logo:

$$\boxed{HA \times HC = HB \times HD}$$

Então, o quadrilátero ABCD é inscritível e os ângulos que as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ formam com os lados opostos $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ são congruentes.
Isto é, ∡ HÂB ≡ ∡ HD̂C.

E5.**4** Na figura seguinte, H é o centro de homotetia direta das circunferências. Demonstre que $\alpha + \beta = 180°$.

Sugestão: Basta provar que o quadrilátero ABCD é inscritível.

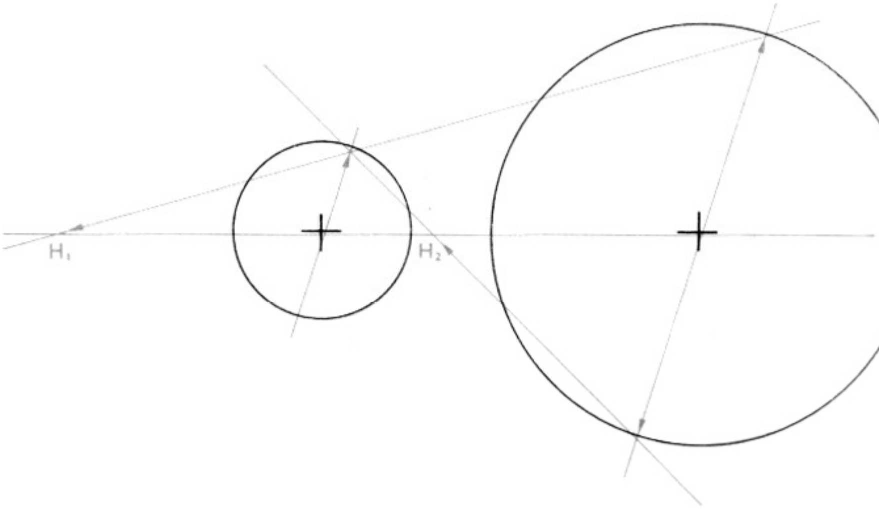


Resolva os exercícios 52 e 53 do caderno de atividades.

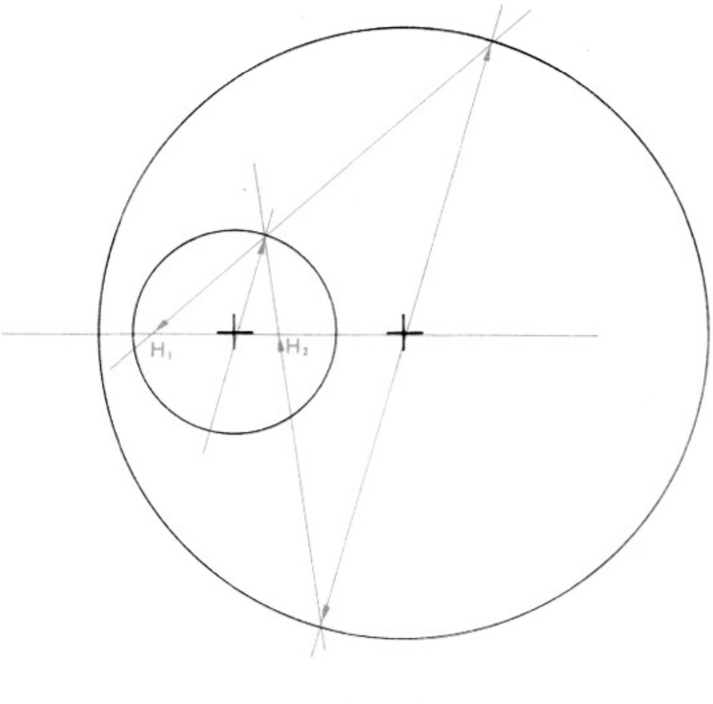
Homotetia

Figura auxiliar e anotações

52 Determine os centros de homotetia direta e inversa das circunferências dadas.



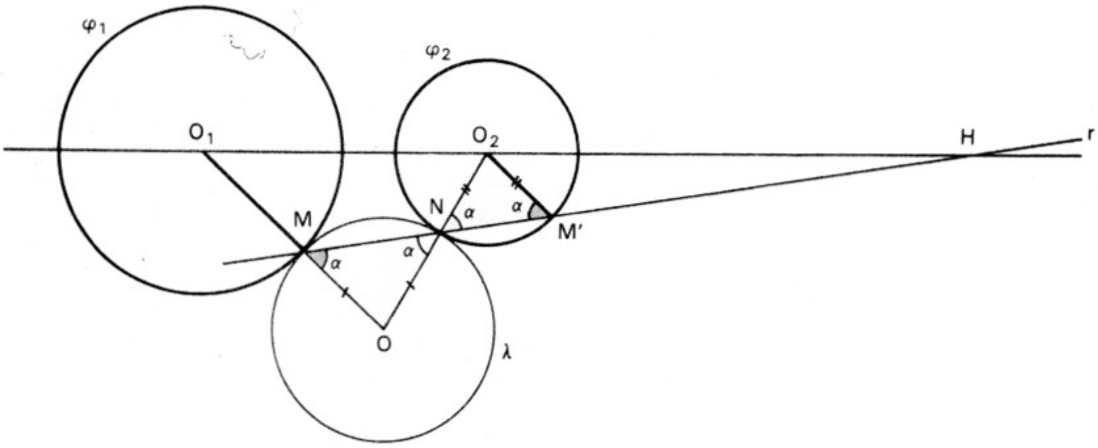
53 Mesmo problema que o precedente.



Teorema

Se uma circunferência λ tangencia duas outras circunferências φ_1 e φ_2 nos pontos M e N, então a reta **r** conduzida por M e N passa por um centro de homotetia de φ_1 e φ_2.

Note que M e N são pontos anti-homólogos de φ_1 e φ_2.



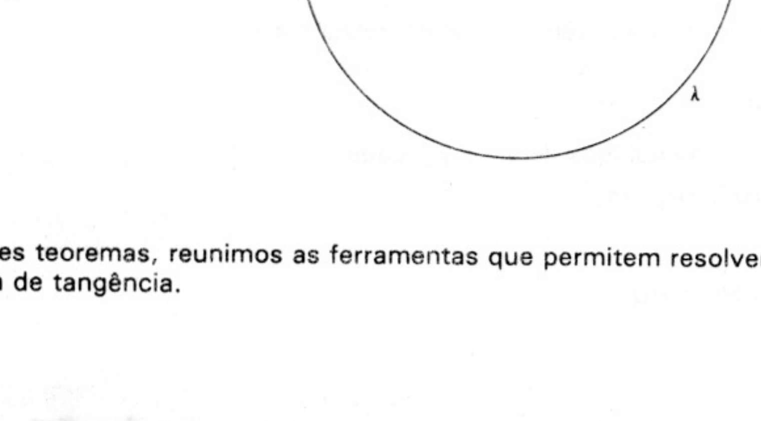
☐ **Demonstração:**

Seja M' o outro ponto em que a reta **r** intercepta φ_2. Então, como os triângulos OMN e O_2NM' são isósceles, completam-se de imediato os ângulos de medidas iguais a α na figura. Assim, os ângulos $O\hat{M}N$ e $O_2\hat{M}'N$ são congruentes. Conseqüentemente, $\overline{O_1M} /\!/ \overline{O_2M'}$. Ora, como **r** passa pelas extremidades M e M' de dois raios paralelos de φ_1 e φ_2, então ela passa por um centro de homotetia dessas duas circunferências.

A reta r determina em $\overline{O_2M'}$ e $\overline{O_1O}$ ângulos alternos internos congruentes, isto é, $\sphericalangle O_2\hat{M}'N \equiv \sphericalangle O\hat{M}N$. Isso garante que $\overline{O_1M} /\!/ \overline{O_2M'}$.

■ c.q.d.

Observação: Caso a circunferência λ tangencie uma das duas (φ_1 ou φ_2) internamente e a outra externamente, então a reta **r**, conduzida por M e N, passará pelo centro de homotetia inversa.

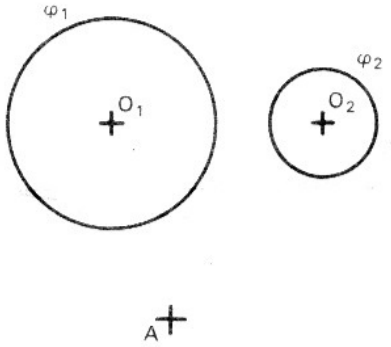


Convém insistir em que você repare que os pontos M e N são anti-homólogos de φ_1 e φ_2.

Com esses teoremas, reunimos as ferramentas que permitem resolver um novo problema de tangência.

pt 8

São dados um ponto A e duas circunferências φ_1 e φ_2. Construir uma circunferência que passe por A e tangencie φ_1 e φ_2.

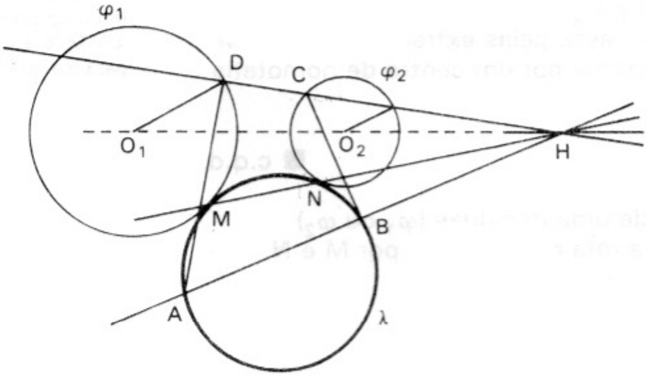


Resolução: Há dois casos a serem analisados.

1.º caso:

A circunferência procurada tangencia ambas as circunferências dadas, ou externa ou internamente.

Suposto resolvido



Vamos supor o problema já resolvido. Consideremos de φ_1 e φ_2:

H, centro de homotetia direta
C e D, **dois pontos anti-homólogos quaisquer**

Da circunferência λ procurada, consideremos:

B, ponto em que a reta HA a intercepta
M e N, pontos de tangência com φ_1 e φ_2

Como a reta conduzida por M e N passa por H, da potência de H em relação a λ temos:

$$\boxed{HA \times HB = HM \times HN} \quad (1)$$

Mas M e N, C e D são pares de pontos anti-homólogos de φ_1 e φ_2. Logo,

$$\boxed{HC \times HD = HM \times HN} \quad (2)$$

De (1) e (2) conclui-se que:

$$\boxed{HA \times HB = HC \times HD}$$

Esta última igualdade mostra que **o quadrilátero ABCD é inscritível,** o que permite determinar o ponto B. Uma vez obtido o ponto B, recaímos no seguinte problema, já resolvido.

Construir uma circunferência que passe por dois pontos A e B dados e tangencie uma circunferência dada (φ_1 ou φ_2).

Isto é, após a construção do ponto B, recaímos no **pt 3.**

Desta feita, a chave do problema é a construção de B, a qual se faz da seguinte forma:

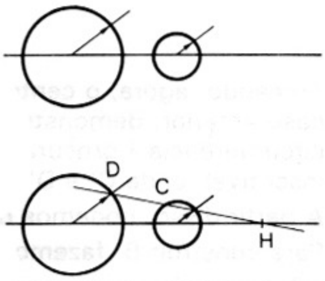
1.º) Determina-se o centro H de homotetia direta de φ_1 e φ_2. (Na obtenção de H, já ficam determinados os pontos C e D anti-homólogos.)

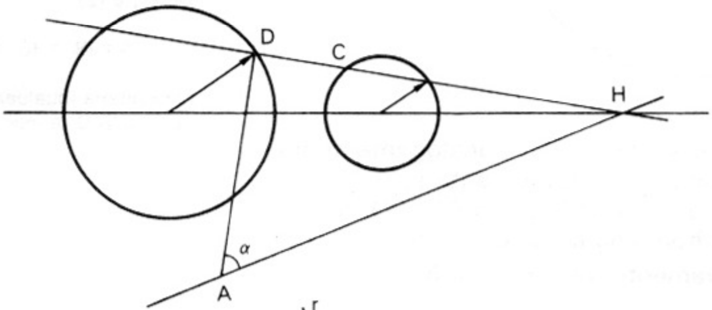
2.º) Traça-se a reta por H e A, e unem-se D e A. Seja $\alpha = H\hat{A}D$.

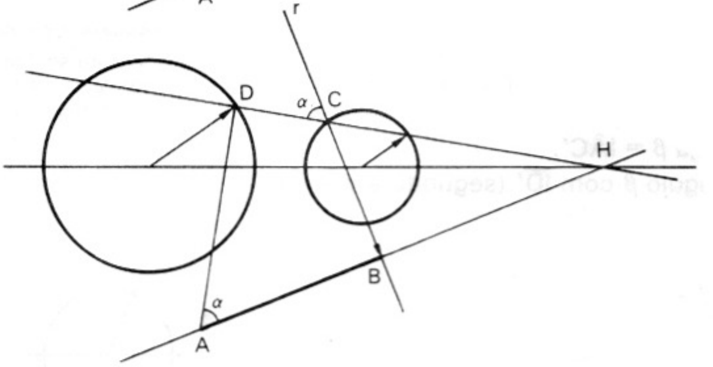
3.º) Por C, traça-se a reta **r** formando o ângulo α com $\overrightarrow{HC}$ (segundo a posição da figura), a qual intercepta $\overrightarrow{HA}$ em B.

Lembrete: Obtenção de H

- Traçam-se dois raios quaisquer paralelos e de mesmo sentido.
- A reta conduzida pelos extremos desses raios intercepta a reta que contém os centros em H.

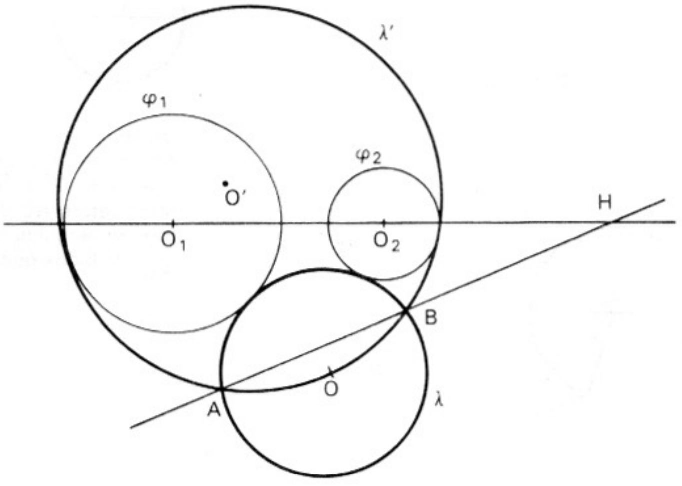






Note que o **3.º passo** na construção de B faz com que os ângulos opostos Â e Ĉ, do quadrilátero ABCD, tornem-se suplementares.

A partir da determinação do ponto B o problema passa a ser o **pt 3.**



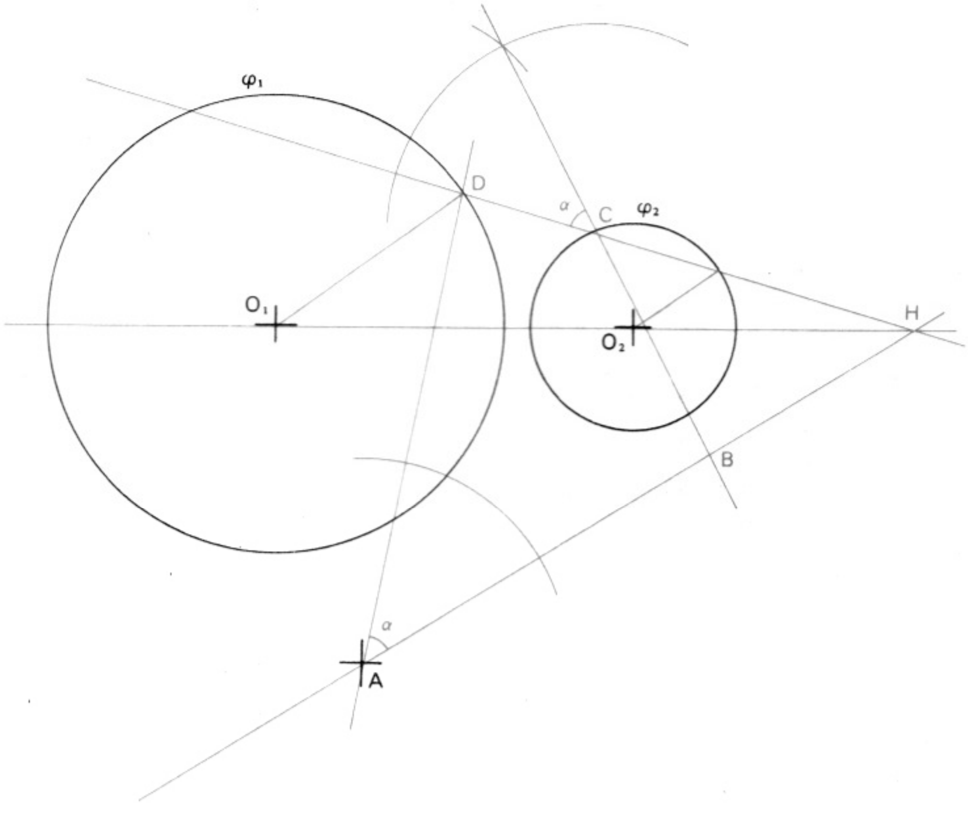
Resolva os exercícios 54 e 55 do caderno de atividades.

Figura auxiliar e anotações

Sugestão:
Proponha, ao aluno, que ele construa a circunferência circunscrita ao quadrilátero ABCD para verificar a precisão dos seus traçados.

54 São dadas duas circunferências φ_1 e φ_2 e um ponto A. Seja λ a circunferência que passa por A e tangencia φ_1 e φ_2 externamente. Determine um outro ponto, além de A, que pertence a λ.

Observação: O ponto procurado é o B da construção do **pt 8**.



Tangência

55 São dadas duas circunferências φ_1 e φ_2, e um ponto A. Construa as circunferências que passam por A e tangenciam φ_1 e φ_2 externa ou internamente.

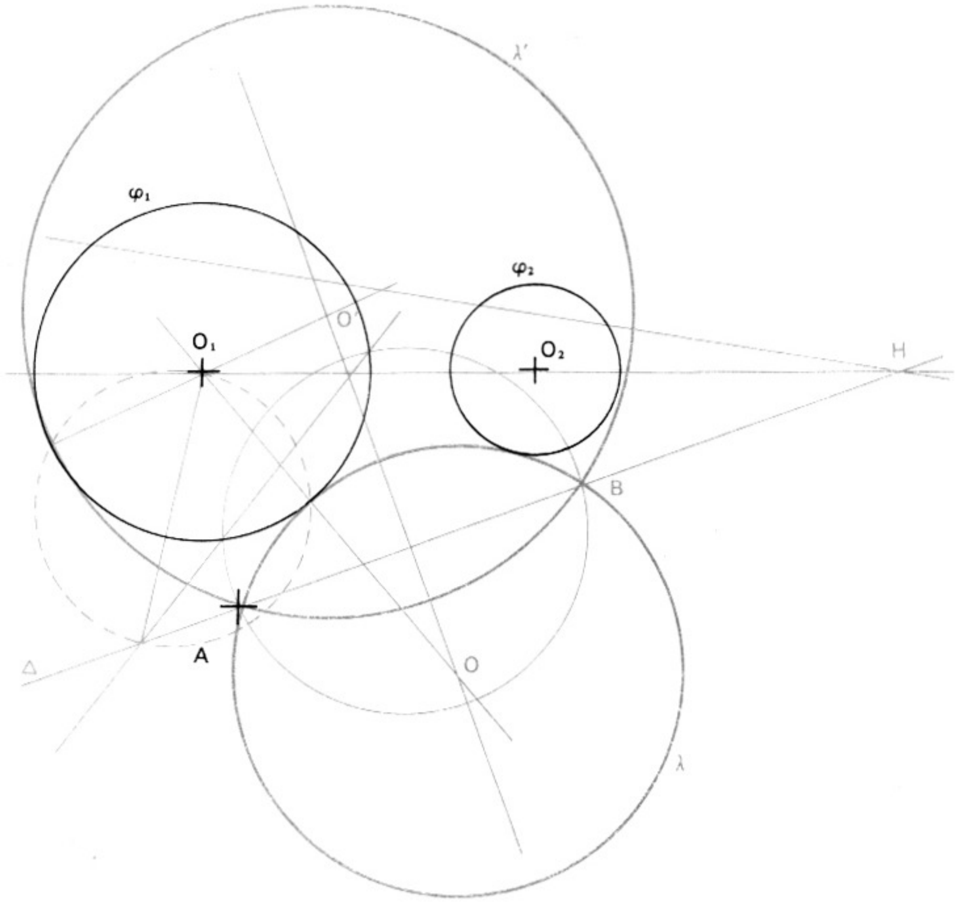


Figura auxiliar e anotações

Nota:
Foram omitidos os traçados que permitem a construção do ponto B, com o objetivo de não poluir exageradamente a construção das circunferências λ e λ'.

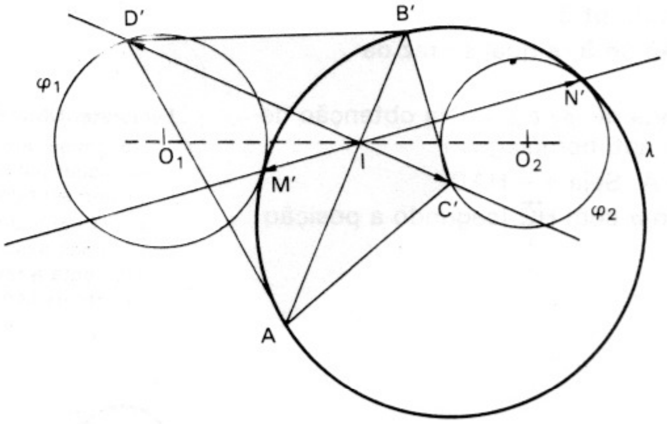
Observações:

1) Instrua o aluno no sentido de que se deve realizar a construção com capricho máximo. Em virtude do grande número de operações que o problema exige, é comum obterem-se respostas imprecisas.
2) Instrua o aluno no sentido de que ele pense o problema em duas etapas:

- construção de B;
- construção de λ e λ'.

2.º caso:

A circunferência procurada tangencia uma das circunferências dadas internamente e a outra externamente.



Tomando, agora, o centro I de homotetia inversa de φ_1 e φ_2, analogamente ao caso anterior, demonstra-se (veja ao lado) que a reta AI intercepta a circunferência λ procurada num ponto B', tal que o quadrilátero AC'B'D' é inscritível, onde C' e D' são **dois pontos anti-homólogos quaisquer** de φ_1 e φ_2.

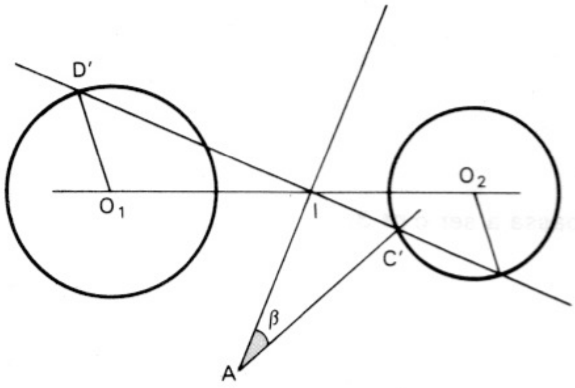
A partir disso, podemos determinar B' e, novamente, recair no **pt 3.**

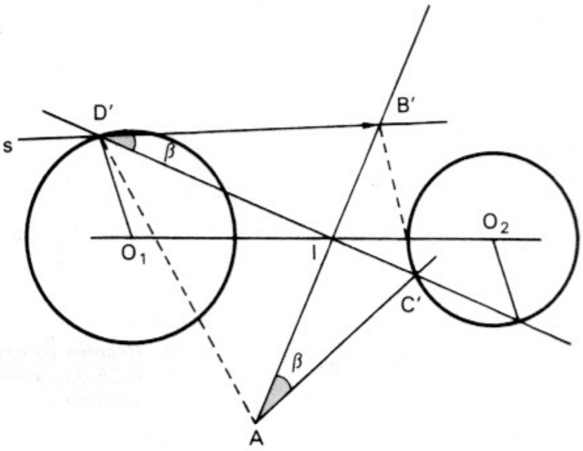
Para construir B' fazemos o seguinte:

1.º) Determinamos o centro I de homotetia inversa de φ_1 e φ_2. (Convém insistir que, ao determinar I, já ficam determinados os pontos C' e D' anti-homólogos.)

2.º) Traçamos a reta IA e unimos C' e A. Seja $\beta = I\hat{A}C'$.

3.º) Por D' traçamos a reta **s** formando o ângulo β com $\overrightarrow{ID'}$ (segundo a posição da figura), a qual intercepta $\overline{AI}$ em B'.





Da potência de I em relação a λ:

$$\boxed{IA \times IB' = IM' \times IN'} \quad (1)$$

Como M' e N', C' e D' são pares de pontos anti-homólogos em φ_1 e φ_2, temos:

$$\boxed{IC' \times ID' = IM' \times IN'} \quad (2)$$

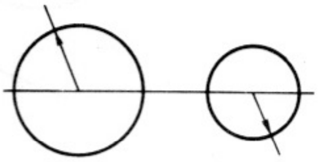
De (1) e (2):

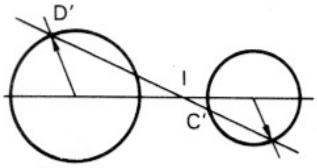
$$\boxed{IA \times IB' = IC' \times ID'}$$

Esta última igualdade mostra que AC'B'D' é inscritível.

Lembrete: Obtenção de I

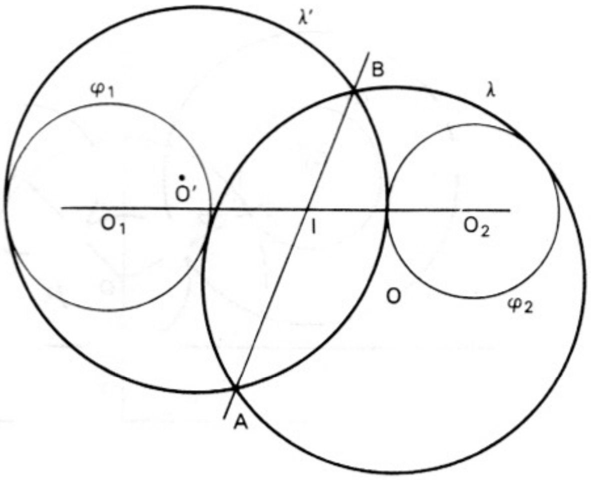
- Traçam-se dois raios paralelos e de sentidos contrários, quaisquer.
- A reta conduzida pelos extremos desses raios intercepta a reta que contém os centros em I.





Observe que o 3.º passo na construção faz com que as diagonais $\overline{AB'}$ e $\overline{D'C'}$, do quadrilátero AC'B'D', formem ângulos congruentes com os lados opostos $\overline{AC'}$ e $\overline{D'B'}$

A partir da determinação do ponto B' o problema passa a ser o **pt 3**.



Observação: O problema pode admitir quatro soluções, sendo duas em cada caso estudado.

Resolva os exercícios de 56 a 58 do caderno de atividades.

Exercícios

Atenção!: Procure executar as construções com o máximo capricho.

E5.**5** São dadas duas circunferências de centros O_1 e O_2, cujos raios são $r_1 = 35mm$ e $r_2 = 15mm$, e tais que a distância de seus centros é de 60mm. Construa:

a) a figura descrita no enunciado;

b) um ponto A distante 50mm de O_1 e distante 50mm de O_2;

c) uma circunferência λ que passe por A e **tangencie externamente** as duas circunferências dadas. Qual é a medida do raio de λ, aproximadamente?

E5.**6** São dadas duas circunferências de centros O_1 e O_2, cujos raios são $r_1 = 25mm$ e $r_2 = 20mm$, e tais que a distância de seus centros é de 65mm. Construa:

a) a figura descrita no enunciado;

b) um ponto A distante 38mm de O_1 e 52mm de O_2;

c) uma circunferência λ que **tangencie** a circunferência de centro O_1 **externamente** e a de centro O_2 **internamente**. Qual é, aproximadamente, a medida do raio de λ?

No próximo problema vamos retomar o **método da contração e dilatação de circunferências,** assunto apresentado no volume 2 desta coleção.

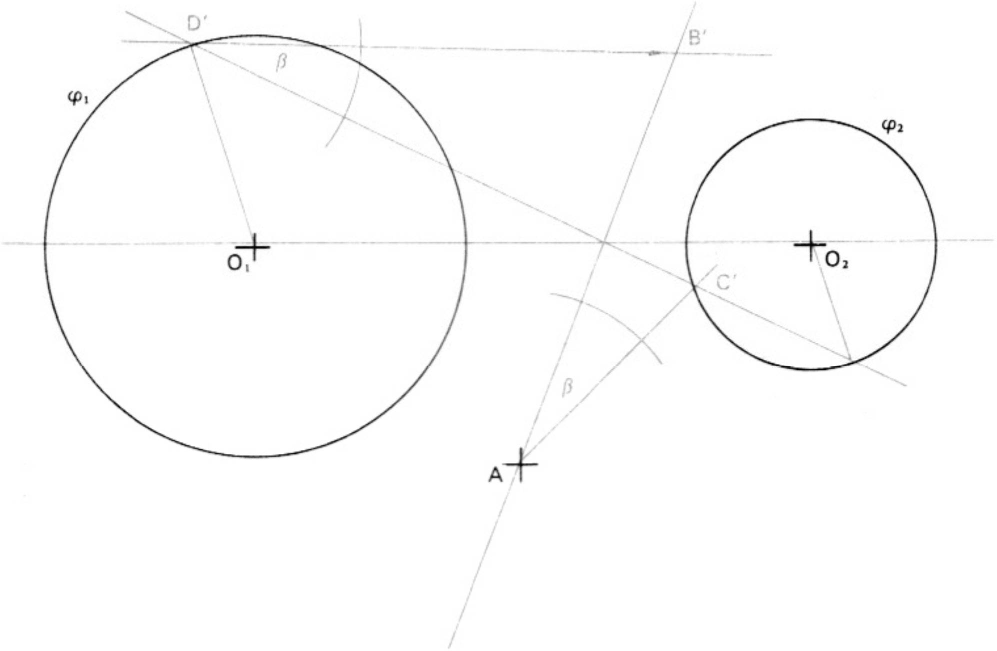
Tangência

56 São dadas duas circunferências φ_1 e φ_2 e um ponto A. Considere a circunferência λ que passa por A, tangencia φ_1 externamente e φ_2 internamente. Determine um segundo ponto, distinto de A, que também pertença a λ.

Observação: O ponto procurado é o ponto B′ do **pt 8**.

Figura auxiliar e anotações

Sugestão:
Proponha, também, nesse problema, que o aluno construa a circunferência circunscrita ao quadrilátero AC′B′D′.

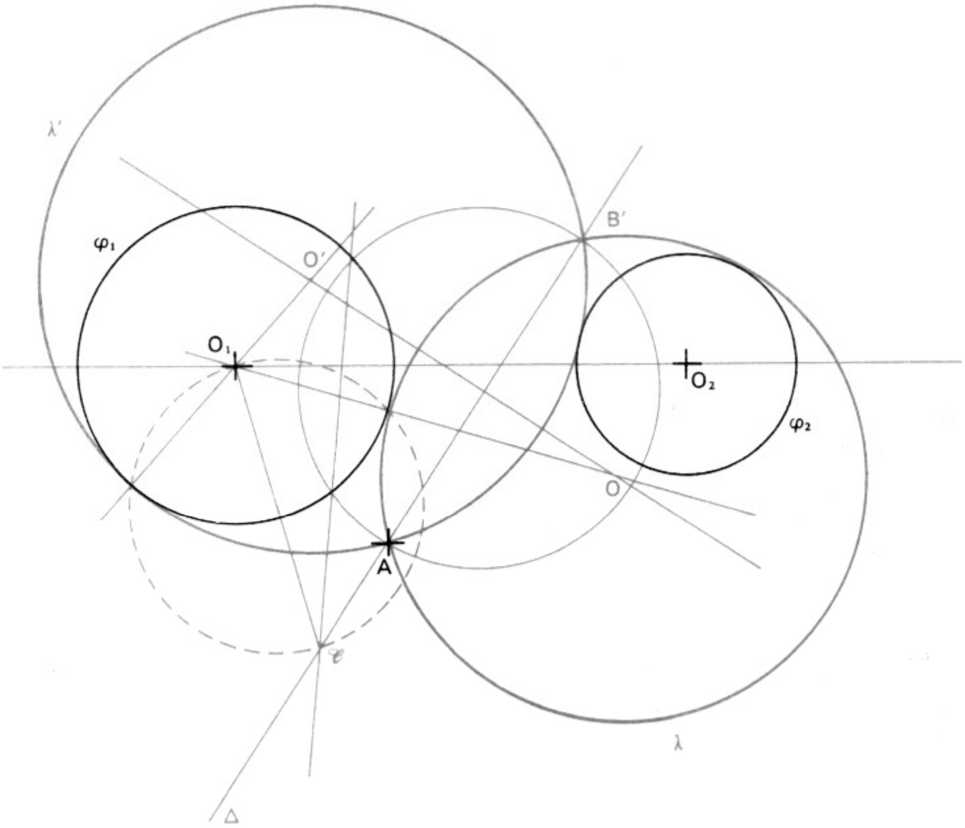


Tangência

57 São dadas duas circunferências φ_1 e φ_2 e um ponto A. Construa uma circunferência que tangencie uma das circunferências dadas externamente e a outra internamente.

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Também aqui, foram omitidos os traçados que permitem a obtenção do ponto B'.

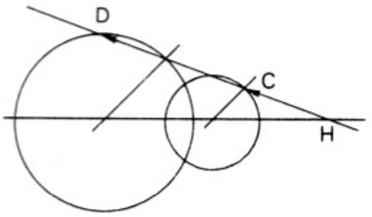


Tangência

58 Construa uma circunferência que passe pelo ponto A dado e tangencie as circunferências φ_1 e φ_2 dadas.

Observação: Em função do posicionamento dos dados, o problema vai admitir somente as soluções do 1.º caso estudado no livro-texto.

Sugestão: Para obter maior precisão de traçados na construção do ponto B, escolha, para anti-homólogos, os pontos C e D nas posições abaixo indicadas.



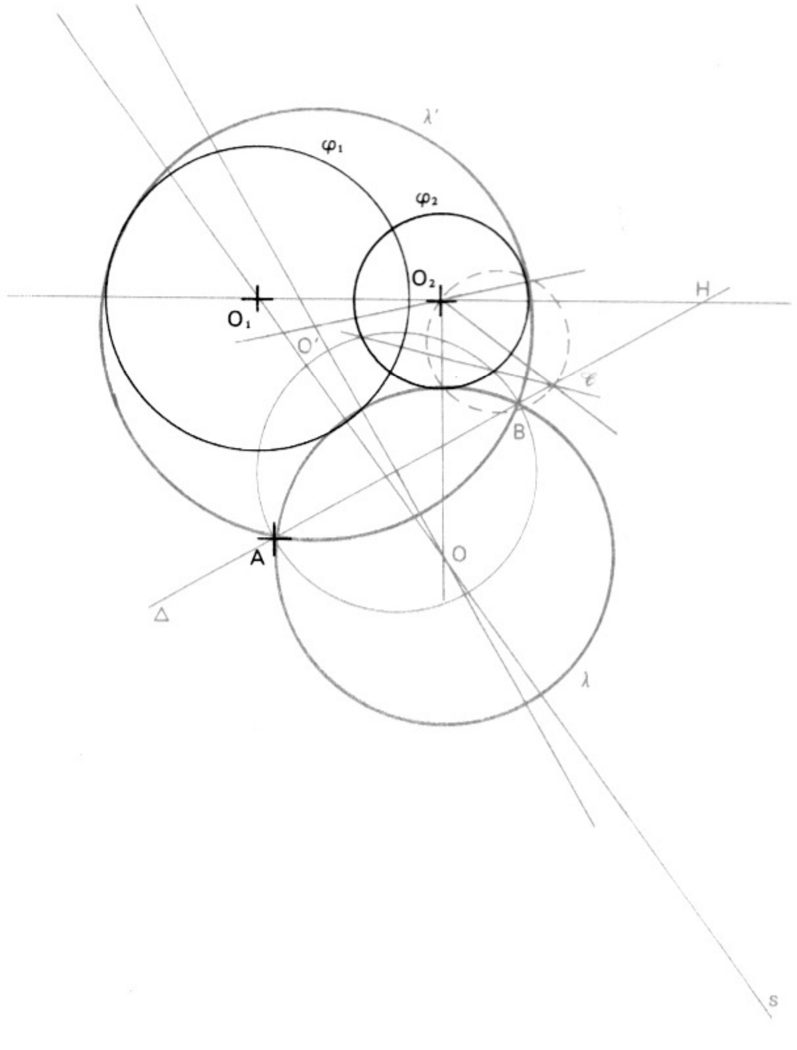
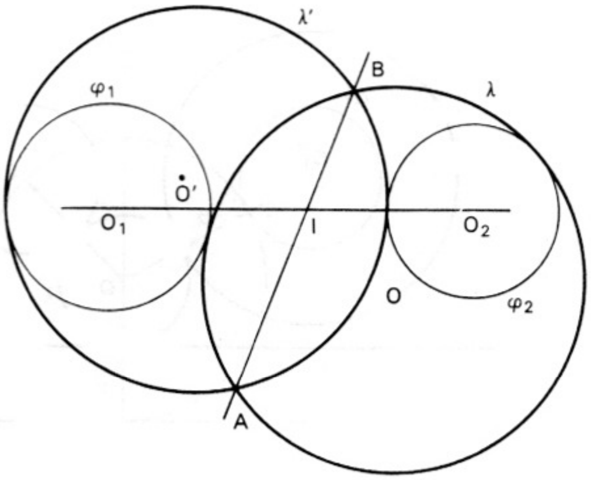


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Após a determinação de B, convém utilizar o centro radical $\mathscr{C}$ de φ_2 com o feixe de circunferências secantes em A e B. Isso porque, achando-se o centro radical de φ_1 com esse feixe, a reta usada para construir o centro O de λ, vai encontrar a mediatriz de $\overline{AB}$ segundo um ângulo muito pequeno, fazendo com que esse ponto fique mal determinado (reta s na figura).

A partir da determinação do ponto B' o problema passa a ser o **pt 3**.



Observação: O problema pode admitir quatro soluções, sendo duas em cada caso estudado.

Resolva os exercícios de 56 a 58 do caderno de atividades.

Exercícios

Atenção!: Procure executar as construções com o máximo capricho.

E5.**5** São dadas duas circunferências de centros O_1 e O_2, cujos raios são $r_1 = 35mm$ e $r_2 = 15mm$, e tais que a distância de seus centros é de 60mm. Construa:

a) a figura descrita no enunciado;

b) um ponto A distante 50mm de O_1 e distante 50mm de O_2;

c) uma circunferência λ que passe por A e **tangencie externamente** as duas circunferências dadas. Qual é a medida do raio de λ, aproximadamente?

E5.**6** São dadas duas circunferências de centros O_1 e O_2, cujos raios são $r_1 = 25mm$ e $r_2 = 20mm$, e tais que a distância de seus centros é de 65mm. Construa:

a) a figura descrita no enunciado;

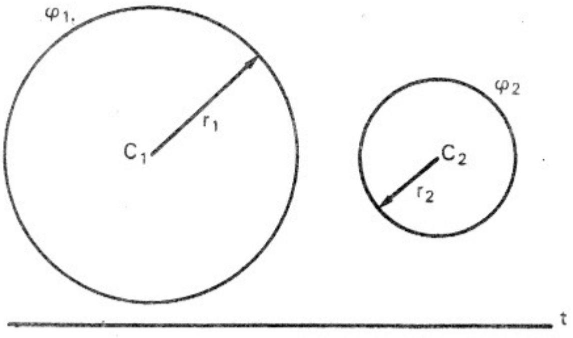
b) um ponto A distante 38mm de O_1 e 52mm de O_2;

c) uma circunferência λ que **tangencie** a circunferência de centro O_1 **externamente** e a de centro O_2 **internamente**. Qual é, aproximadamente, a medida do raio de λ?

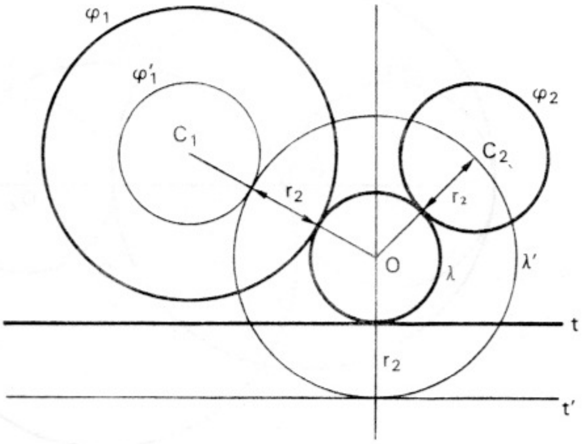
No próximo problema vamos retomar o **método da contração e dilatação de circunferências,** assunto apresentado no volume 2 desta coleção.

pt 9

São dadas uma reta **t** e duas circunferências φ_1 e φ_2. Construir uma circunferência λ que tangencie φ_1, φ_2 e **t**.



Suposto resolvido



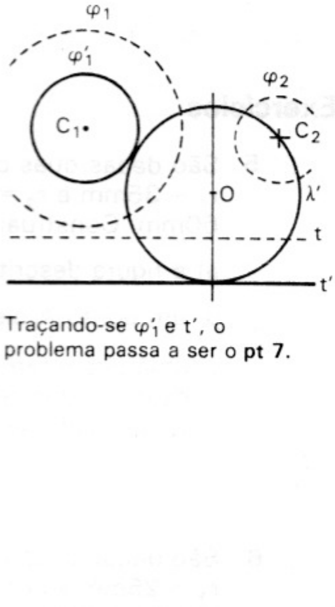
Resolução: Na figura onde já se supõe o problema resolvido, vamos imaginar que a menor circunferência, no caso φ_2, contraia-se até reduzir-se a seu centro C_2. O sistema todo deve acompanhar esse movimento e, então:

- φ_1 contrai-se e torna-se φ_1', de raio igual a $\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2}$
- λ dilata-se até passar por C_2 e torna-se λ'
- **t** translada-se de uma amplitude $\mathbf{r_2}$ e vai para a posição t'.

Assim, o problema se reduz ao seguinte:

Construir uma circunferência λ' que passe por um ponto C_2 dado e tangencie uma circunferência φ_1' e uma reta t' dadas.

Isto é, traçando-se a circunferência φ_1' e a reta t', o problema passa a ser o **pt 7**. Com o auxílio daquele problema, obtemos o centro O de λ, que é o que se precisava para resolver o problema inicial.



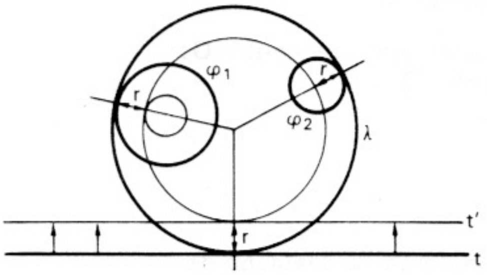
Traçando-se φ_1' e t', o problema passa a ser o **pt 7**.

Observação: Vamos aproveitar este problema para aprender como se pode fazer uma pesquisa do número máximo de soluções que se pode obter quando se aplica o método da dilatação e da contração, ainda que não se estejam antevendo essas soluções. Para tanto, basta lembrar que quando a circunferência menor se contrai, até se reduzir a seu centro, dependendo do tipo da circunferência que se imagina ao supor o problema resolvido, as demais circunferências podem ter que se contrair ou se dilatar e as retas podem ter dois sentidos de translação.

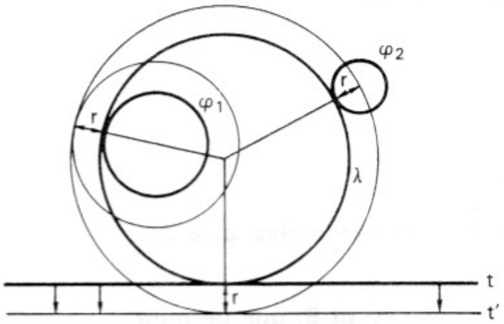
A partir desses fatos, especificamente para o **pt 9**, podem-se imaginar quatro situações:

1.ª) φ_1 **se contrai e t translada-se para "baixo"**. Esta é exatamente a situação em que recaímos na resolução anteriormente exposta. Ali, supunha-se λ tangenciando φ_1 e φ_2 externamente.

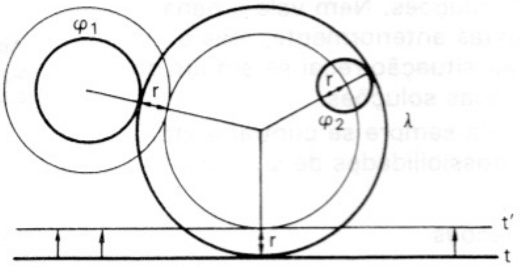
2.ª) φ_1 **se contrai e t translada-se para "cima"**. Tal situação ocorrerá quando λ tangenciar φ_1 e φ_2 internamente.



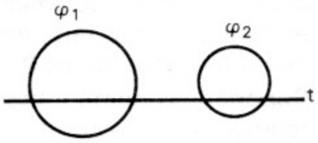
3.ª) φ_1 **se dilata e t translada-se para "baixo"**. Ocorrerá quando λ tangenciar φ_1 internamente e φ_2 externamente.


φ_2
r
φ_1
r
λ
t
r
t'

4.ª) φ_1 **se dilata e t translada-se para "cima"**. Ocorrerá quando λ tangenciar φ_1 externamente e φ_2 internamente.


φ_1
r
r
φ_2
λ
t'
r
t

Veja um exemplo de como ajeitar os dados para eliminar soluções.


φ_1
φ_2
t

Com os dados assim dispostos, não existem soluções do **pt 9** em que a circunferência λ procurada tangencie internamente ou φ_1 ou φ_2.

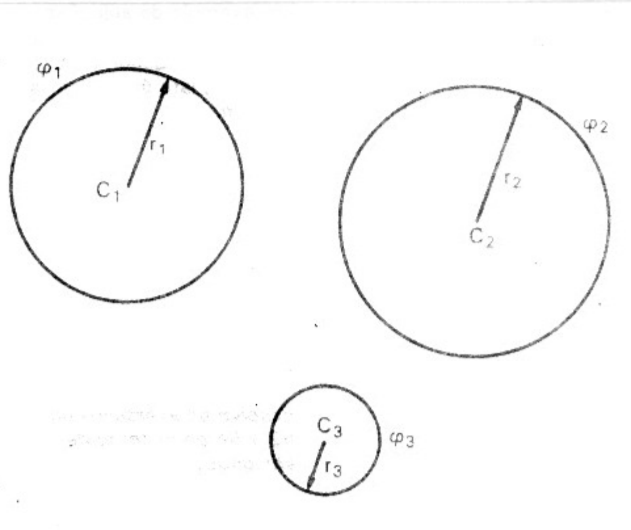
Ora, como em cada uma das quatro possíveis situações estaremos sempre recaindo num dos casos do **pt 7**, para cada uma delas podem-se ter duas soluções. Assim, o problema poderá ter no máximo oito soluções.

Nota: Colocamos aqui essa discussão com a intenção de apresentar uma forma metódica para analisar o número de soluções que um problema pode ter. Evidentemente, fica fora dos limites do bom senso pedir para construir todas as soluções de problemas como o **pt 8**, ou o **pt 9**, ou ainda o **pt 10**, que será estudado. Em problemas desse tipo, pede-se apenas uma solução particular ou, então, ajeitam-se os dados para eliminar uma parte delas. Assim, você não deve se preocupar demais com isso, pois, na prática, ao se pedir uma solução particular, você vai imaginar o problema já resolvido com essa solução; as demais situações ficam automaticamente eliminadas.

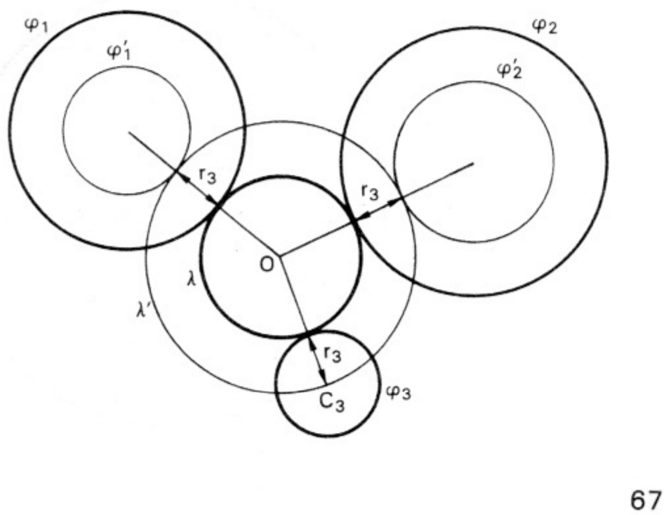
pt 10

Construir uma circunferência tangente a três circunferências φ_1, φ_2 e φ_3 dadas.

Resolva os exercícios de 59 a 61 do caderno de atividades.


φ_1
r_1
C_1
φ_2
r_2
C_2
C_3
φ_3
r_3

Suposto resolvido


φ_1
φ_2
φ'_1
φ'_2
r_3
r_3
O
λ
λ'
r_3
C_3
φ_3

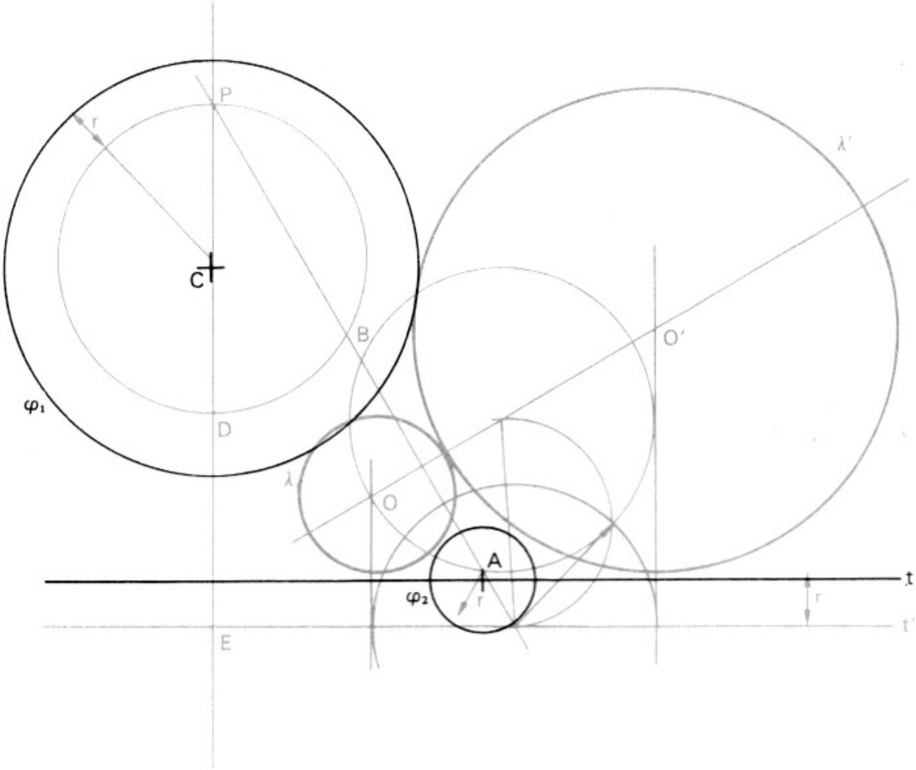
Tangência

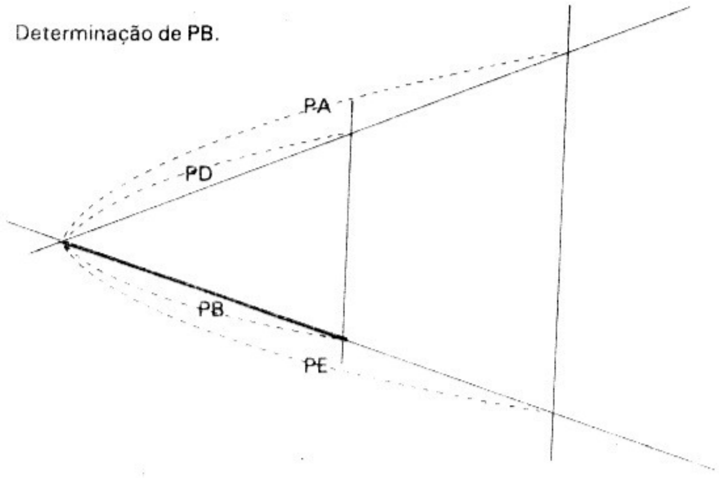
Figura auxiliar e anotações

59 Construa uma circunferência que tangencie externamente as circunferências φ_1 e φ_2 dadas e que tangencie também a reta **t** dada.

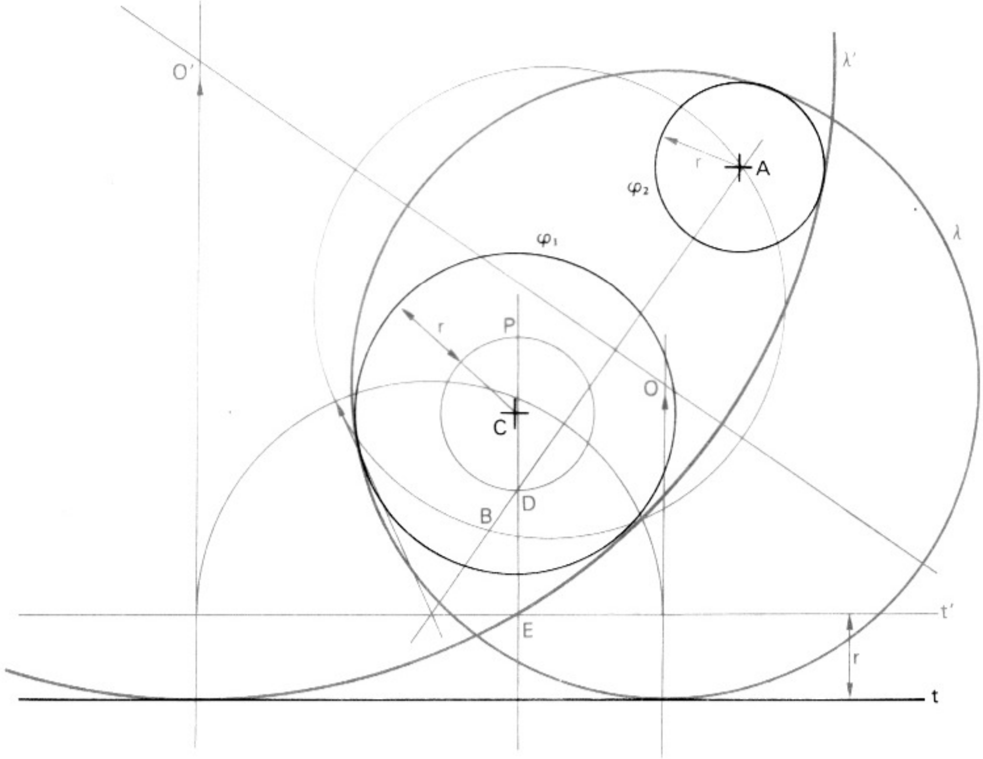
Observação: Ao efetuar as contrações das circunferências e a translação da reta você estará diante do **pt 6**. Porém lembre-se que aquele problema se divide em dois casos, sendo que, neste exercício, você estará diante do 1.º caso. Se necessário, volte a estudar o **pt 6**.

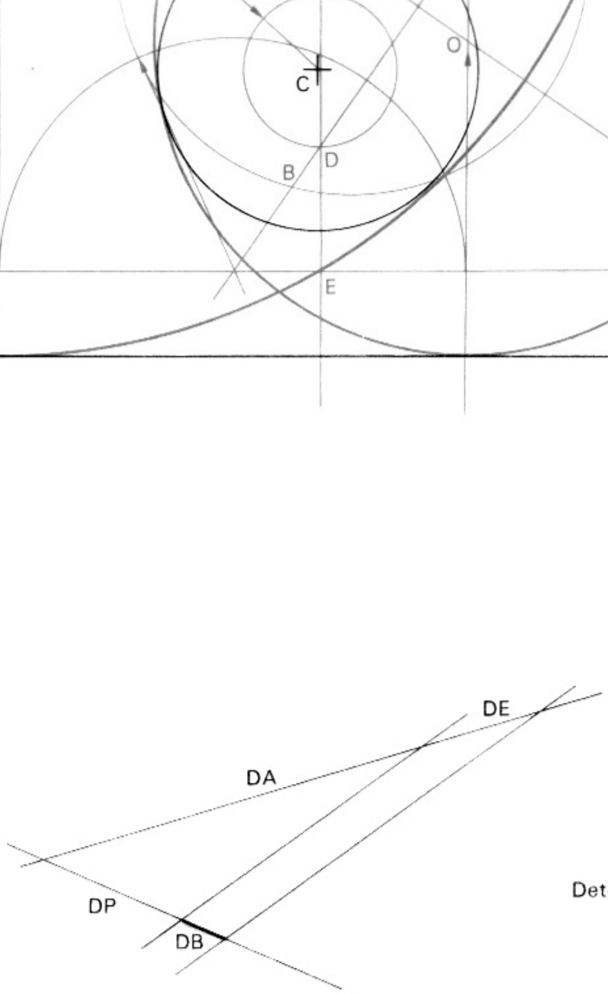
Observação:
Convém salientar bem para o aluno, que o **pt 6** tem dois casos: tangência externa e tangência interna, e que neste exercício, especificamente, o que ocorre é o primeiro caso.





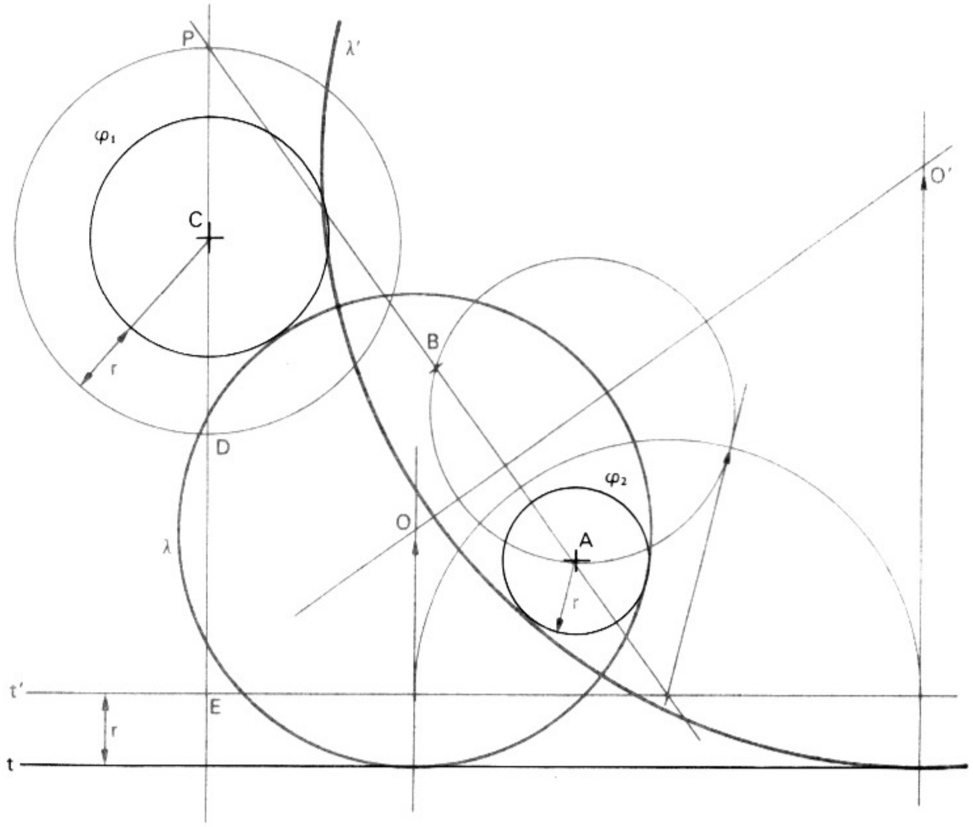
60 Construa uma circunferência que tangencie internamente as duas circunferências φ_1 e φ_2 dadas e que tangencie também a reta **t** dada.
Observação: Agora, você vai recair no 2.º caso do **pt 6**.

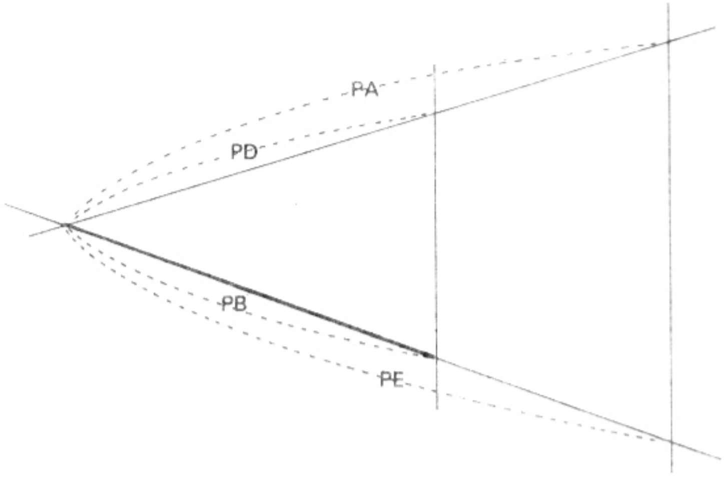

O'
λ'
A
φ_2
r
λ
φ_1
r
P
O
C
B
D
E
t'
r
t



Determinação de DB.

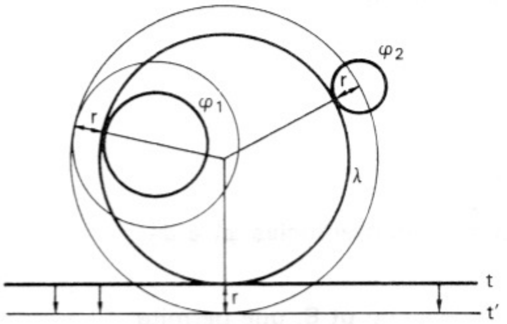
61 São dadas duas circunferências, φ_1 e φ_2, e uma reta **t**. Construa uma circunferência tangente a **t** e que tangencie φ_1 externamente e φ_2 internamente.


P
λ'
φ₁
C
r
B
D
O'
O
φ₂
A
r
λ
t'
E
r
t

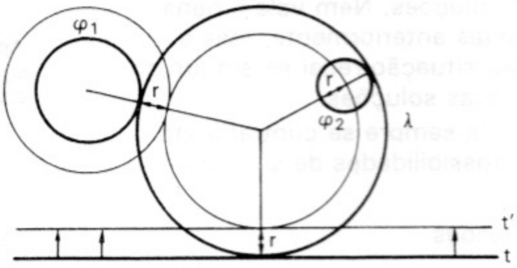


Determinação de PB.

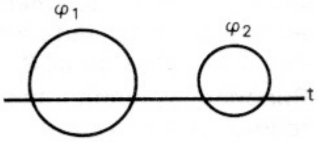
3.ª) φ_1 **se dilata e t translada-se para "baixo"**. Ocorrerá quando λ tangenciar φ_1 internamente e φ_2 externamente.



4.ª) φ_1 **se dilata e t translada-se para "cima"**. Ocorrerá quando λ tangenciar φ_1 externamente e φ_2 internamente.



Veja um exemplo de como ajeitar os dados para eliminar soluções.



Com os dados assim dispostos, não existem soluções do **pt 9** em que a circunferência λ procurada tangencie internamente ou φ_1 ou φ_2.

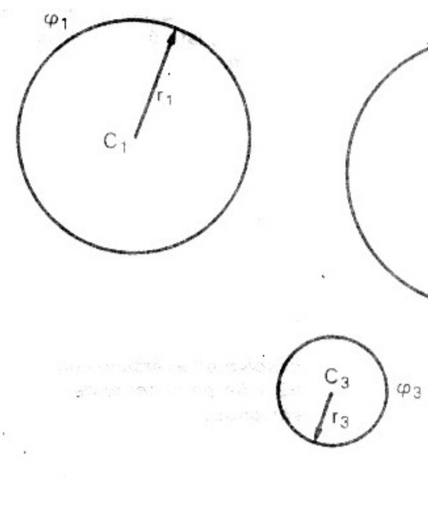
Ora, como em cada uma das quatro possíveis situações estaremos sempre recaindo num dos casos do **pt 7**, para cada uma delas podem-se ter duas soluções. Assim, o problema poderá ter no máximo oito soluções.

Nota: Colocamos aqui essa discussão com a intenção de apresentar uma forma metódica para analisar o número de soluções que um problema pode ter. Evidentemente, fica fora dos limites do bom senso pedir para construir todas as soluções de problemas como o **pt 8**, ou o **pt 9**, ou ainda o **pt 10**, que será estudado. Em problemas desse tipo, pede-se apenas uma solução particular ou, então, ajeitam-se os dados para eliminar uma parte delas. Assim, você não deve se preocupar demais com isso, pois, na prática, ao se pedir uma solução particular, você vai imaginar o problema já resolvido com essa solução; as demais situações ficam automaticamente eliminadas.

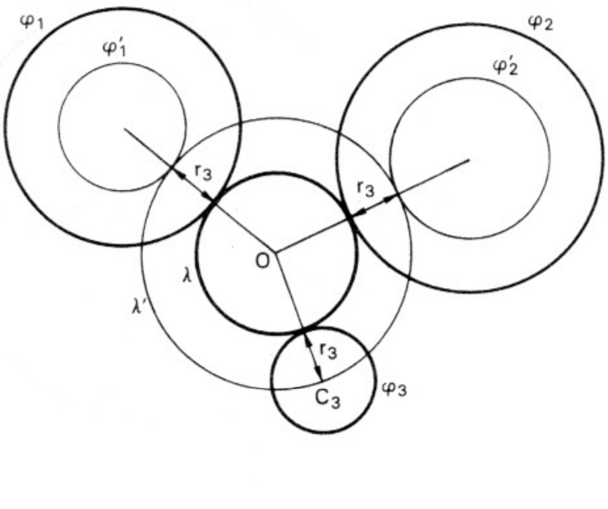
pt 10

Construir uma circunferência tangente a três circunferências φ_1, φ_2 e φ_3 dadas.

Resolva os exercícios de 59 a 61 do caderno de atividades.



Suposto resolvido



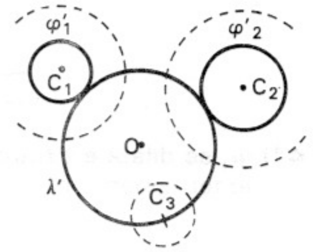
Resolução: Supondo o problema já resolvido, vamos imaginar a menor das três circunferências dadas, no caso φ_3, até reduzir-se a seu centro. As demais circunferências acompanham o movimento de φ_3 e, então:

- φ_1 se contrai e torna-se φ'_1, de raio igual a $r_1 - r_3$
- φ_2 se contrai e torna-se φ'_2, de raio igual a $r_2 - r_3$
- λ se dilata até passar por C_3 e torna-se λ'

No final desse processo, o problema passa a ser:

Construir uma circunferência λ' que tangencie duas circunferências φ'_1 e φ'_2 dadas e que passe por um ponto C_3 dado.

Isto é, após a construção de φ'_1 e φ'_2, o problema recai no **pt 8**, que permite determinar o centro O da circunferência procurada, que é o que se precisa para resolver o problema inicial.

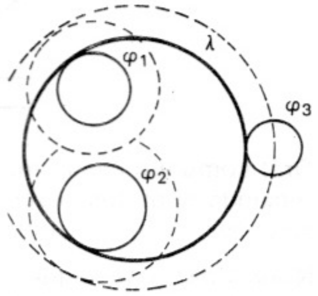


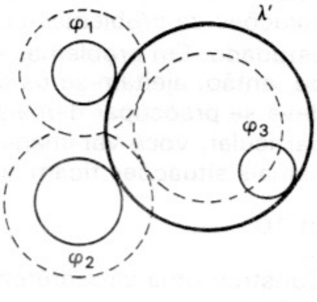
Após a construção de φ'_1 e φ'_2, o problema passa a ser o **pt 8**.

Observação: Aplicando uma análise análoga à que se fez do **pt 9**, verifica-se que esse problema pode ter um máximo de oito soluções. Nem vale a pena discuti-las individualmente, pelas razões já expostas anteriormente, mas a análise pode ser feita lembrando que em qualquer situação recai-se em um só dos dois casos do **pt 8**, cada um dos quais tem duas soluções.
Supondo φ_3 como a menor das circunferências, ela sempre se contrairá até reduzir-se a seu centro. Então, resta estudar as possibilidades de φ_1 e φ_2.

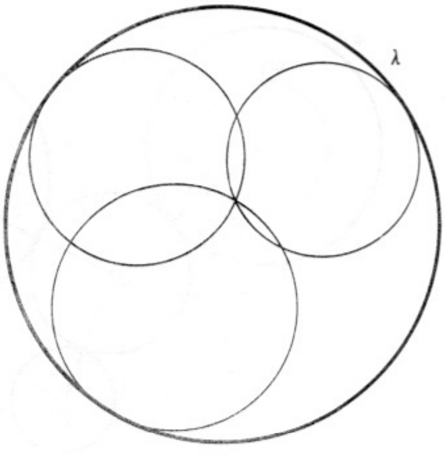
1.ª) φ_1 e φ_2 se contraem — 2 soluções
2.ª) φ_1 se contrai e φ_2 se dilata — 2 soluções
3.ª) φ_1 se dilata e φ_2 se contrai — 2 soluções
4.ª) φ_1 e φ_2 se dilatam — 2 soluções

É interessante notar que para cada uma dessas situações as duas soluções que podem surgir são circunferências chamadas **conjugadas**, isto é, cada uma representa o estado inverso de tangências (internas ou externas) com as circunferências dadas. Assim, por exemplo, se numa delas uma solução é uma circunferência λ tangente internamente a φ_1 e φ_2 e tangente externamente a φ_3, a outra solução (conjugada) será λ' tangente externamente a φ_1 e φ_2 e tangente internamente a φ_3. Outro exemplo: se a solução λ tangencia externamente φ_1, φ_2 e φ_3, enquadra-se na mesma situação a solução conjugada λ', tangente internamente a φ_1, φ_2 e φ_3. E assim por diante, evidentemente, supondo que tais soluções existam, pois, às vezes, o problema admite uma delas, mas não a conjugada. Por exemplo, com φ_1, φ_2 e φ_3 dispostas conforme a figura seguinte, o problema admite a solução λ tangente internamente às três circunferências dadas, mas não admite a conjugada, tangente externamente às três.





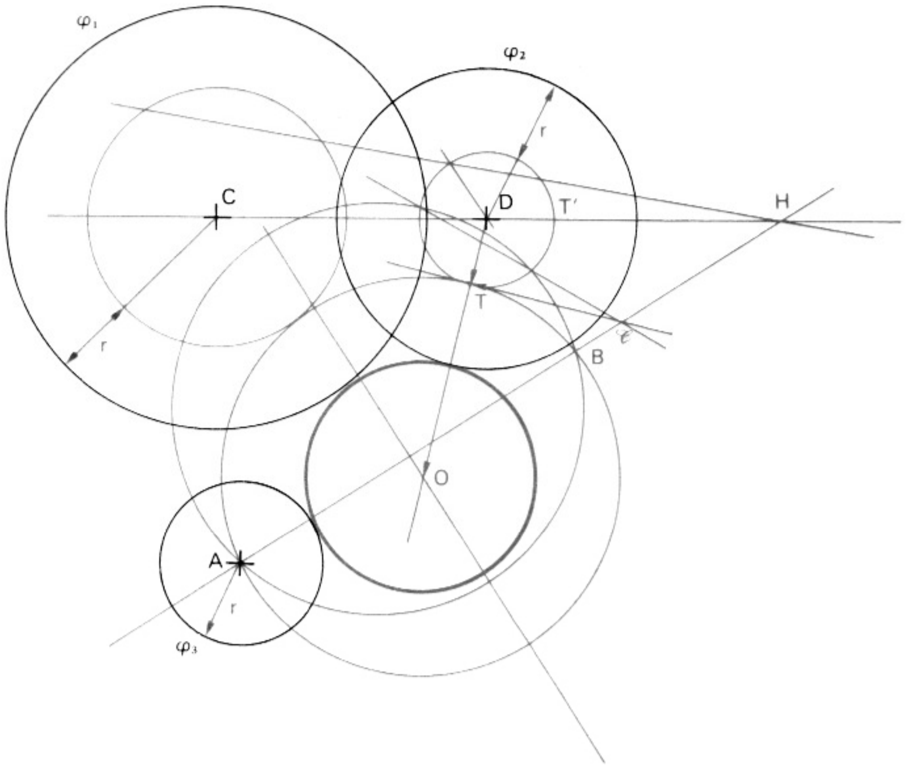
Nas figuras acima você vê um exemplo de soluções conjugadas λ e λ'. Note que ambas se enquadram na 4.ª situação, isto é, φ_1 e φ_2 se dilatam.



Resolva os exercícios de 62 a 64 do caderno de atividades.

62 Construa uma circunferência tangente externamente às três circunferências dadas.

Observação: Capriche o máximo possível nos traçados. Você vai recair no 1.º caso do **pt 7**.



Observação:
Insista com o aluno, que, como por 𝒞 podem-se traçar duas retas tangentes à circunferência φ_2 contraída, determinam-se dois pontos de tangência, T e T′, e que, traçando a reta por D e T′, em lugar de D e T, determina-se, na mediatriz de $\overline{AB}$, o centro O′ da circunferência tangente internamente a φ_1, φ_2 e φ_3, isto é, a solução conjugada.

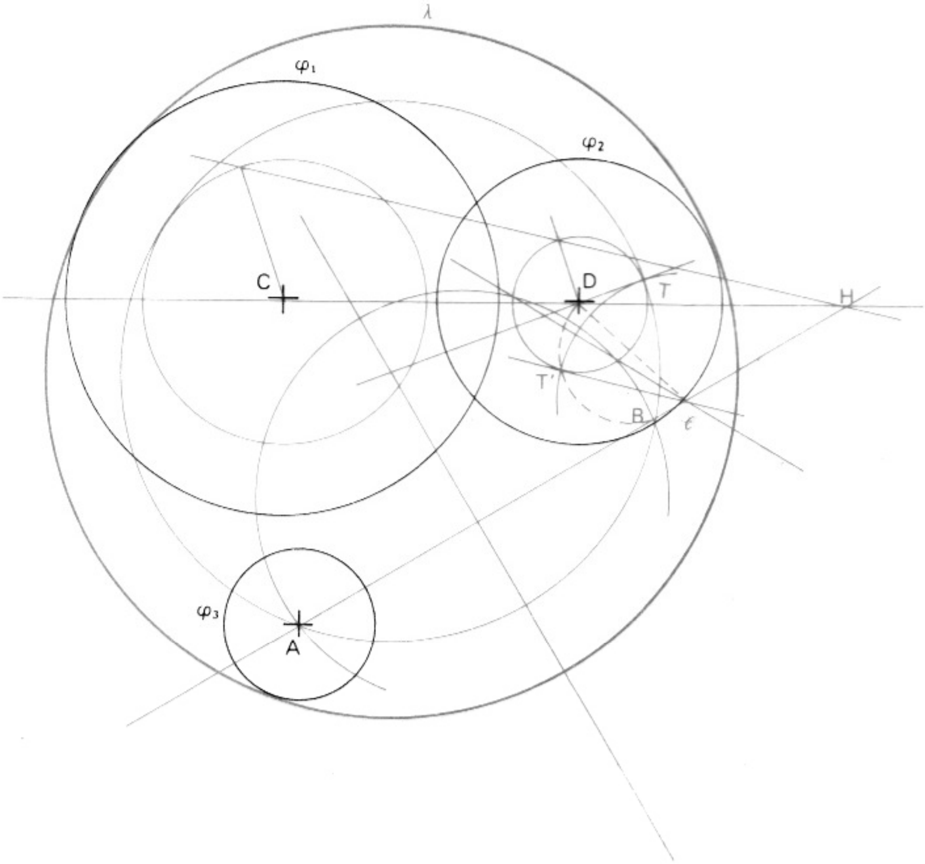
Nota:
Novamente não foram registrados os traçados da construção do ponto B.

Tangência

Figura auxiliar e anotações

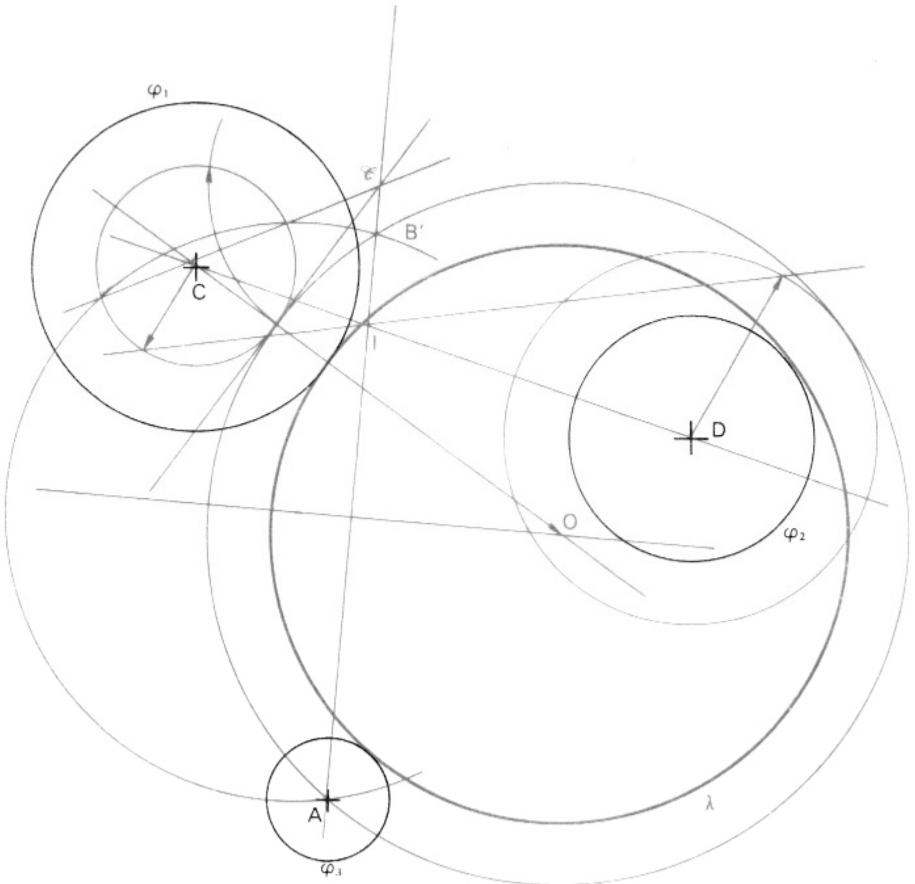
63 Construa uma circunferência que tangencie internamente as três circunferências dadas.

Sugestão:
Ao terminar a construção, proponha ao aluno que ele construa a circunferência tangente externamente a φ_1, φ_2 e φ_3. Insista com ele que as soluções aparecem aos pares.


λ
φ_1
φ_2
C
D
T
H
T'
B
ℓ
φ_3
A

64 São dadas três circunferências, φ_1, φ_2 e φ_3. Construa uma circunferência λ que tangencie φ_1 e φ_3 externamente e φ_2 internamente.

Observação: Faça a figura em que se supõe o problema já resolvido para poder verificar as contrações e dilatações necessárias. Você vai recair no 2.º caso do **pt 8**.



Nota histórica

O **pt 10** é conhecido como **problema de Apolônio**, embora, na verdade, ele seja apenas uma parte de tal problema (veja o enunciado ao lado). De qualquer modo, através de citações feitas por um matemático grego chamado Papus (aproximadamente, 320 d.C.), Apolônio escreveu um tratado sobre tangências, no qual esse problema comparecia. Essa obra se perdeu, de modo que não se conhece a resolução que Apolônio pode ter dado ao mesmo. Por isso, os matemáticos dos séculos XVI e XVII acreditavam que o grande geômetra não o tinha resolvido e, assim, o consideravam um verdadeiro desafio fazê-lo. Dessa forma, o ''problema de Apolônio'' adquiriu um certo *status* e grandes matemáticos lhe deram atenção, como Descartes, Newton, Euler, Poncelet, Chasles etc., e à medida que os estudos da Geometria evoluíam, várias resoluções lhe foram dadas. Em particular, a resolução que aqui se apresentou é devida a um excepcional matemático francês chamado François Viète (1540-1603).

O enunciado do problema de Apolônio é o seguinte: ''Dados três elementos, cada um dos quais podendo ser um ponto, uma reta ou uma circunferência, construir uma circunferência que seja tangente a esses três elementos.''

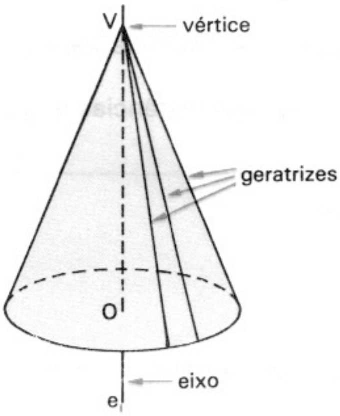
(**Tangência a um ponto** significa passar pelo ponto.)

10

Elipse

As cônicas

Para que você conheça as origens da designação **cônicas** para as curvas que passaremos a estudar nos próximos capítulos, teremos que abandonar brevemente o universo em que se desenvolvem os nossos estudos, isto é, o plano. No espaço tridimensional, define-se uma figura geométrica chamada **cone**. Observe a figura seguinte onde se apresenta um cone circular, isto é, um cone cuja base é um círculo.

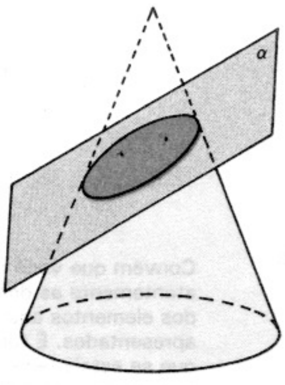


Note, podemos destacar os seguintes elementos:

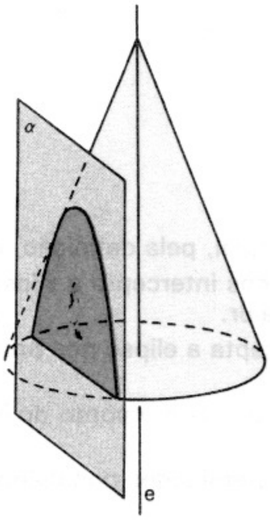
- **Vértice**: é o ponto V.
- **Eixo**: é a reta **e**, conduzida pelo vértice e pelo centro O do círculo da base.
- **Geratriz**: é todo segmento que tem uma extremidade em V e a outra num ponto qualquer da **circunferência** da base.

Seccionando um cone através de planos convenientemente posicionados, ficam determinadas três figuras **cujos contornos** são chamados **elipse**, **hipérbole** e **parábola**. Veja as figuras.

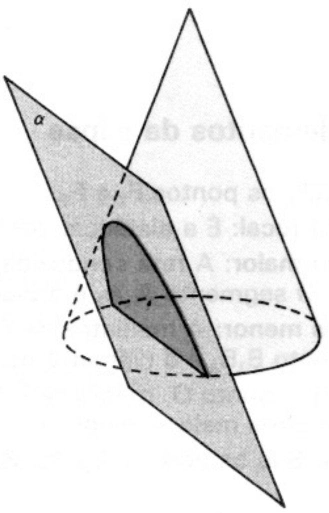
Elipse



Hipérbole



Parábola



Por essa razão, a elipse, a hipérbole e a parábola são denominadas **secções cônicas**, ou, simplesmente, **cônicas**.

É interessante que os nomes dessas curvas foram dados pelo já citado Apolônio de Perga. Esse magnífico geômetra fez um estudo profundo das secções cônicas.

Por fim, convém esclarecer que não é nosso propósito estudar as cônicas como secções de um cone. Essa breve introdução, conforme já foi dito, teve apenas o objetivo de mostrar a você a origem da expressão ''secções cônicas'' designando as três curvas que passaremos a estudar no plano, através de definições que caracterizam os pontos a elas pertencentes.

O conceito de elipse

Definição

Considerem-se dois pontos F_1 e F_2, tais que $F_1F_2 = 2c$, e uma distância 2a, de modo que $2a > 2c$.

Chama-se **elipse** o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante e igual a 2a.

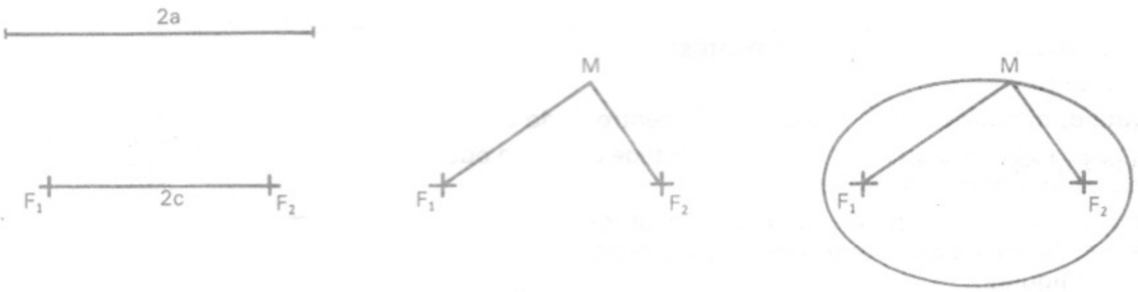
É cômodo trabalhar com as distâncias na forma 2a, 2c etc., pois, como você vai notar, é muito comum termos que usar as metades delas, as quais passam a ser representadas por **a**, **c** etc.

Deve-se destacar que a definição acima significa que:

- Se M é um ponto da elipse, então:

$$\boxed{MF_1 + MF_2 = 2a}$$

- Todo ponto M que satisfaz a condição $MF_1 + MF_2 = 2a$ pertence à elipse.



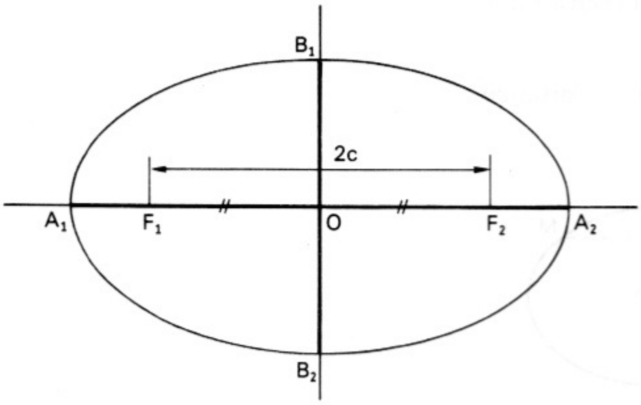
$2a > 2c$ $\qquad$ $MF_1 + MF_2 = 2a$

Alguns elementos da elipse

- **Focos**: São os pontos F_1 e F_2.
- **Distância focal**: É a distância dos focos, a qual, pela definição, é igual a 2c.
- **Diâmetro maior**: A reta conduzida pelos focos intercepta a elipse nos pontos A_1 e A_2. O segmento A_1A_2 é o diâmetro maior.
- **Diâmetro menor**: A mediatriz de $\overline{F_1F_2}$ intercepta a elipse nos pontos B_1 e B_2. O segmento B_1B_2 é o diâmetro menor.
- **Centro**: É o ponto O, médio de $\overline{F_1F_2}$. (Note que O é o ponto de intersecção dos diâmetros maior e menor.)
- **Vértices**: São os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2, extremidades dos diâmetros maior e menor.

Convém que você releia atentamente as definições dos elementos aqui apresentados. É fundamental que se esteja bem familiarizado com eles, bem como com a própria definição de elipse, para que se possa prosseguir nos estudos.

Resumindo



Focos: F_1 e F_2
Distância focal: $F_1F_2 = 2c$
Diâmetro maior: $\overline{A_1A_2}$
Diâmetro menor: $\overline{B_1B_2}$
Centro: O
Vértices: A_1, A_2, B_1 e B_2

Eixos de simetria

Propriedade

Toda elipse admite **dois eixos de simetria**: as retas suportes dos diâmetros maior e menor.

Vamos demonstrar a propriedade de simetria para a reta **e**, suporte de $\overline{A_1A_2}$. Notemos, inicialmente, que o que se pretende provar é o seguinte:

Se M pertence a uma elipse, então o seu simétrico M', em relação a e, também pertence a essa elipse.

☐ **Demonstração:**
Se M pertence à elipse, então:

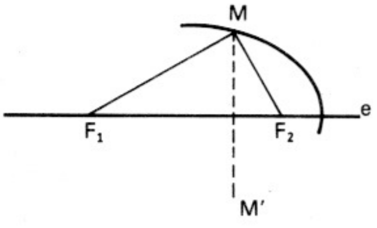
$$\boxed{MF_1 + MF_2 = 2a} \quad (1)$$

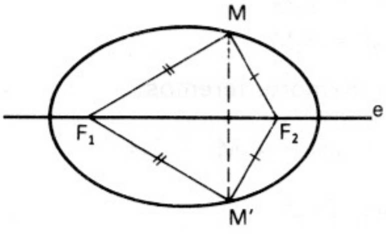
Mas se M' é o simétrico de M em relação à reta **e**, então:

$$\begin{cases} M'F_1 = MF_1 \\ M'F_2 = MF_2 \end{cases}$$

Logo, $M'F_1 + M'F_2 = MF_1 + MF_2$

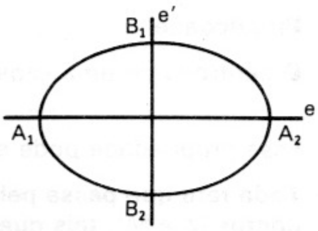
E de (1), $\boxed{M'F_1 + M'F_2 = 2a} \quad (2)$





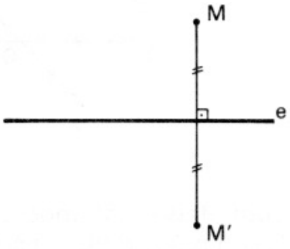
A igualdade (2) mostra que M' também pertence à elipse.

■ c.q.d.

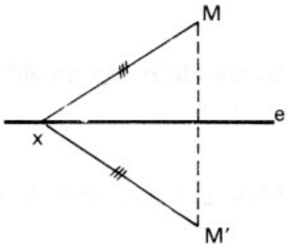


A reta **e**, bem como a reta e', são eixos de simetria.

Lembre-se de que, por definição, se M e M' são simétricos em relação a uma reta **e**, então **e** é a mediatriz de $\overline{MM'}$.



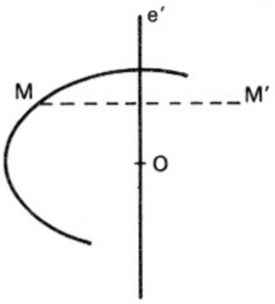
Como conseqüência, para todo ponto X do eixo **e**, tem-se MX = M'X.



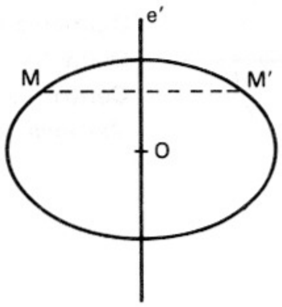
Analogamente se demonstra que a reta e′, suporte do diâmetro menor, é um outro eixo de simetria da elipse. Isto é:

Se M **pertence a uma elipse, então o seu simétrico** M′, **em relação a** e′, **também pertence a essa elipse**.

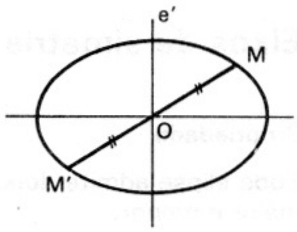
Se M pertence...



então, M′ também pertence...



Centro de simetria



O é o centro de simetria.
OM = OM′

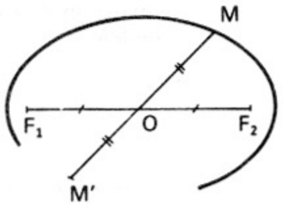
Propriedade

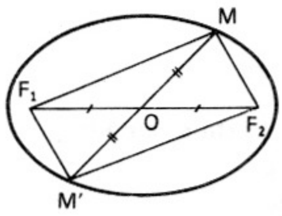
O centro O de uma elipse qualquer é um **centro de simetria** da mesma.

Essa propriedade pode ser "traduzida" assim:

Toda reta que passa pelo centro O **de uma elipse intercepta a mesma nos pontos** M **e** M′, **tais que** O **é o ponto médio de** $\overline{MM'}$.

☐ **Demonstração**:
Seja M um ponto qualquer da elipse e M′ o seu simétrico em relação a O. Queremos provar que M′ também pertence à elipse, isto é, queremos provar que $F_1M' + F_2M' = 2a$.





Com efeito, notemos que O é, simultaneamente, ponto médio de $\overline{MM'}$ e de $\overline{F_1F_2}$. Então, o quadrilátero $MF_1M'F_2$ é um paralelogramo, pois as suas diagonais interceptam-se em seus pontos médios. Como em todo paralelogramo os lados opostos são congruentes, podemos escrever:

$$\begin{cases} F_1M' = F_2M \\ F_2M' = F_1M \end{cases}$$

Somando estas igualdades membro a membro, teremos:

$$\boxed{F_1M' + F_2M' = F_1M + F_2M} \quad (1)$$

Mas, por hipótese, M pertence à elipse. Então:

$$F_1M + F_2M = 2a$$

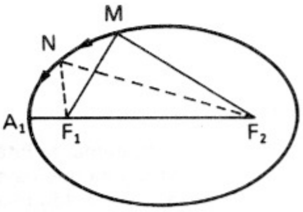
$$\therefore \quad \boxed{F_1M' + F_2M' = 2a}$$

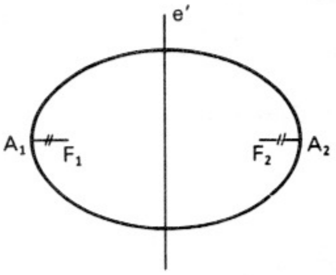
■ c.q.d.

O comprimento do diâmetro maior

Você se recorda que na definição de elipse foi dada uma distância 2a, e que todo ponto M da elipse deveria satisfazer a condição $MF_1 + MF_2 = 2a$.
Pois bem, como o vértice A_1 pertence à elipse, podemos escrever:

$$\boxed{A_1F_1 + A_1F_2 = 2a} \quad (1)$$





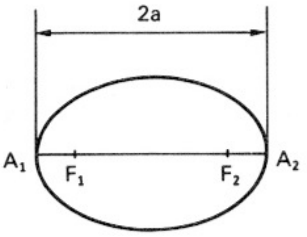
Por outro lado, como os pares de pontos A_1, A_2 e F_1, F_2 são simétricos em relação a e', temos:

$$\boxed{A_1F_1 = A_2F_2} \quad (2)$$

Substituindo A_1F_1 por A_2F_2 na igualdade (1), vem:

$$A_2F_2 + A_1F_2 = 2a$$

$$\therefore \quad \boxed{A_1A_2 = 2a}$$

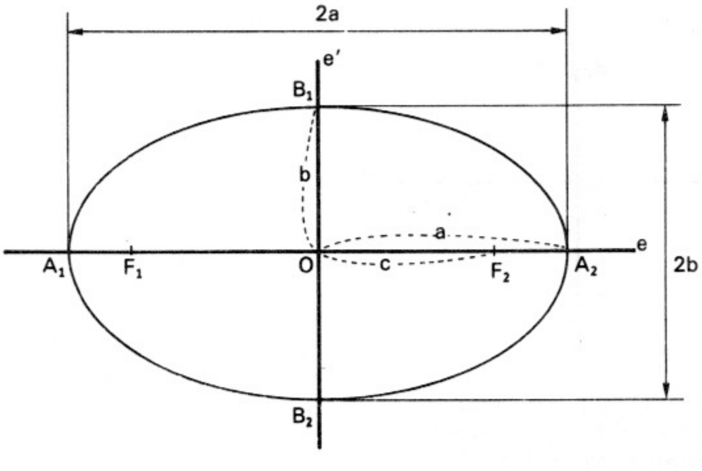


Note que
$A_2F_2 + A_1F_2 = A_1A_2$.

Assim, fica estabelecido que o comprimento do diâmetro maior é igual a 2a.

Observações:
- Vamos convencionar que o comprimento do diâmetro menor é $B_1B_2 = 2b$.
- Serão usadas, com freqüência, as expressões semidiâmetro maior, semidiâmetro menor, semidistância focal etc., para designar as metades desses elementos.

Resumindo



Eixo de simetria: e, e'
Centro de simetria: O
$A_1A_2 = 2a$
$B_1B_2 = 2b$

Uma constatação importante

Observe o vértice B_1. Como ele é um ponto de e′, já que esse eixo é a mediatriz de $\overline{F_1F_2}$, podemos escrever:

$$\boxed{B_1F_1 = B_1F_2}$$

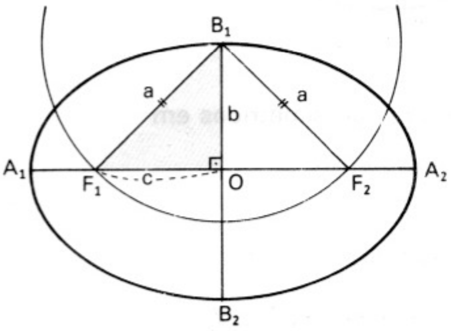
Por outro lado, como B_1 pertence à elipse, tem-se:

$$\boxed{B_1F_1 + B_1F_2 = 2a}$$

Dessas duas igualdades, concluímos que:

$$\boxed{B_1F_1 = a \text{ e } B_1F_2 = a}$$

O teorema de Pitágoras assegura que os elementos **a**, **b** e **c** estão relacionados por: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

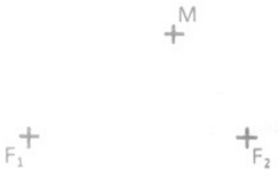


Esse fato geométrico será bastante útil nos problemas de construções, pois ele mostra que os elementos **a**, **b** e **c** constituem os lados de um triângulo retângulo, no qual **a** é a hipotenusa. Mostra, também, que a circunferência de centro B_1 e raio **a** intercepta o diâmetro maior nos focos.

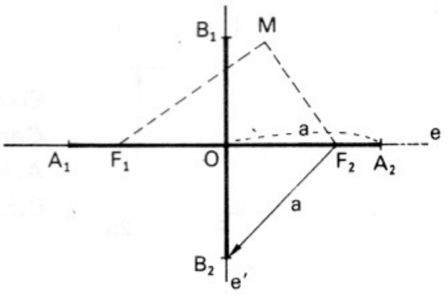
Evidentemente, essas propriedades do vértice B_1 valem também para B_2.

Exercícios

E10.**1** Determine os vértices de uma elipse, dados os focos e um ponto M a ela pertencente.

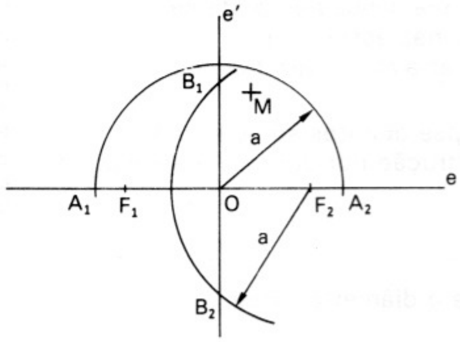


Suposto resolvido

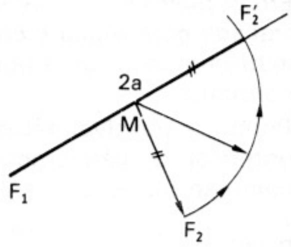


Resolução: Podemos traçar os eixos de simetria, pois um deles (e) passa pelos focos e o outro (e′) é a mediatriz de $\overline{F_1F_2}$. Em seguida, determinamos o comprimento **a** do semidiâmetro maior. Isso é possível, pois, se M pertence à elipse, por definição $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Com centro em O e raio **a**, determinamos A_1 e A_2 em **e**. Com centro em F_2 (ou F_1) e raio **a**, determinamos B_1 e B_2 em e′.

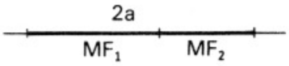


Para determinar 2a pode-se proceder conforme a construção abaixo.



$MF_1 + MF_2 = 2a$
$MF_2' = MF_2$ ⇒ $\overline{F_1F_2'} = 2a$

Ou, então, pode-se transportar $\overline{MF_1}$ e $\overline{MF_2}$ para uma reta arbitrária a fim de determinar a sua soma.

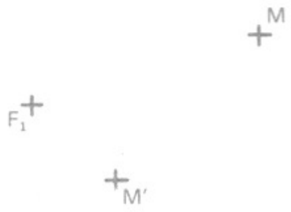


E10.**2** Numa elipse a distância focal é 2c = 80 mm e o diâmetro maior tem comprimento 2a = 100 mm. Determine graficamente o diâmetro menor. Qual é a sua medida?

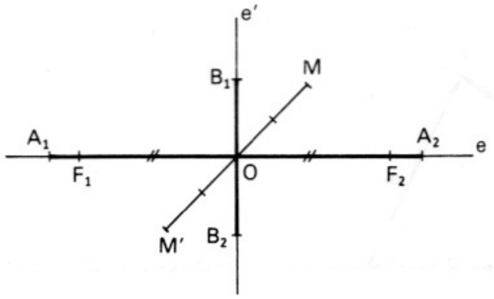
E10.**3** Os diâmetros maior e menor de uma elipse medem 78 mm e 72 mm. Determine a distância focal. (Resolva graficamente!)

E10.**4** De uma elipse são dados: diâmetro menor: 2b = 63 mm; distância focal: 2c = 60 mm. Obtenha, graficamente, o diâmetro maior.

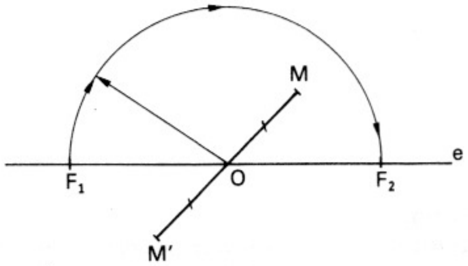
E10.**5** De uma elipse são dados o foco F_1 e dois de seus pontos, M e M′, simétricos em relação ao centro. Construa os diâmetros maior e menor dessa elipse.



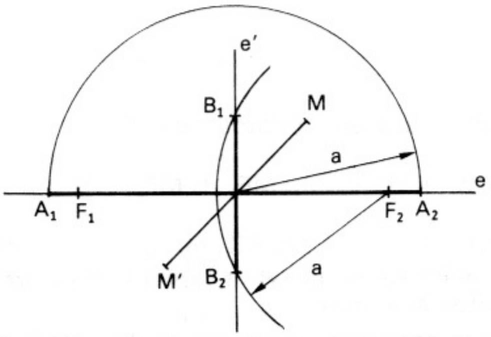
Suposto resolvido



Resolução: O centro O da elipse é o ponto médio de $\overline{MM'}$. Então, podemos traçar o eixo (**e**) que contém os focos, pois o mesmo passa por F_1 e O. Sobre **e** determinamos F_2, pois $OF_1 = OF_2$. Ora, tendo F_1, F_2 e o ponto M (ou M′) da elipse, recaímos no E10.1.



Determinando F_2...



... recaímos no E10.1.

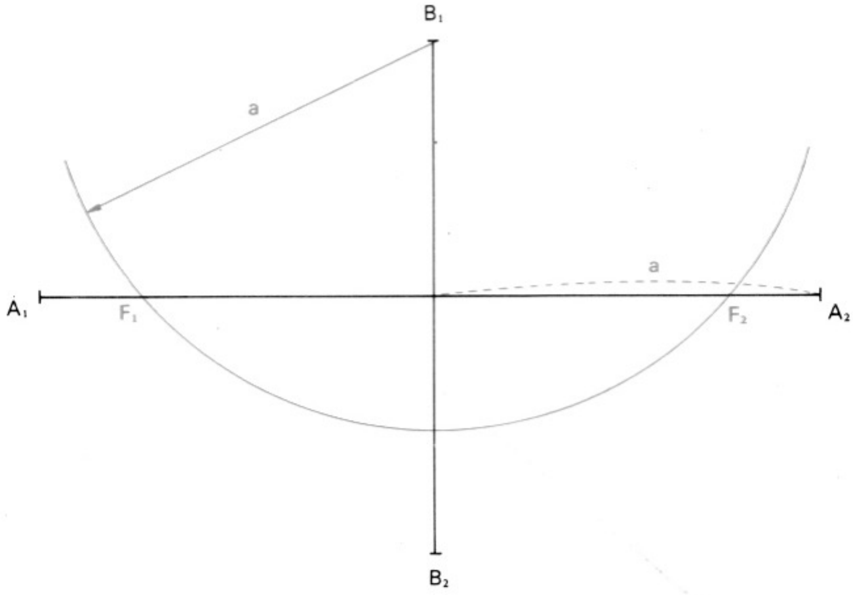
Resolva os exercícios de 127 a 131 do caderno de atividades.

Elipse: elementos

Figura auxiliar e anotações

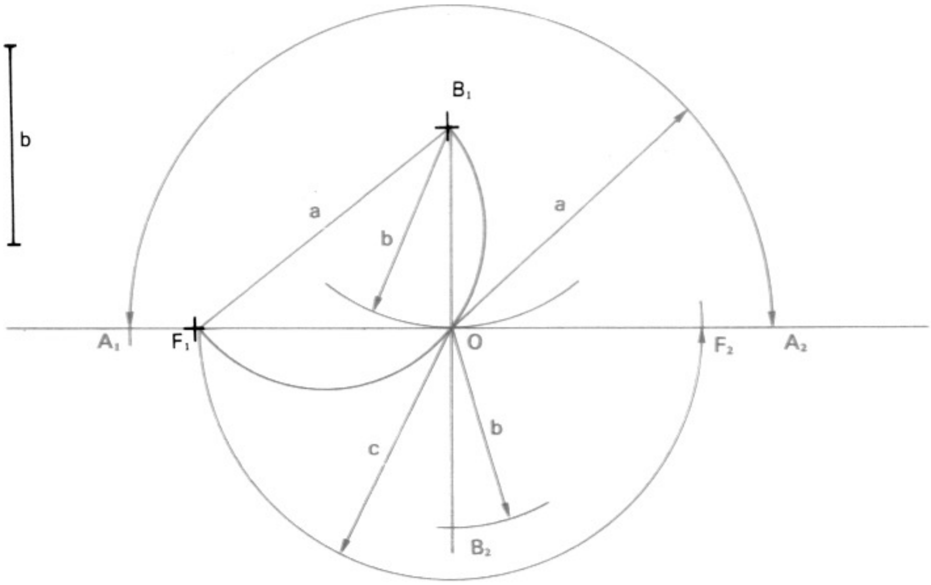
127 Obtenha os focos de uma elipse, dados os diâmetros maior e menor.

Observação:
Insista com o aluno para que ele se familiarize bem com os elementos **a**, **b** e **c**. Em particular, que $B_1F_1 = a$.



128 De uma elipse são dados um foco F_1, uma extremidade B_1 do diâmetro menor e o semidiâmetro menor (**b**). Obtenha o outro foco e os demais vértices.
Sugestão: O centro da elipse enxerga $\overline{F_1B_1}$ segundo um ângulo reto. Além disso, $F_1B_1 = a$.

Observação:
Convém comentar que o centro O poderia ser obtido no outro arco capaz de 90° sobre $\overline{B_1F_1}$. Assim, o problema admite uma segunda solução, mas ela cai fora dos limites reservados para a construção.



Construção a partir do triângulo OF_1B_1.

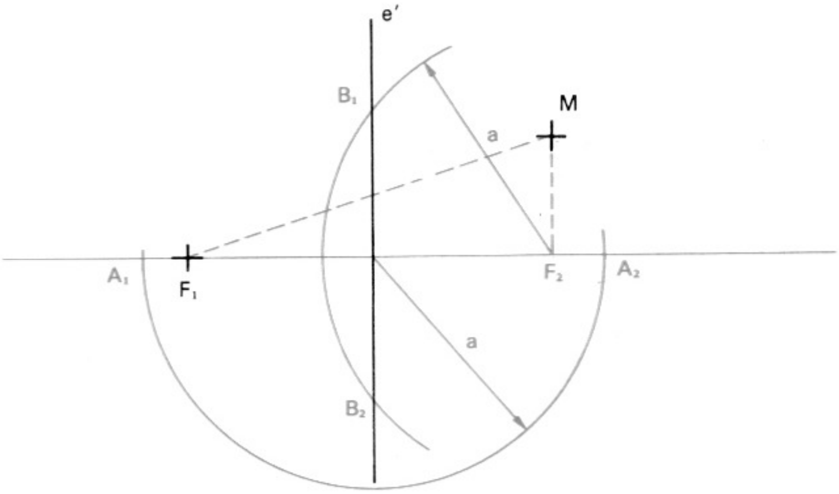
Elipse: elementos

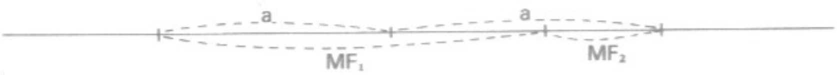
Figura auxiliar e anotações

Observação:
Pode-se aproveitar esse exercício para reforçar a definição de elipse.

129 De uma elipse são dados um ponto M, o eixo **e'** que contém o diâmetro menor e um dos focos (F_1). Determine o outro foco e construa os diâmetros maior e menor.

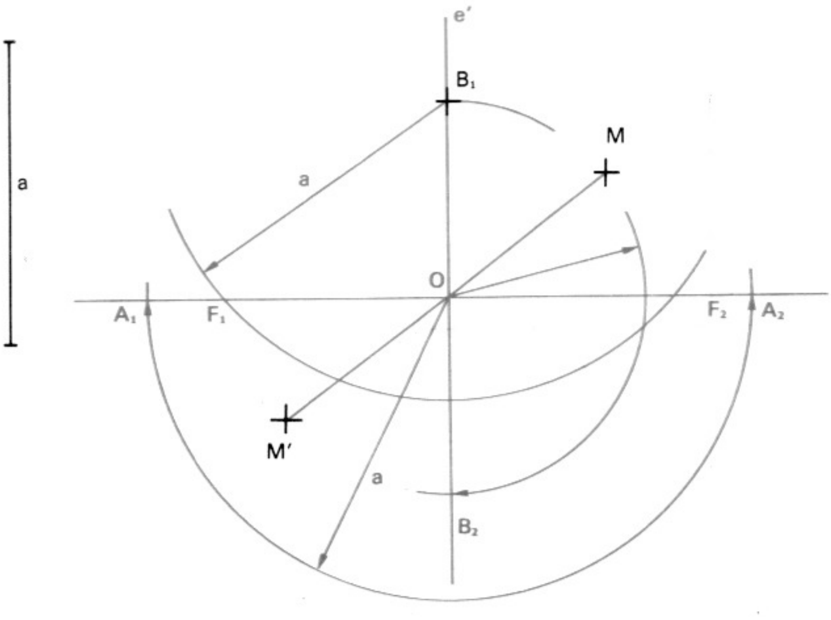
Sugestão: Você pode determinar F_2, lembrando-se em seguida de que $MF_1 + MF_2 = 2a$.





130 De uma elipse são dados dois pontos M e M' simétricos em relação ao centro, uma extremidade B_1 do diâmetro menor, e o semidiâmetro maior (**a**). Determine os outros vértices e os focos.

Sugestão: O centro O é o ponto médio de $\overline{MM'}$. Então, é possível traçar o eixo **e'** por B_1 e O.

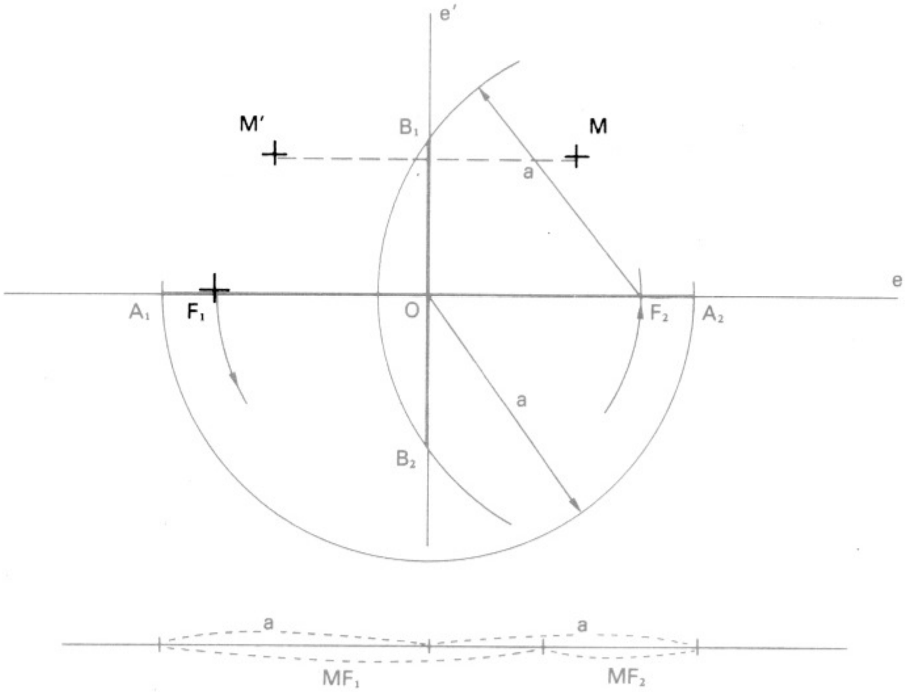


Elipse: elementos e construção por pontos

Figura auxiliar e anotações

131 De uma elipse são dados um foco F_1 e dois pontos M e M′ simétricos em relação ao eixo que contém o diâmetro menor. Determine o outro foco e construa os diâmetros maior e menor.

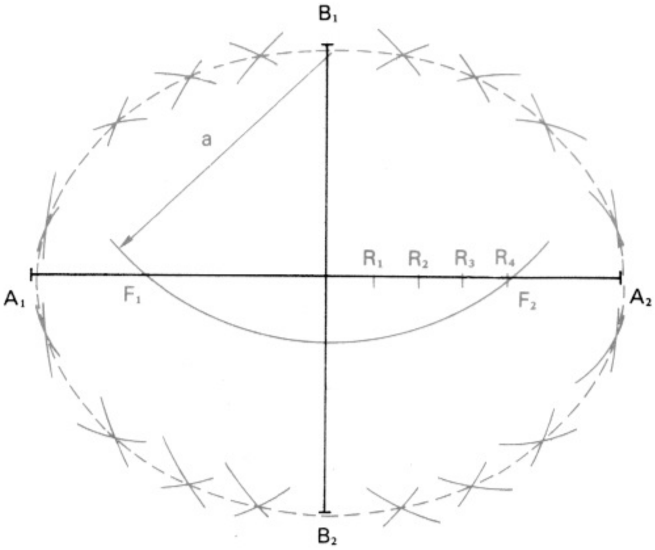
Observação:
Reforce que **e′** é a mediatriz de $\overline{MM'}$.


e′
M′
B_1
M
a
e
A_1
F_1
O
F_2
A_2
a
B_2
a
a
MF_1
MF_2

1.º) **e′**
2.º) **e**
3.º) F_2
4.º) A_1 e A_2
5.º) B_1 e B_2

132 Construa uma elipse por pontos, dados os diâmetros maior e menor.

Sugestão:
Proponha uma construção por pontos, dados os focos e um ponto M pertencente à elipse.

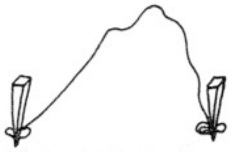

B_1
a
R_1
R_2
R_3
R_4
A_1
F_1
F_2
A_2
B_2

Construção da elipse por pontos

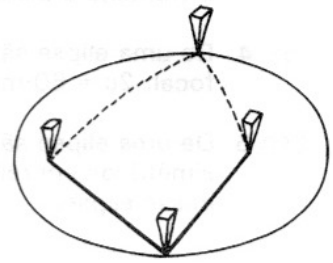
Em primeiro lugar, convém deixar bem claro que **uma elipse não pode ser traçada com régua e compasso.** Isto é, usando apenas esses dois instrumentos, não é possível construir uma elipse através de um traçado contínuo.

Porém, é possível determinar tantos pontos da elipse quantos se quiser. A obtenção de vários pontos dela denomina-se construção por pontos. Vejamos como se faz isso.

Como curiosidade, vale citar o "processo do jardineiro" para a construção de uma elipse através de um traçado contínuo.
Fincam-se duas estacas no chão e nelas amarram-se as extremidades de um barbante.

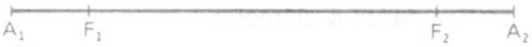


Com o auxílio de uma outra estaca, estica-se o barbante traçando-se, no chão, a elipse como mostra a figura:



Problema

Construir uma elipse por pontos, dados os focos e o diâmetro maior.



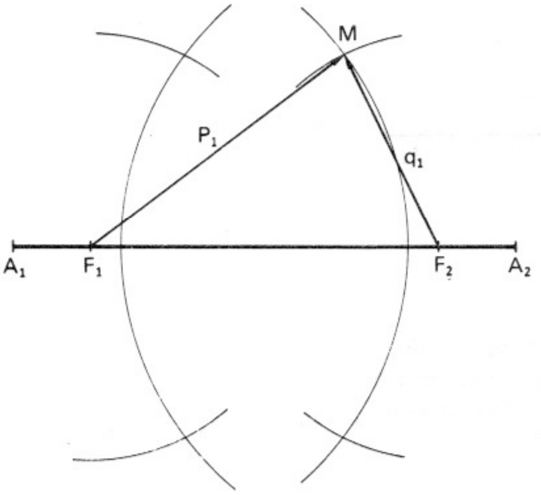
Resolução:

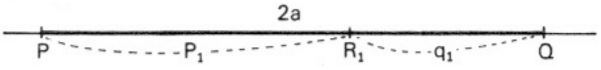
1.º) Sobre uma reta arbitrária, toma-se o segmento PQ de comprimento 2a. ($2a = A_1A_2$)

2.º) Sobre $\overline{PQ}$ toma-se um ponto R_1 arbitrário. Sejam $p_1 = PR_1$ e $q_1 = QR_1$.

3.º) Com centros em F_1 e F_2 descrevem-se arcos de raios iguais a p_1 e q_1.

Os quatro pontos de intersecção dos arcos de raios diferentes pertencem à elipse.





$$\boxed{p_1 + q_1 = 2a}$$

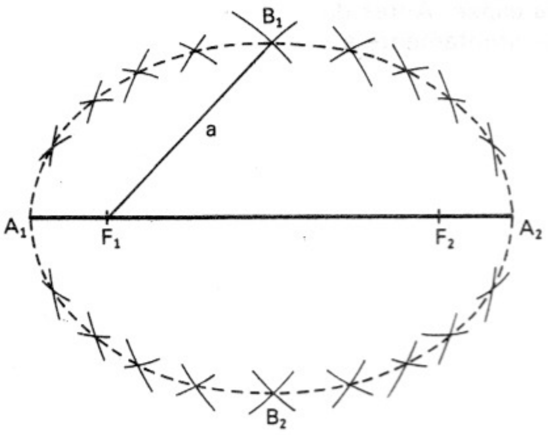
De fato, sendo M um qualquer dos quatro pontos, tem-se:

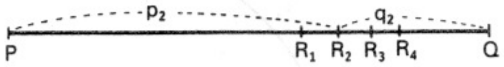
$$MF_1 + MF_2 = p_1 + q_1 \Rightarrow \boxed{MF_1 + MF_2 = 2a}$$

Tomando-se, agora, os pontos R_2, R_3... sobre $\overline{PQ}$, obtêm-se os pares de raios p_2, q_2; p_3, q_3; ... e, de forma análoga ao que se fez para p_1 e q_1, determinam-se tantos pontos da elipse quantos se quiser.

De um modo geral, é suficiente construir 16 pontos, 8 de cada lado, mais os vértices B_1 e B_2, para se fazer um bom esboço da elipse.

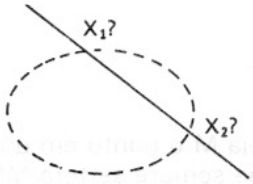
Caso você perceba que o contorno da elipse não ficou bem definido com 16 pontos, então você deve construir outros.





Observações:

- Para essa construção por pontos é necessário conhecer F_1, F_2 e 2a. Caso o problema não os forneça diretamente, é necessário obtê-los.
- Pode-se usar o próprio diâmetro $\overline{A_1A_2}$ para marcar os pontos R_1, R_2, ..., ao invés do segmento $\overline{PQ}$.
- **Cuidado!** Não podemos utilizar os pontos da elipse, assim construída, para resolver problema. Suponha, por exemplo, que se queira determinar o ponto de intersecção de uma reta com uma elipse. Não é permitido construí-la por pontos e determinar a intersecção. Adiante estudaremos como se obtém a solução geometricamente exata desse problema.

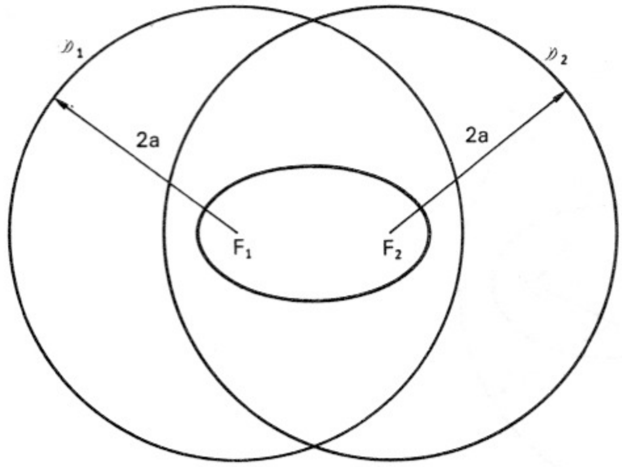


Resolva os exercícios 132 e 133 do caderno de atividades.

Circunferências diretoras

Definição

As duas circunferências que têm centros nos focos e raios iguais a 2a são chamadas **circunferências diretoras** da elipse.



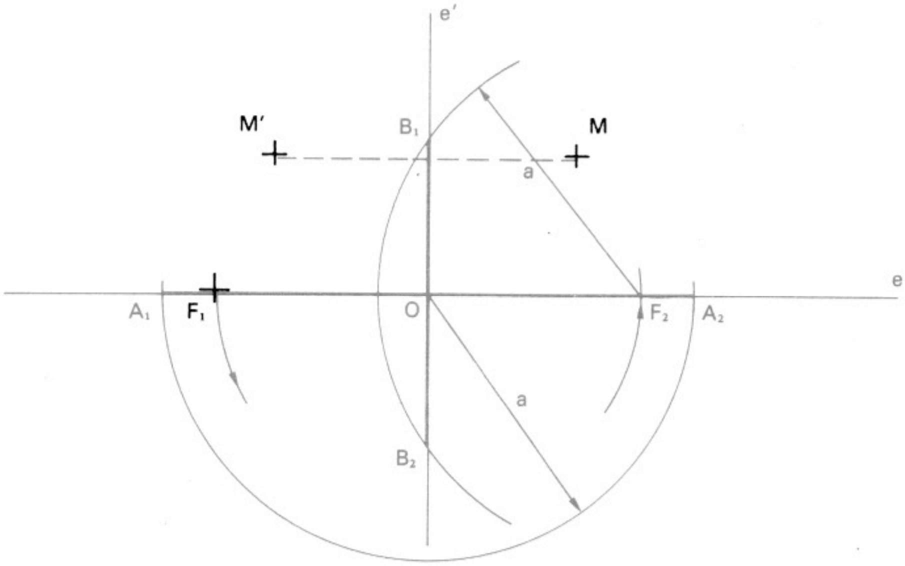
Observação: A circunferência diretora de centro F_1 é dita **relativa ao foco** F_1 e a outra, **relativa ao foco** F_2. Vamos denotar essas circunferências por $\mathscr{D}_1$ e $\mathscr{D}_2$, respectivamente.

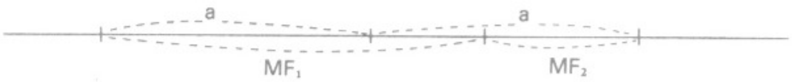
Elipse: elementos e construção por pontos

Figura auxiliar e anotações

131 De uma elipse são dados um foco F_1 e dois pontos M e M′ simétricos em relação ao eixo que contém o diâmetro menor. Determine o outro foco e construa os diâmetros maior e menor.

Observação:
Reforce que **e′** é a mediatriz de $\overline{MM'}$.

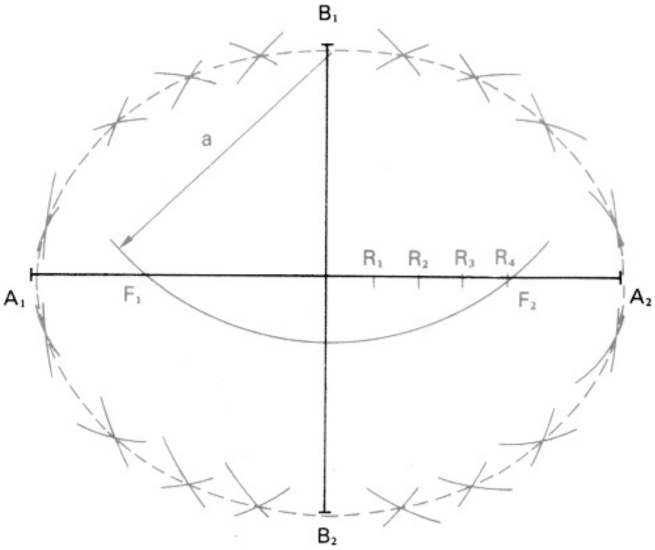

e′
M′
B_1
M
a
e
A_1
F_1
O
F_2
A_2
a
B_2



1.º) **e′**
2.º) **e**
3.º) F_2
4.º) A_1 e A_2
5.º) B_1 e B_2

132 Construa uma elipse por pontos, dados os diâmetros maior e menor.

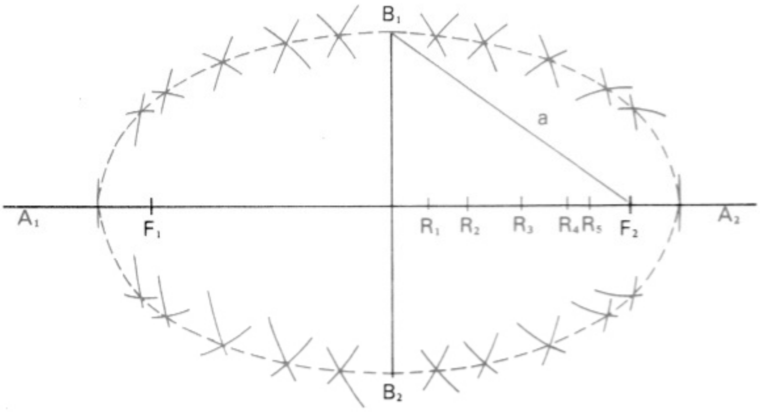
Sugestão:
Proponha uma construção por pontos, dados os focos e um ponto M pertencente à elipse.


B_1
a
R_1
R_2
R_3
R_4
A_1
F_1
F_2
A_2
B_2

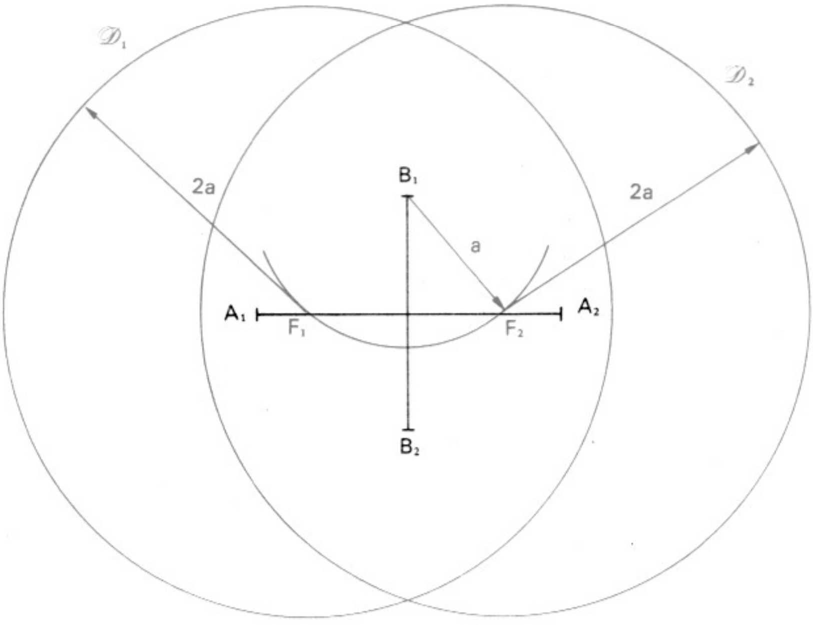
Elipse: construção por pontos e circunferências diretoras

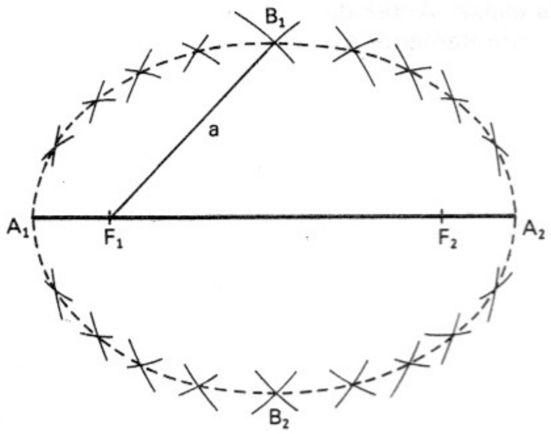
Figura auxiliar e anotações

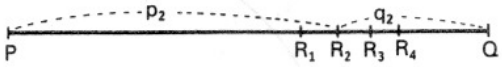
133 Construa uma elipse, por pontos, dados os focos e o diâmetro menor.


B_1
a
A_1
F_1
R_1
R_2
R_3
R_4
R_5
F_2
A_2
B_2

134 Dados os diâmetros maior e menor de uma elipse, construa circunferências diretoras.

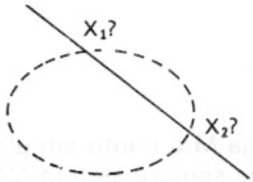

$\mathscr{D}_1$
$\mathscr{D}_2$
2a
2a
B_1
a
A_1
F_1
F_2
A_2
B_2





Observações:

- Para essa construção por pontos é necessário conhecer F_1, F_2 e 2a. Caso o problema não os forneça diretamente, é necessário obtê-los.
- Pode-se usar o próprio diâmetro $\overline{A_1A_2}$ para marcar os pontos R_1, R_2, ..., ao invés do segmento $\overline{PQ}$.
- **Cuidado!** Não podemos utilizar os pontos da elipse, assim construída, para resolver problema. Suponha, por exemplo, que se queira determinar o ponto de intersecção de uma reta com uma elipse. Não é permitido construí-la por pontos e determinar a intersecção. Adiante estudaremos como se obtém a solução geometricamente exata desse problema.

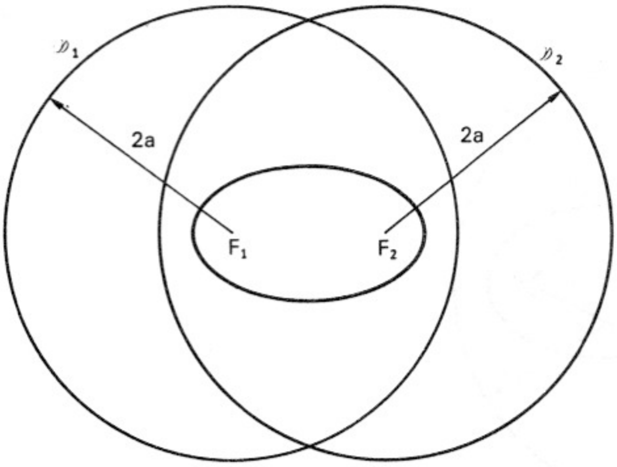


Resolva os exercícios 132 e 133 do caderno de atividades.

Circunferências diretoras

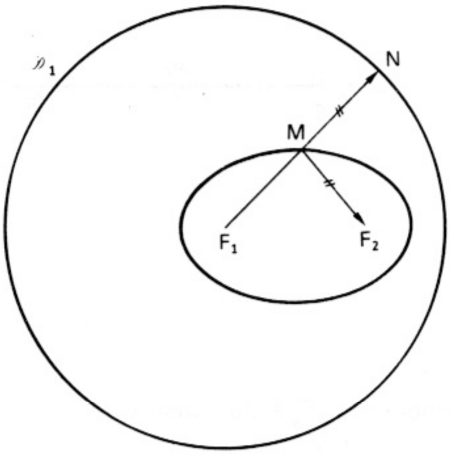
Definição

As duas circunferências que têm centros nos focos e raios iguais a 2a são chamadas **circunferências diretoras** da elipse.



Observação: A circunferência diretora de centro F_1 é dita **relativa ao foco** F_1 e a outra, **relativa ao foco** F_2. Vamos denotar essas circunferências por $\mathscr{D}_1$ e $\mathscr{D}_2$, respectivamente.

Vamos analisar, agora, uma propriedade das circunferências diretoras, que será extremamente importante para a continuidade dos estudos da elipse. Antes de apresentá-la na sua forma final, convém que você acompanhe atentamente a seguinte colocação. Observe a figura.



Seja M o ponto em que um raio $\overline{F_1N}$ **qualquer** de $\mathscr{D}_1$ intercepta a elipse. Note que sempre se terá $MN = MF_2$. De fato:

$$F_1N = 2a \Rightarrow \boxed{F_1M + MN = 2a} \quad (1)$$

Como M pertence à elipse, tem-se:

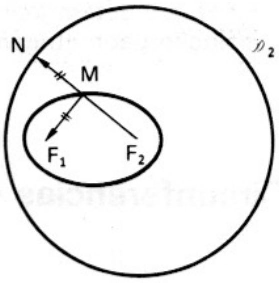
$$\boxed{F_1M + MF_2 = 2a} \quad (2)$$

De (1) e (2), pode-se escrever:

$$F_1M + MN = F_1M + MF_2$$

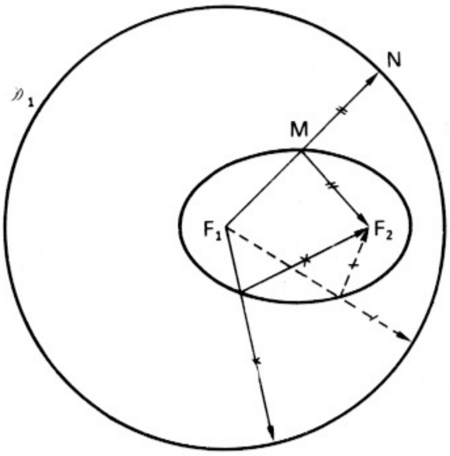
$$\therefore \quad \boxed{MN = MF_2}$$

Evidentemente, a propriedade é válida também para $\mathscr{D}_2$.



$MN = MF_1$

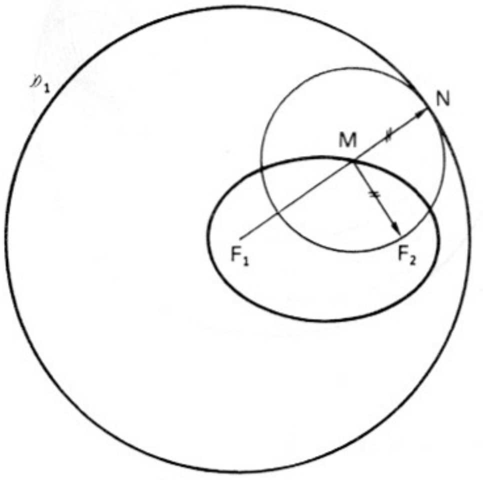
Vale reforçar que tal propriedade é verdadeira para todo raio da circunferência diretora.

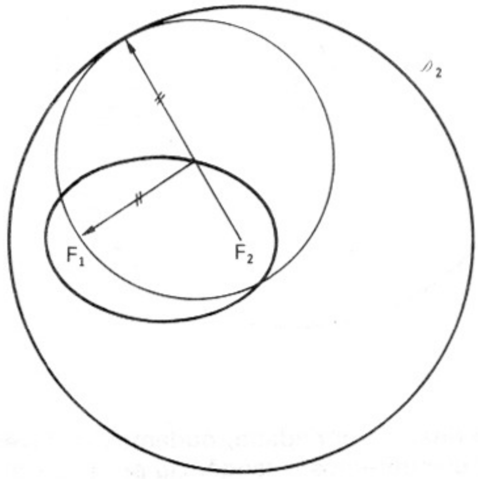


Essa mesma propriedade será agora enunciada de uma forma mais interessante aos nossos propósitos.

Propriedade

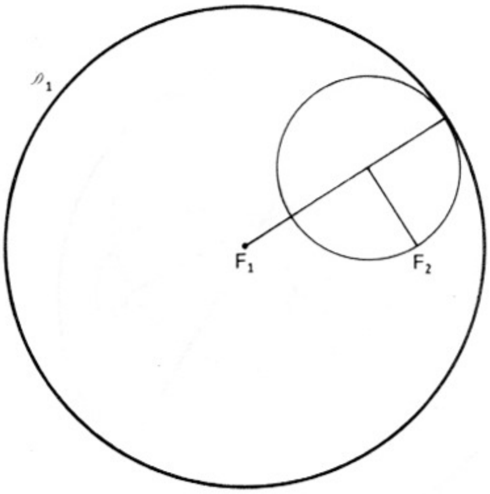
Toda circunferência que tem o centro num ponto qualquer de uma elipse e passa por um foco da mesma é tangente internamente à circunferência diretora relativa ao outro foco.

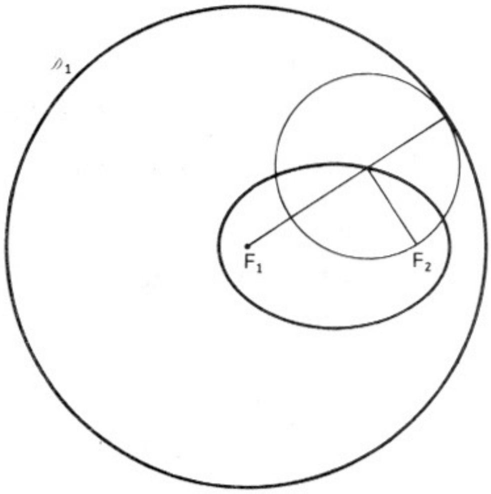




Demonstra-se facilmente a propriedade recíproca, isto é:

Se uma circunferência passa por um dos focos de uma elipse e tangencia internamente a circunferência diretora relativa ao outro foco, então o seu centro pertence à elipse.

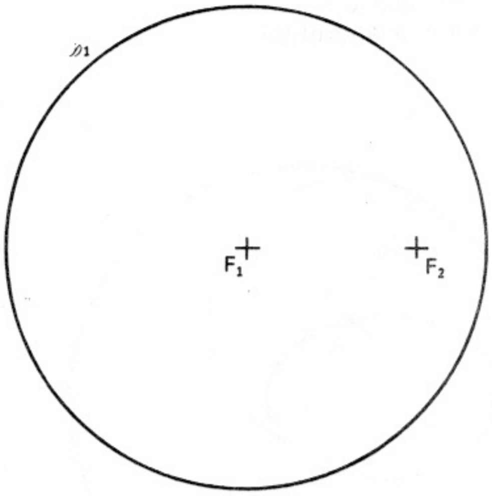


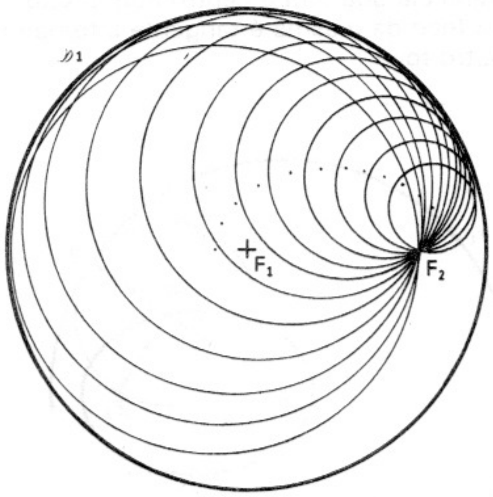


Desse modo, a propriedade que discutimos caracteriza perfeitamente os pontos de uma elipse, isto é, através dela pode-se definir a elipse de uma forma diferente daquela que se apresentou anteriormente, mas que essencialmente equivale a ela.
Leia com bastante atenção.

Definição

Sejam dados uma circunferência $\mathcal{D}_1$ de centro F_1 e um ponto F_2 no seu interior.
Chama-se elipse o lugar geométrico dos **centros** das circunferências que passam por F_2 e tangenciam $\mathcal{D}_1$.

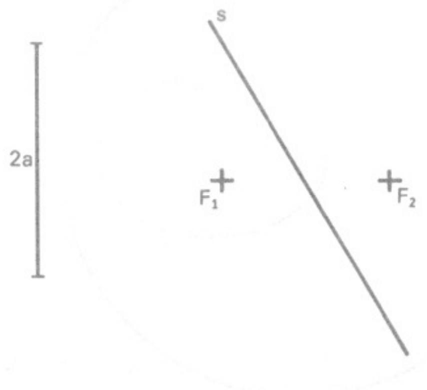




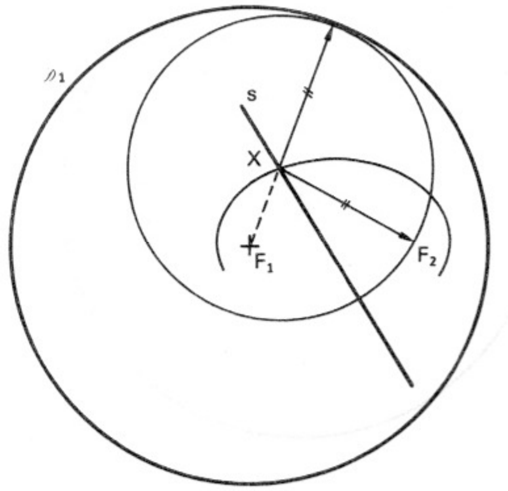
Com o auxílio dessa propriedade, podemos resolver um problema notável, a partir do qual discutiremos a tangência de reta e elipse.

Problema

Dados os focos e o comprimento **2a** do diâmetro maior de uma elipse e uma reta **s** secante à mesma, determinar os pontos de intersecção da reta com a elipse.



Suposto resolvido



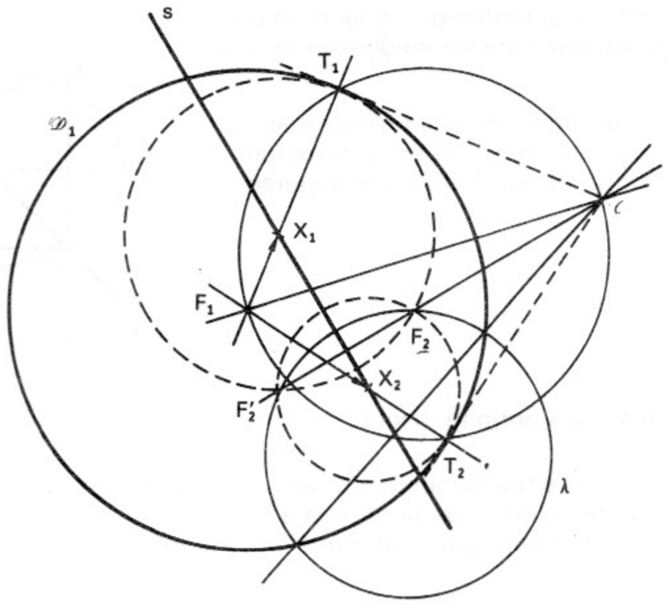
Resolução: Seja X um dos pontos de intersecção. Pela propriedade que acabamos de estabelecer, o problema pode ser "traduzido" para a seguinte forma:

Dados um ponto F_2, uma circunferência de centro F_1 e raio 2a ($\mathscr{D}_1$) e uma reta s, determinar em s o centro X de uma circunferência que passa por F_2 e tangencia $\mathscr{D}_1$.

De fato, todo ponto da elipse é centro de uma circunferência que passa por F_2 e tangencia $\mathscr{D}_1$.

Isto é, o problema da intersecção de uma reta com uma elipse é o próprio **pt 4** com a pequena diferença de que não temos que construir a circunferência de centro X, mas apenas determinar o seu centro.

Talvez seja conveniente você reestudar o **pt 4**.



De modo resumido, os pontos foram obtidos, na construção, na seguinte seqüência:

1.º) F'_2, simétrico de F_2 em relação a **s**.

2.º) $\mathscr{C}$, centro radical de $\mathscr{D}_1$ com o feixe de circunferências secantes em F_2 e F'_2.

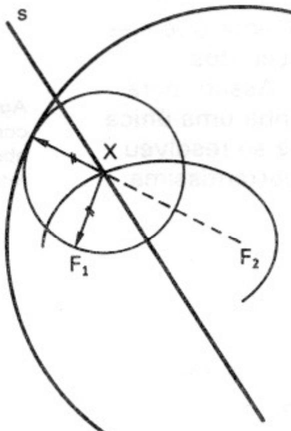
3.º) T_1 e T_2, pontos em que as retas tangentes a $\mathscr{D}_1$, conduzidas por $\mathscr{C}$, a tangenciam.

4.º) X_1 e X_2, intersecções de **s** com as retas F_1T_1 e F_1T_2.

Na construção, X_1 e X_2 são os pontos em que a reta **s** intercepta a elipse de focos F_1 e F_2.

Observação: Em vez de operarmos com $\mathscr{D}_1$, poderíamos operar com $\mathscr{D}_2$. Nesse caso, X seria o centro de uma circunferência passando por F_1 e tangenciando $\mathscr{D}_2$.

É importante que você perceba que quando se escolhe um dos focos como sendo aquele pelo qual a circunferência passa, ela será tangente à circunferência diretora relativa ao **outro** foco.



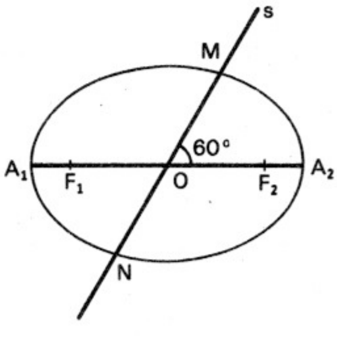
Resolva os exercícios de 134 a 136 do caderno de atividades.

Exercícios

E10.6 Numa elipse, o comprimento do diâmetro maior é $A_1A_2 = 60$ mm e a distância focal é $F_1F_2 = 40$ mm. Uma reta **s** passa pelo centro da elipse, forma um ângulo de 60° com o diâmetro maior e intercepta-a em dois pontos, M e N. (Veja a figura de apoio ao lado.) Pede-se, então:

a) Construa o diâmetro maior, os focos e a reta **s**.

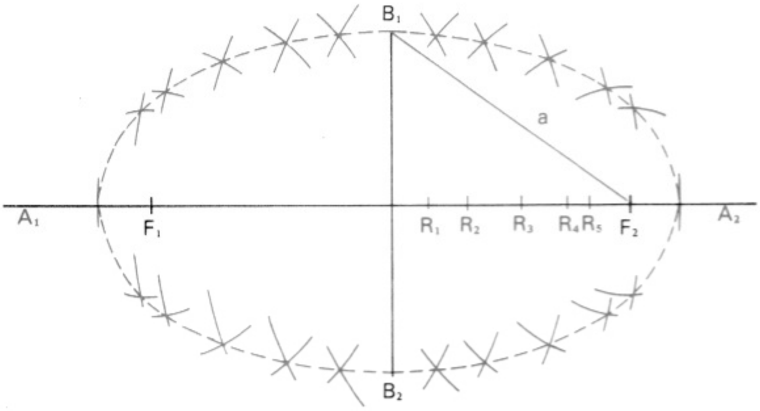
b) Determine os pontos M e N. Qual é, aproximadamente, a medida de $\overline{MN}$?



Elipse: construção por pontos e circunferências diretoras

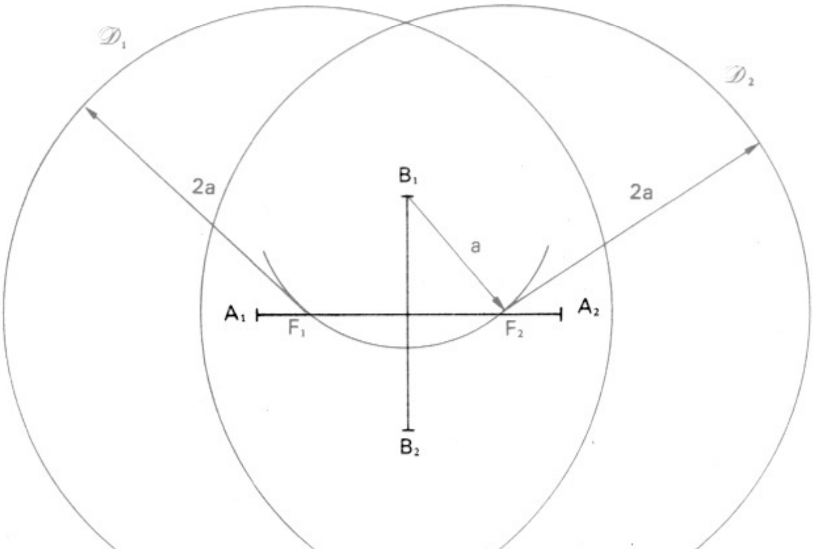
Figura auxiliar e anotações

133 Construa uma elipse, por pontos, dados os focos e o diâmetro menor.



B₁
a
A₁
F₁
R₁
R₂
R₃
R₄
R₅
F₂
A₂
B₂

134 Dados os diâmetros maior e menor de uma elipse, construa circunferências diretoras.



𝒟₁
𝒟₂
2a
2a
B₁
a
A₁
F₁
F₂
A₂
B₂

Elipse: intersecção com a reta

135 São dados os focos e o diâmetro maior de uma elipse, e uma reta **s**. Determine os pontos de intersecção da reta com a elipse.

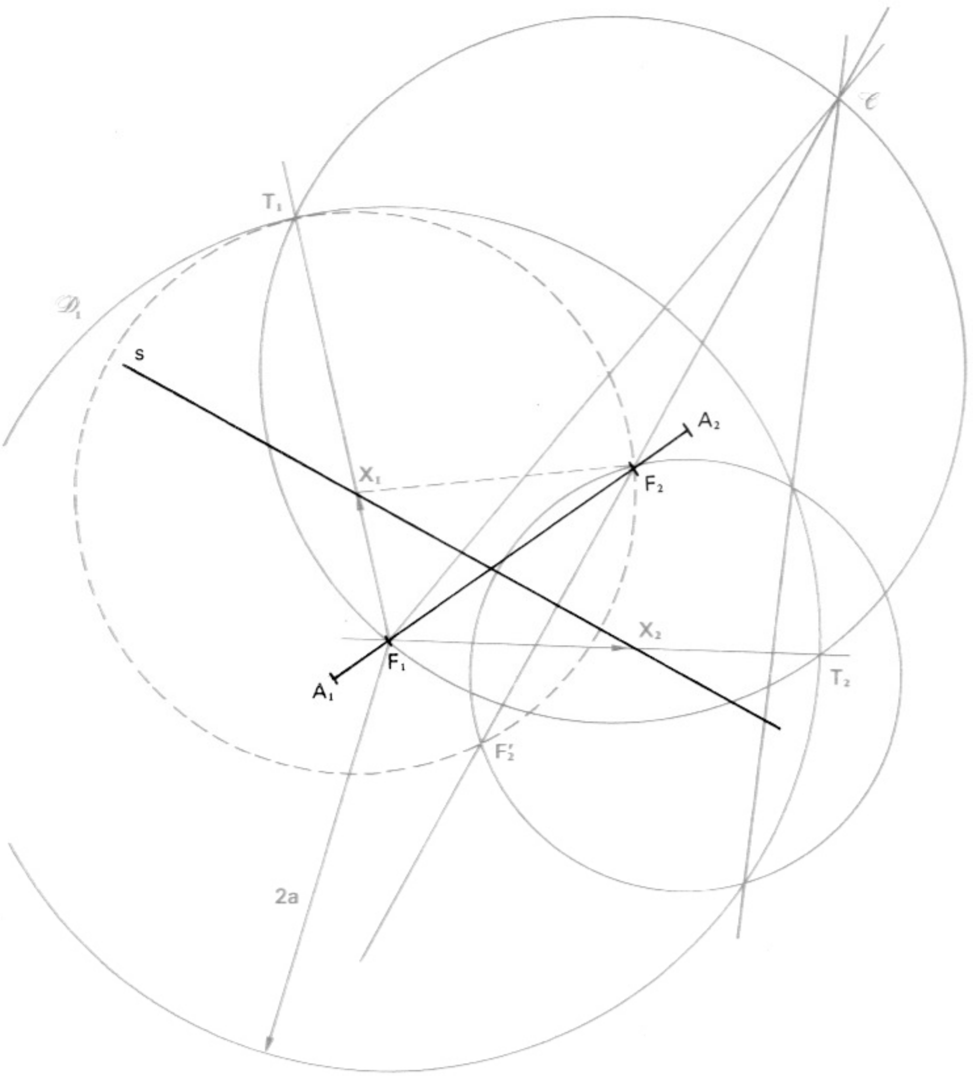


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Reforce que esse problema é o próprio pt 4.

Sugestão:
Embora não seja necessário, peça ao aluno que trace as circunferências de centros X_1 e X_2, passando por F_2, para que ele veja que elas são tangentes a $\mathscr{D}_1$. Em seguida, mostre-lhe que, por exemplo, X_1 pertence à elipse porque

$$F_1X_1 + X_1F_2 = F_1X_1 + X_1T_1$$
$$\therefore F_1X_1 + X_1F_2 = 2a$$

Elipse: intersecção com a reta

136 Determine os pontos de intersecção da reta **s** com a elipse de diâmetros maior e menor dados.

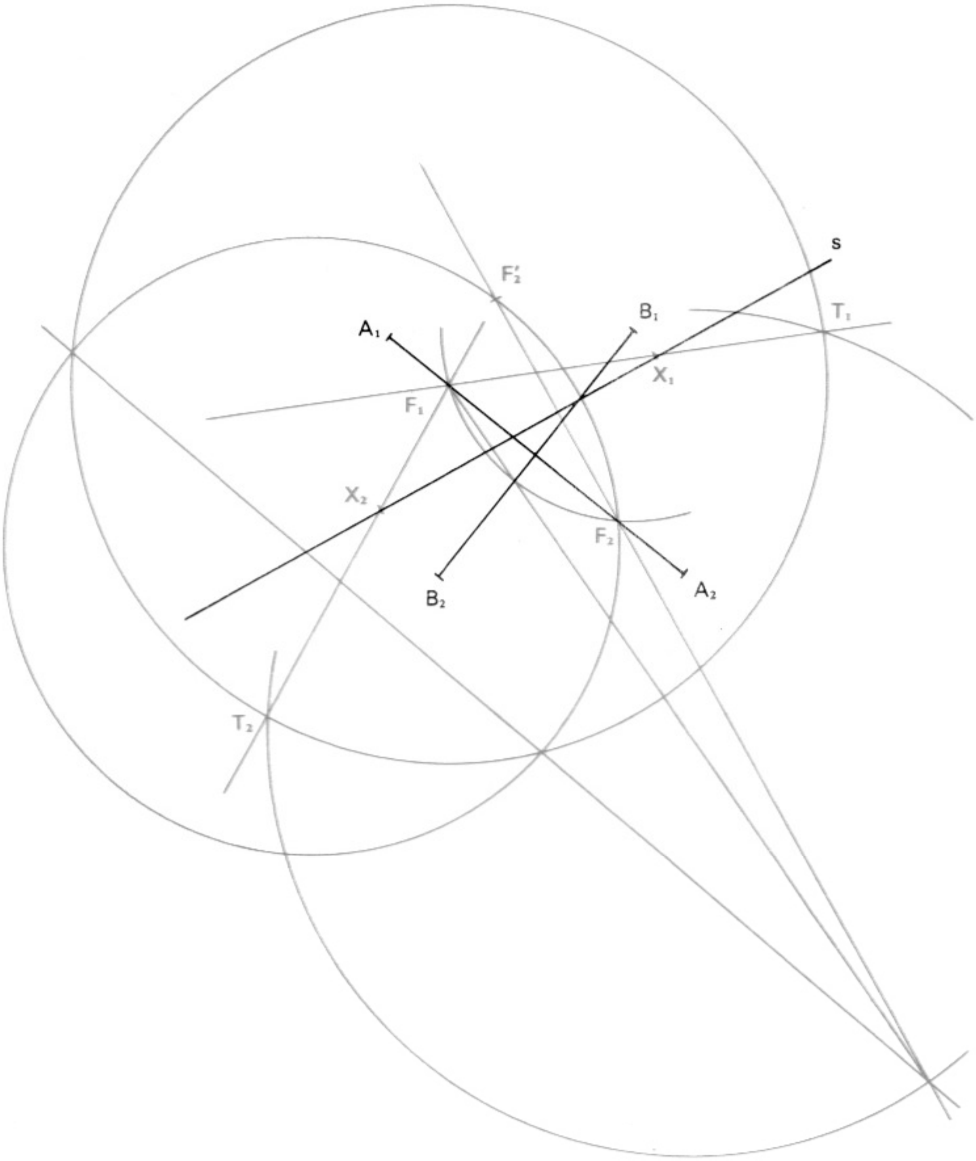
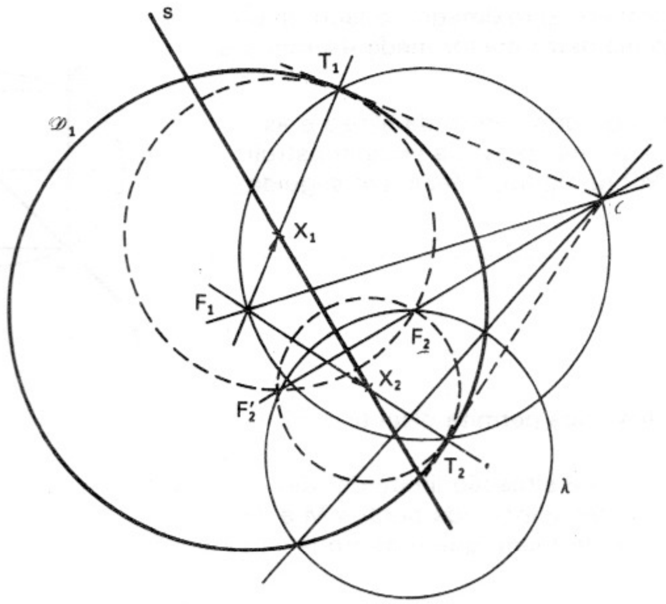


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Aproveite esse exercício para explicar ao aluno que uma reta tangente à elipse terá com ela um único ponto de intersecção. Então, mostre-lhe que o ponto de intersecção será único quando o pt 4 tiver solução única, e convide-o a voltar a estudar aquele problema.



De modo resumido, os pontos foram obtidos, na construção, na seguinte seqüência:

1.°) F_2', simétrico de F_2 em relação a **s**.

2.°) $\mathscr{C}$, centro radical de $\mathscr{D}_1$ com o feixe de circunferências secantes em F_2 e F_2'.

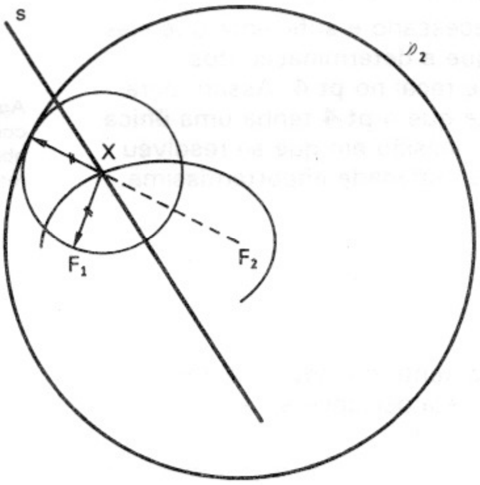
3.°) T_1 e T_2, pontos em que as retas tangentes a $\mathscr{D}_1$, conduzidas por $\mathscr{C}$, a tangenciam.

4.°) X_1 e X_2, intersecções de **s** com as retas F_1T_1 e F_1T_2.

Na construção, X_1 e X_2 são os pontos em que a reta **s** intercepta a elipse de focos F_1 e F_2.

Observação: Em vez de operarmos com $\mathscr{D}_1$, poderíamos operar com $\mathscr{D}_2$. Nesse caso, X seria o centro de uma circunferência passando por F_1 e tangenciando $\mathscr{D}_2$.

É importante que você perceba que quando se escolhe um dos focos como sendo aquele pelo qual a circunferência passa, ela será tangente à circunferência diretora relativa ao **outro** foco.



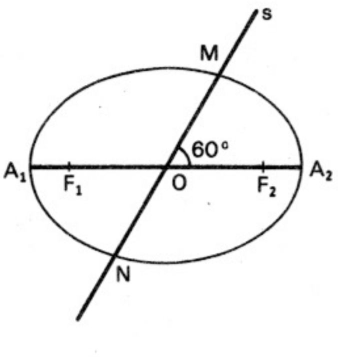
Resolva os exercícios de 134 a 136 do caderno de atividades.

Exercícios

E10.6 Numa elipse, o comprimento do diâmetro maior é $A_1A_2 = 60$ mm e a distância focal é $F_1F_2 = 40$ mm. Uma reta **s** passa pelo centro da elipse, forma um ângulo de 60° com o diâmetro maior e intercepta-a em dois pontos, M e N. (Veja a figura de apoio ao lado.) Pede-se, então:

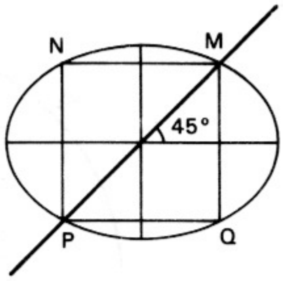
a) Construa o diâmetro maior, os focos e a reta **s**.

b) Determine os pontos M e N. Qual é, aproximadamente, a medida de $\overline{MN}$?



E10.7 Determine, graficamente, o comprimento aproximado do lado de um quadrado inscrito numa elipse cujo diâmetro menor mede **44** mm e a distância focal é igual a 36 mm.

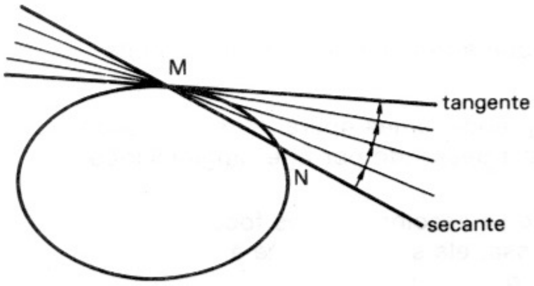
Sugestão: O centro do quadrado é o próprio centro da elipse e as diagonais formam ângulos de 45° com os eixos. Se você construir uma das diagonais, por exemplo, $\overline{MP}$ na figura, é fácil, em seguida, obter o lado do quadrado.



Tangência de reta e elipse

O problema da intersecção da reta com a elipse nos permite discutir o da tangência.

Primeiramente, perceba que a reta tangente é uma situação limite da reta secante. De fato, imagine uma reta secante a uma elipse nos pontos M e N. Agora imagine que essa reta varie sua posição, de modo que o ponto N vá se aproximando de M.



Conforme N tende a coincidir com M, a reta secante tende a tangenciar a elipse. Na situação limite, em que M e N coincidem, a reta tangencia a elipse.

Então, para que a reta seja tangente à elipse, é necessário e suficiente que elas possuam um único ponto comum. Ora, já vimos que a determinação dos pontos de intersecção de uma reta com uma elipse recai no **pt 4**. Assim, para que se tenha a tangência, é necessário e suficiente que o **pt 4** tenha uma única solução. Por outro lado, a discussão elaborada na ocasião em que se resolveu aquele problema nos permite concluir agora uma propriedade importantíssima.

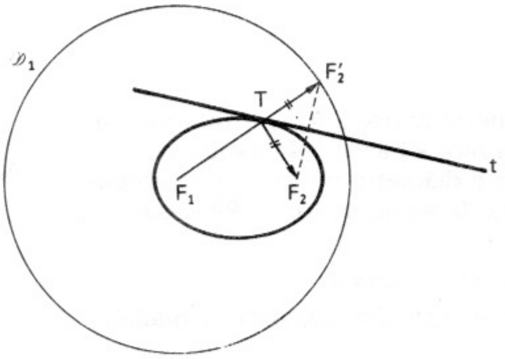
Agora, talvez seja conveniente você reler a observação feita após a resolução do **pt 4**.

Propriedade fundamental da tangência

Propriedade

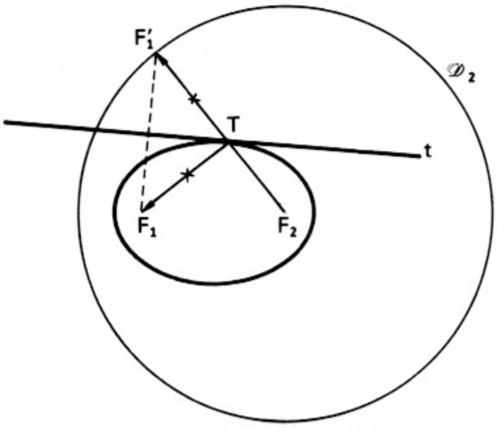
Uma reta e uma elipse são tangentes quando, e somente quando, o simétrico de qualquer dos dois focos da elipse em relação à reta pertence à circunferência diretora relativa ao **outro** foco.

O simétrico de F_2 em relação a qualquer reta tangente à elipse cai em $\mathscr{D}_1$.



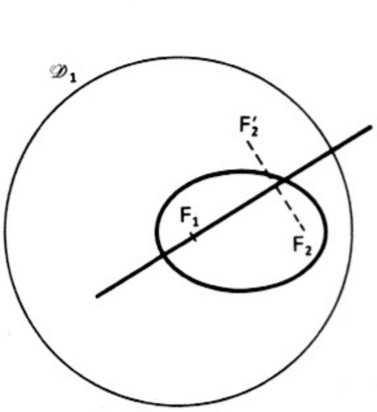
Note que **t** é a mediatriz de $\overline{F_2F_2'}$.

O simétrico de F_1 em relação a qualquer reta tangente à elipse cai em $\mathscr{D}_2$.

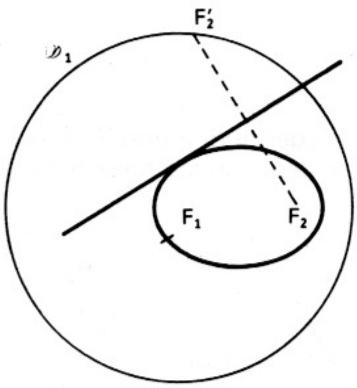

F_1'
$\mathscr{D}_2$
T
t
F_1
F_2

Note que **t** é a mediatriz de $\overline{F_1F_1'}$.

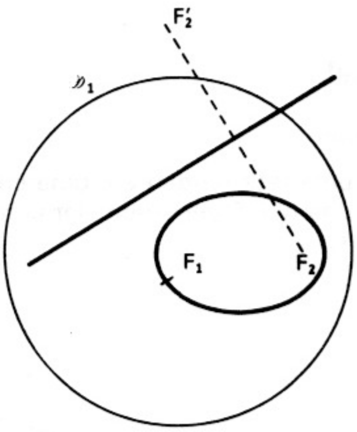
Observação: Note como se comporta o simétrico de um foco da elipse em relação a uma reta, conforme essa reta é secante, tangente ou exterior à elipse.


$\mathscr{D}_1$
F_2'
F_1
F_2

Secante: F_2' cai no interior de $\mathscr{D}_1$.


F_2'
$\mathscr{D}_1$
F_1
F_2

Tangente: F_2' cai em $\mathscr{D}_1$.


F_2'
$\mathscr{D}_1$
F_1
F_2

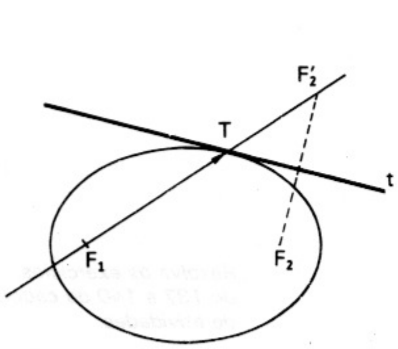
Exterior: F_2' cai no exterior de $\mathscr{D}_1$.

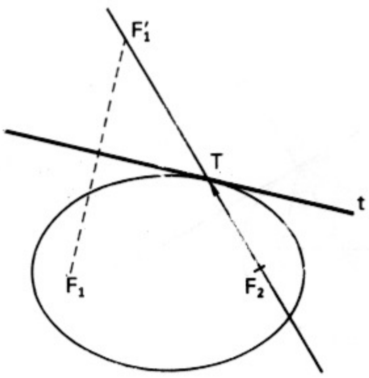
Da propriedade fundamental da tangência decorrem, de imediato, duas outras propriedades notáveis. Vejamos quais.

Propriedade

Se F_1' e F_2' são os simétricos dos focos em relação a uma tangente **t** qualquer à elipse, então as retas F_1F_2' e F_2F_1' interceptam **t** no ponto T de tangência.

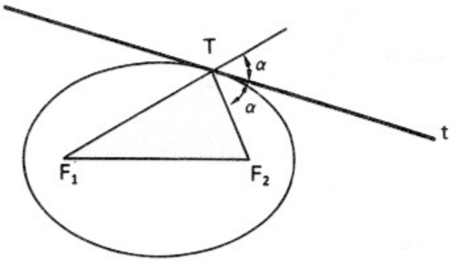
Essa propriedade será largamente empregada nas construções.





Propriedade

A reta tangente à elipse, num ponto T qualquer da mesma, contém as **bissetrizes externas** do vértice T do triângulo F_1TF_2.

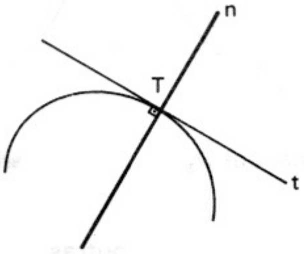


Antes de passarmos aos problemas de construção envolvendo a tangência de reta e elipse, vamos definir uma reta chamada **normal**, que está intimamente ligada à tangente.
Como a normal também será utilizada nas outras cônicas, que ainda estudaremos, convém estabelecer o seu conceito num caráter geral.

Normal

Definição

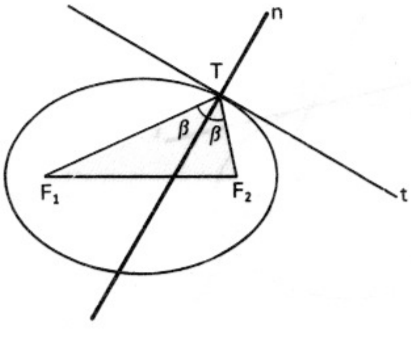
Seja **t** uma reta tangente a uma curva qualquer num ponto T. A reta **n**, conduzida por T perpendicularmente a **t**, é denominada **normal** à curva no ponto T.



Dessa definição e das propriedades já estabelecidas sobre a tangência de reta e elipse, é de imediata demonstração a propriedade seguinte:

Propriedade

A normal a uma elipse num ponto T contém a bissetriz interna do vértice T do triângulo F_1TF_2.



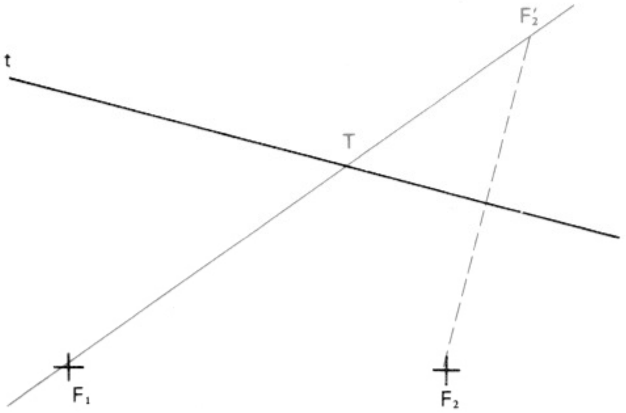
Resolva os exercícios de 137 a 140 do caderno de atividades.

Elipse: tangência

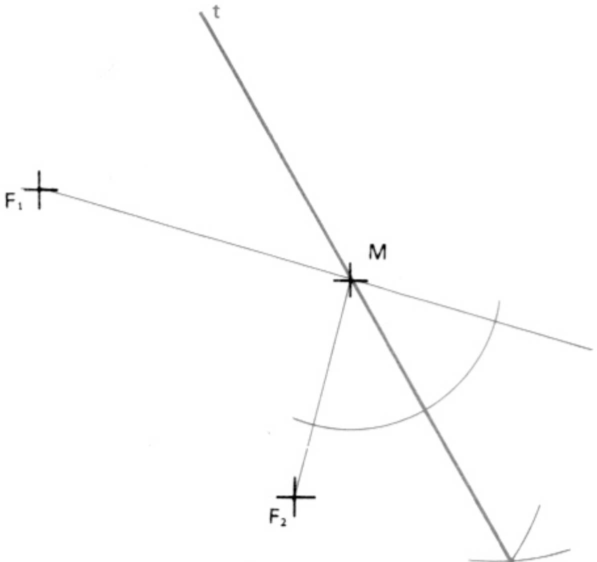
Figura auxiliar e anotações

137 Dados os focos de uma elipse e uma tangente a ela, determine o ponto de tangência.

Observação:
Reforce o fato de que também se pode determinar o ponto T unindo F_2 ao simétrico de F_1 em relação a **t**.



138 O ponto M pertence a uma elipse de focos F_1 e F_2. Construa a reta tangente à elipse no ponto M.



Elipse: tangência (normal)

139 São dados um ponto M de uma elipse e seus focos. Construa a normal à elipse no ponto M.

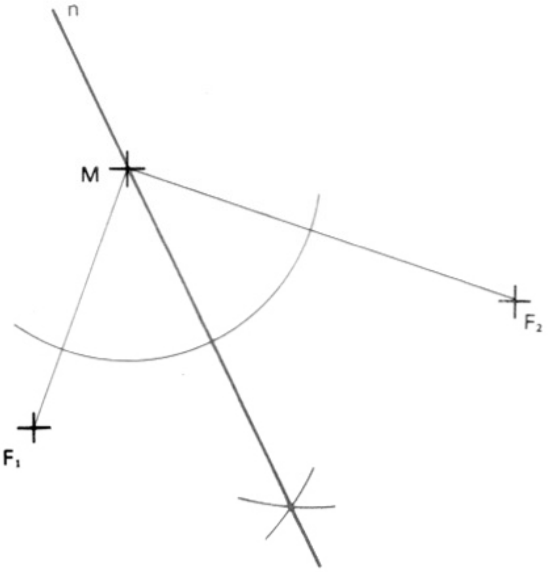
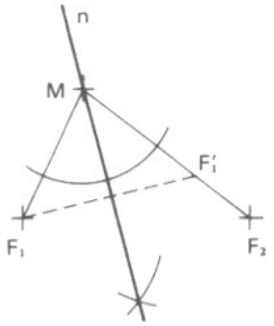


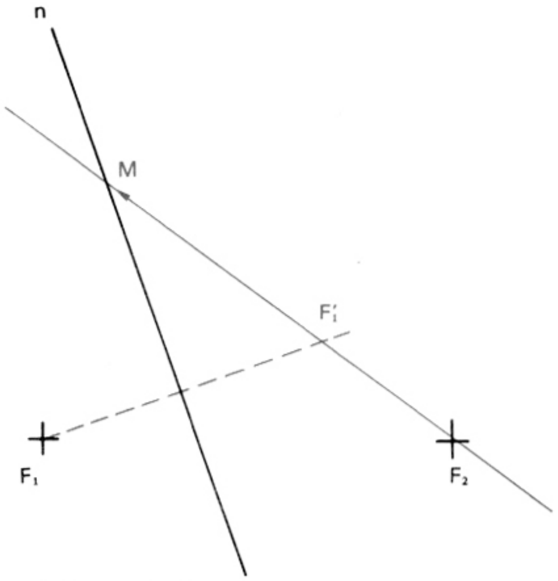
Figura auxiliar e anotações

Observação:
Mostre ao aluno que o simétrico de F_1 em relação a **n** cai na reta F_2M. Assim ele terá uma "dica" para resolver o próximo problema.



140 São dados os focos de uma elipse e uma normal a ela num ponto M desconhecido. Determine o ponto M.

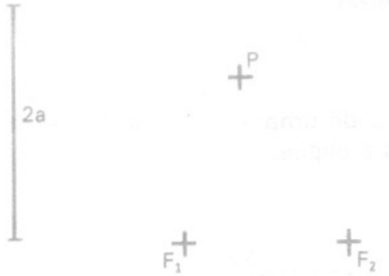
Sugestão: Lembre-se de que o simétrico de um ponto qualquer do lado de um ângulo em relação à bissetriz cai no outro lado desse ângulo.



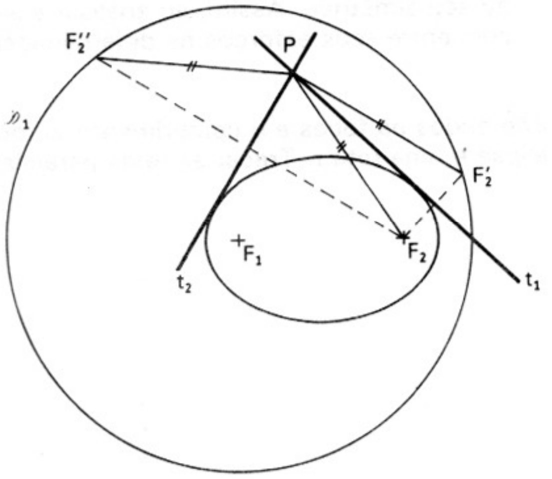
1.º) F'_1, simétrico de F_1 em relação a **n**.
2.º) Reta $F_2F'_1$.

Exercícios

E10.8 São dados os focos e o comprimento 2a do diâmetro maior de uma elipse e um ponto P externo a ela. Conduza por P as retas tangentes à elipse e determine os pontos de tangência.



Suposto resolvido



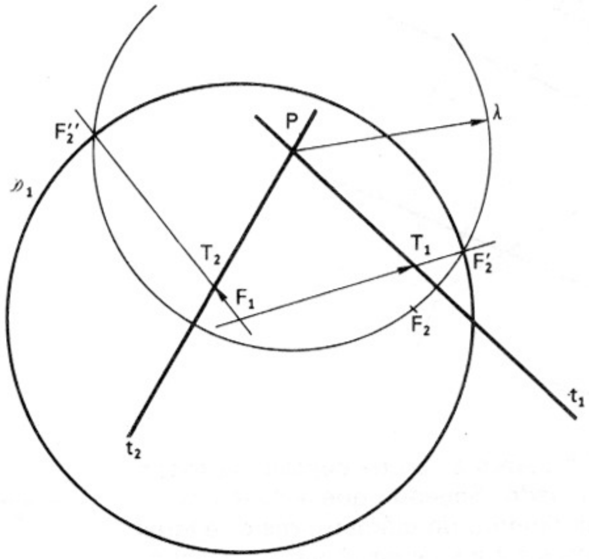
Resolução: Vamos imaginar o problema já resolvido e sejam t_1 e t_2 as retas procuradas. Ora, os simétricos de F_2 em relação às retas t_1 e t_2 caem em $\mathscr{D}_1$. Sendo F_2' e F_2'' esses simétricos, então t_1 e t_2 são as mediatrizes de $\overline{F_2F_2'}$ e $\overline{F_2F_2''}$. Daí, é fácil concluir que F_2, F_2' e F_2'' são eqüidistantes de P. Assim, a construção seguinte se justifica.

1.º) Traça-se $\mathscr{D}_1$.

2.º) Traça-se a circunferência λ de centro P passando por F_2, a qual intercepta $\mathscr{D}_1$ em F_2' e F_2''.

3.º) As mediatrizes de $\overline{F_2F_2'}$ e $\overline{F_2F_2''}$ são as retas t_1 e t_2 procuradas.

4.º) As retas F_1F_2' e F_1F_2'' em t_1 e t_2 os pontos de tangência.



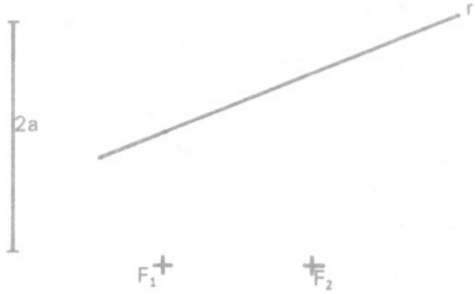
Note que, para traçar a mediatriz de $\overline{F_2F_2'}$, é preciso, apenas, construir um ponto dela, já que o outro é o próprio ponto P. O mesmo vale para $\overline{F_2F_2''}$.

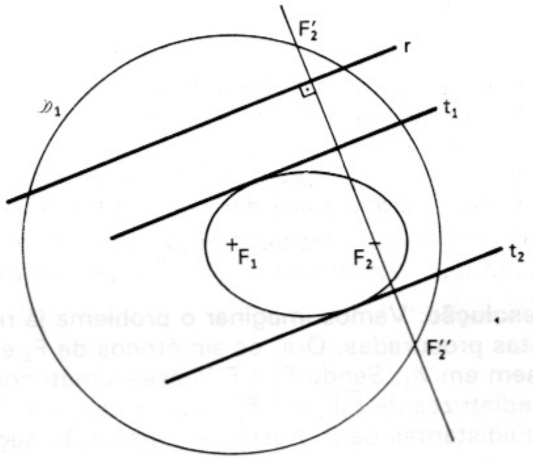
Observações:

- Doravante, para os problemas que pedirem o traçado de uma reta tangente a uma elipse, já fica subentendido que se quer também o ponto de tangência, a menos, evidentemente, que o mesmo já tenha sido dado. Tal convenção vale, desde já, para as cônicas que ainda iremos estudar.
- É muito importante que você perceba que o traçado de uma tangente a uma elipse fica solucionado quando se obtém o simétrico do foco em relação à tangente, pois a reta procurada é sempre a mediatriz do segmento que tem extremidades no foco e no seu simétrico. Assim, ao analisar esse tipo de problema, concentre seus esforços na determinação do simétrico.

E10.9 São dados os focos e o comprimento 2a do diâmetro maior de uma elipse e uma reta **r**. Traçar as retas paralelas a **r** tangentes à elipse.

◁ IMPORTANTE

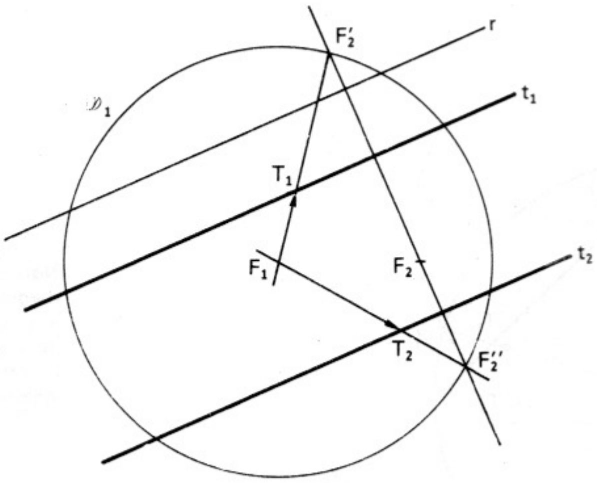




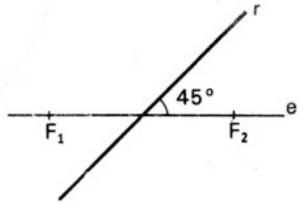
Resolução: A resolução é imediata, pois a reta conduzida por $\mathbf{F_2}$ perpendicularmente a **r** intercepta $\mathcal{D}_1$ nos pontos F_2' e F_2'', simétricos de F_2 em relação às tangentes t_1 e t_2 procuradas.

Lembre-se de que:

- t_1 e t_2 são as mediatrizes de $\overline{F_2F_2'}$ e $\overline{F_2F_2''}$.
- As retas F_1F_2' e F_1F_2'' interceptam t_1 e t_2 nos pontos T_1 e T_2 de tangências.

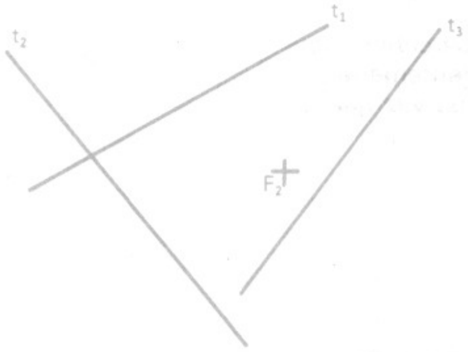


E10.10 Uma reta **r** forma um ângulo de 45° com o eixo que contém os focos de uma elipse, conforme a figura ao lado. Sabendo que a distância focal é igual a 30 mm e que o comprimento do diâmetro maior é igual a 50 mm, construa as retas tangentes à elipse e paralelas a **r**. Qual é, aproximadamente, a distância entre os pontos de tangência?

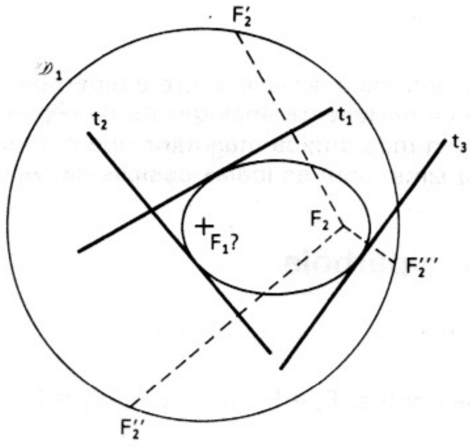


E10.11 Dadas três retas tangentes a uma elipse e um dos focos, determinar o outro foco.

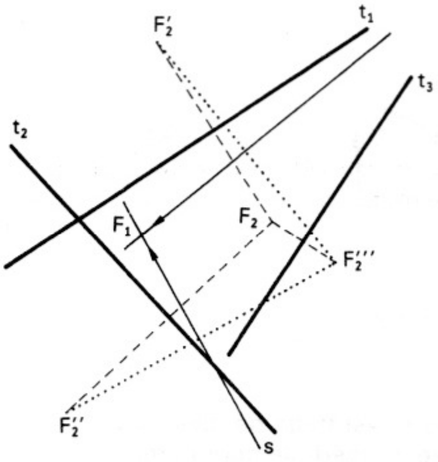
◅ IMPORTANTE



Suposto resolvido



Resolução: Observe a figura onde já se supõe o problema resolvido e seja F_1 o foco procurado. Ora, os simétricos de F_2 em relação às tangentes dadas caem em $\mathscr{D}_1$, cujo centro é F_1. Então, determinando esses simétricos, o problema passa a ser **"determinar o centro F_1 de uma circunferência que passa pelos pontos F_2', F_2'' e F_2''' conhecidos"**. Considerando os três segmentos que têm extremidades nesses simétricos, determina-se F_1 na intersecção das mediatrizes de dois deles quaisquer.



As retas **r** e **s** são as mediatrizes de $\overline{F_2'F_2'''}$ e $\overline{F_2''F_2'''}$, respectivamente.

Observação: Diz-se que a elipse está inscrita no triângulo quando os lados do mesmo são tangentes a ela.

E10.12 Uma elipse está inscrita num triângulo cujos lados medem 80 mm, 70 mm e 93 mm. Sabendo que um dos focos dessa elipse é o ortocentro do triângulo, determine o outro foco. Qual é, aproximadamente, a distância focal?

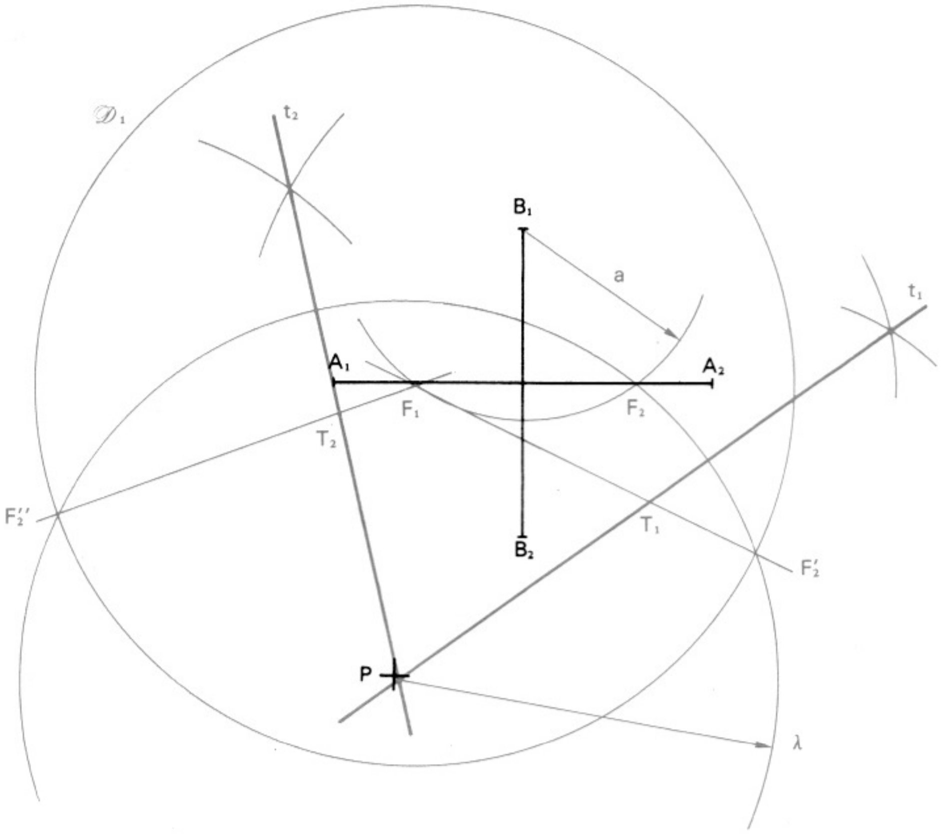
Resolva os exercícios de 141 a 143 do caderno de atividades.

Elipse: tangência de reta

141 São dados os diâmetros maior e menor de uma elipse e um ponto P externo a ela. Construa as retas que passam por P e tangenciam a elipse.

Observação: Não esqueça de determinar os pontos de tangência.

Sugestão: Determinando os focos, você recai no E 10.8.

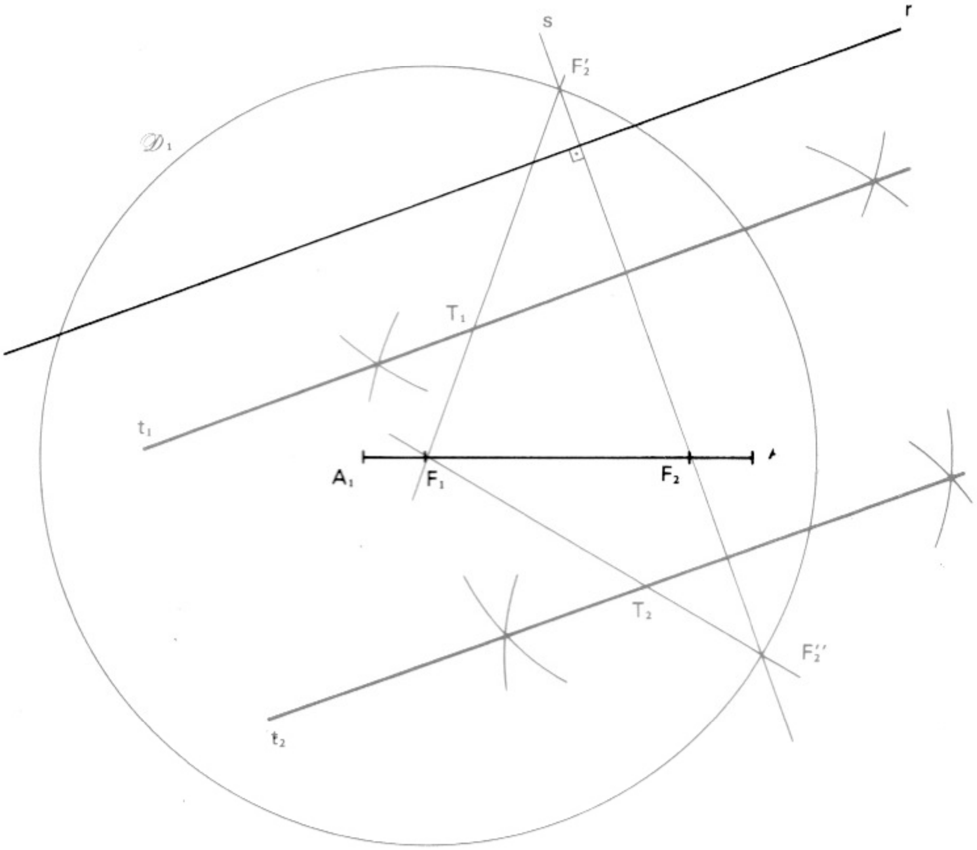


1.º) F_1 e F_2
2.º) $\mathscr{D}_1$
3.º) λ, raio $\overline{PF_2}$ determinando F_2' e F_2''.
4.º) t_1 e t_2, mediatrizes de $\overline{F_2F_2'}$ e $\overline{F_2F_2''}$.
5.º) Retas F_1F_2' e F_1F_2'', determinando T_1 e T_2.

Elipse: tangência

142 São dados o diâmetro maior e os focos de uma elipse e uma reta **r**. Construa as retas tangentes à elipse e paralelas à reta **r**.

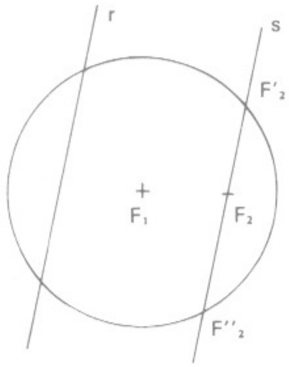
Observação: É o próprio E 10.9.



1.º) $\mathscr{D}_1$
2.º) **s** ⊥ **r**, determinando F_2' e F_2'' em $\mathscr{D}_1$.
3.º) t_1 e t_2, mediatrizes de $\overline{F_2F_2'}$ e $\overline{F_2F_2''}$.
4.º) Retas F_1F_2' e F_1F_2'', determinando T_1 e T_2.

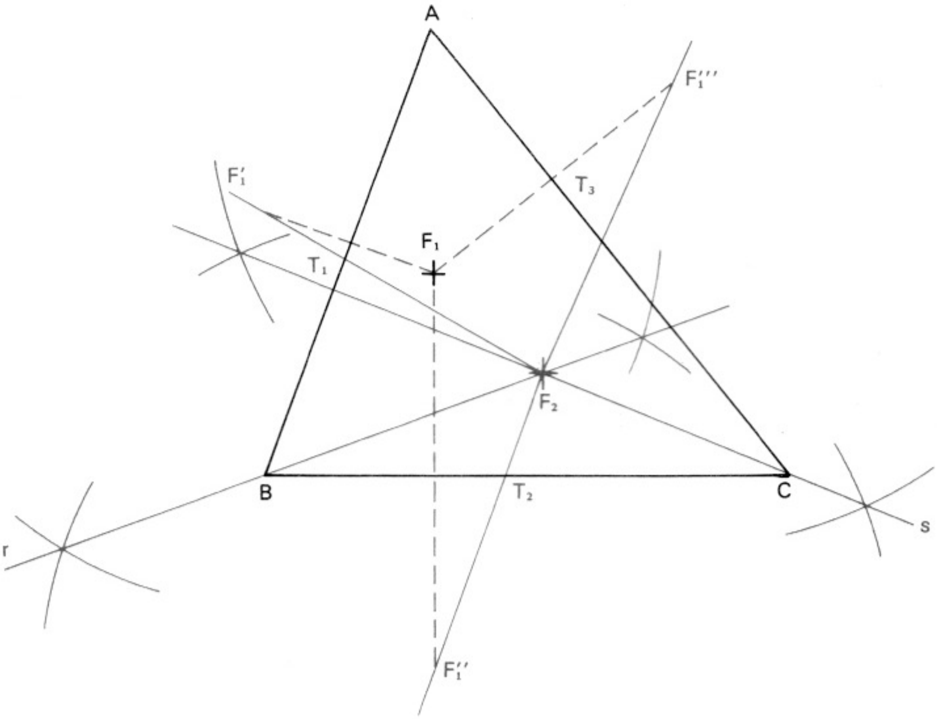
Figura auxiliar e anotações

Sugestão:
Proponha um problema em que as retas tangentes procuradas sejam perpendiculares à reta **r** dada. Nesse caso, determinam-se F_2' e F_2'' em $\mathscr{D}_1$ traçando-se **s** por F_2 paralela à reta **r**.



Elipse: tangência de reta

143 O ponto F_1 é um dos focos de uma elipse inscrita no triângulo ABC. Determine o outro foco.
Observação: É o próprio E 10.11.



1.°) F_1', F_1'' e F_1''', simétricos de F_1 em relação aos lados.
2.°) **r** e **s**, mediatrizes de $F_1'F_1''$ e $F_1''F_1'''$.
3.°) Retas F_2F_1', F_2F_1'' e F_2F_1''', determinando T_1, T_2 e T_3.

11

Hipérbole

No estudo que passaremos a realizar sobre a hipérbole, você vai perceber que as propriedades são inteiramente análogas às da elipse. Isso, evidentemente, torna o estudo da segunda cônica mais fácil que o da primeira, uma vez que você já está familiarizado com as idéias básicas da teoria.

O conceito de hipérbole

Definição

Considerem-se dois pontos, F_1 e F_2, tais que $F_1F_2 = 2c$, e uma distância 2a, de modo que $2a < 2c$.

Chama-se **hipérbole** o lugar geométrico dos pontos cujas diferenças das distâncias a F_1 e F_2 são constantes e iguais a 2a.

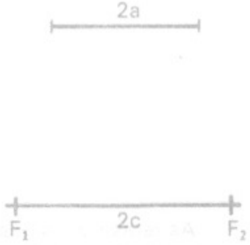
Observe que a definição acima significa que:

1.º) Se M é um ponto da hipérbole, então:

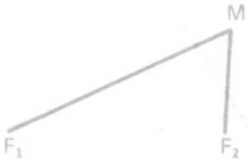
$$\boxed{|MF_1 - MF_2| = 2a}$$

O emprego do módulo na diferença $MF_1 - MF_2$ tem a finalidade de enquadrar os casos em que $MF_1 > MF_2$ e aqueles em que $MF_1 < MF_2$.

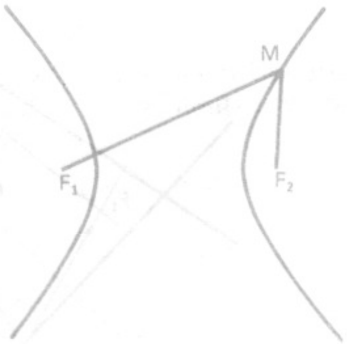
2.º) Todo ponto M que satisfaz a condição $|MF_1 - MF_2| = 2a$ pertence à hipérbole.



$2a < 2c$



$|MF_1 - MF_2| = 2a$



Observação: Note que uma hipérbole é uma figura constituída de dois ramos. Assim, quando no início deste capítulo mostrou-se a hipérbole como uma secção de um cone, a curva ali representada era apenas um ramo da hipérbole.

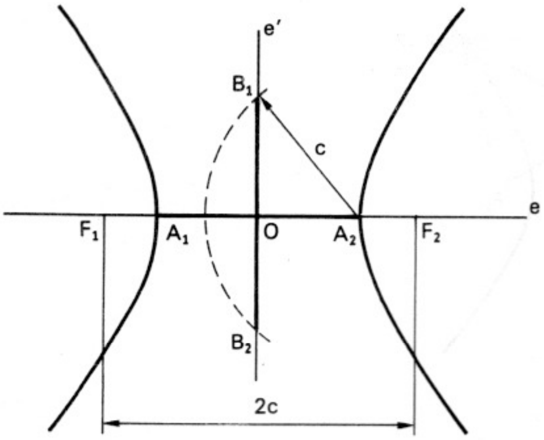
Alguns elementos da hipérbole

- **Focos:** São os pontos F_1 e F_2.
- **Distância focal:** É a distância dos focos, a qual, pela definição, é igual a 2c.
- **Diâmetro principal:** A reta conduzida pelos focos intercepta a hipérbole nos pontos A_1 e A_2. Os segmentos A_1A_2 é o diâmetro principal.
- **Vértices:** São os pontos A_1 e A_2, extremidades do diâmetro principal.
- **Eixo real ou transverso:** É a reta que contém os focos.
- **Eixo imaginário ou não-transverso:** É a mediatriz de $\overline{F_1F_2}$.
- **Centro:** É o ponto O, médio de $\overline{F_1F_2}$. (Note que O é o ponto de intersecção dos eixos.)

É fundamental que você se familiarize bem com a definição de hipérbole e com esses primeiros elementos. Se necessário, releia tudo com bastante atenção.

- **Diâmetro imaginário**: No eixo imaginário existem dois pontos, B_1 e B_2, cujas distâncias aos vértices são iguais a **c**. O segmento B_1B_2 é o diâmetro imaginário.

Resumindo

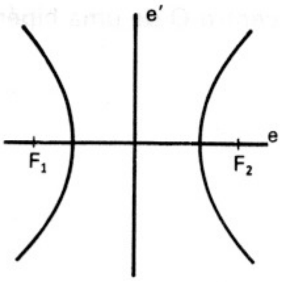


Focos: F_1 e F_2
Distância focal: $F_1F_2 = 2c$
Diâmetro principal: $\overline{A_1A_2}$
Diâmetro imaginário: $\overline{B_1B_2}$
Vértices: A_1 e A_2
Centro: O
Eixo real: e
Eixo imaginário: e'

Eixos de simetria

Propriedade

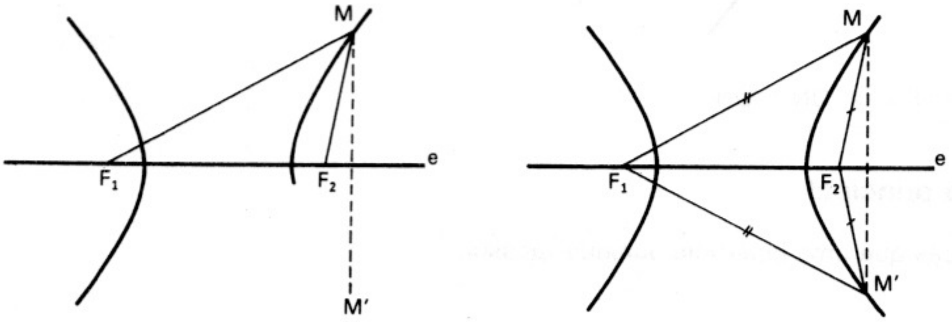
Em qualquer hipérbole os eixos real e imaginário são eixos de simetria.



Vamos demonstrar que o eixo real (e) é um eixo de simetria. Para tanto, temos que provar que:

Se M **pertence a uma hipérbole, então o seu simétrico** M' **em relação a** e **também pertence a essa hipérbole.**

☐ **Demonstração**:



Como M pertence à hipérbole por hipótese, temos:

$$\boxed{|MF_1 - MF_2| = 2a} \quad (1)$$

Mas sendo M' o simétrico de M em relação a **e**, conclui-se que:

$$\begin{cases} M'F_1 = MF_1 \\ M'F_2 = MF_2 \end{cases}$$

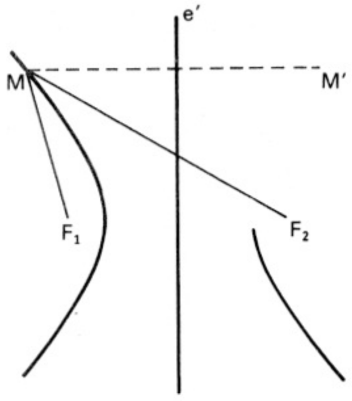
Então, $|M'F_1 - M'F_2| = |MF_1 - MF_2|$

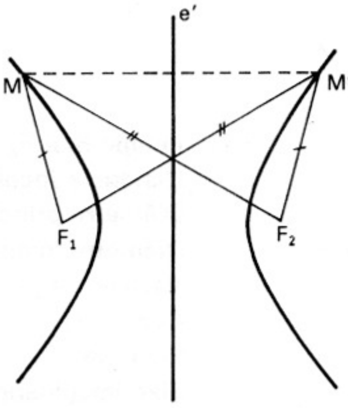
Isto é, $\boxed{|M'F_1 - M'F_2| = 2a}$

A última igualdade mostra que M' pertence à hipérbole. ■ c.q.d.

Analogamente se demonstra que o eixo imaginário também é um eixo de simetria. Isto é:

Se M **pertence a uma hipérbole, então o seu simétrico** M′ **em relação ao eixo imaginário (**e′**) também pertence a essa hipérbole.**



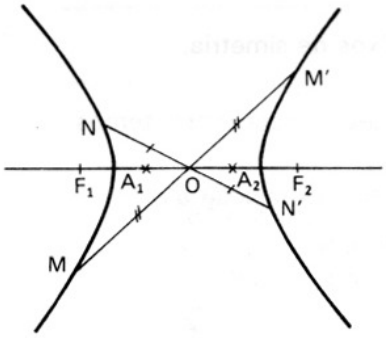


Centro de simetria

Propriedade

O centro O de uma hipérbole qualquer é um centro de simetria da mesma.

A demonstração dessa propriedade é inteiramente análoga à que foi feita para a elipse. Por isso, ela será omitida para a hipérbole.

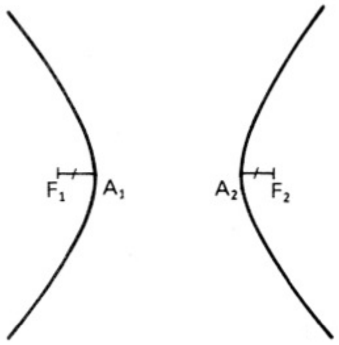


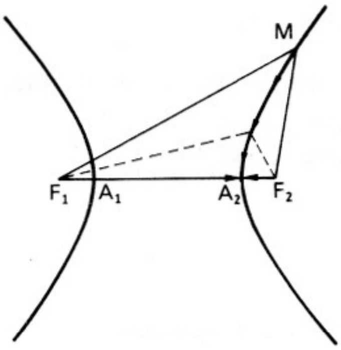
OM = OM′ e ON = ON′

O comprimento do diâmetro principal

A partir das propriedades simétricas que uma hipérbole qualquer possui, deduz-se de imediato que:

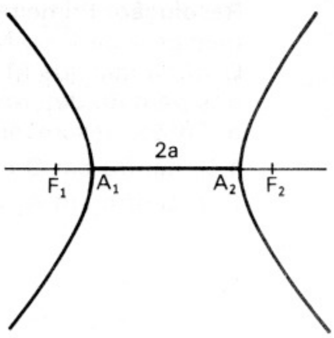
$$\boxed{A_1F_1 = A_2F_2}$$





Por outro lado, como A_2 pertence à hipérbole, temos:

$$\boxed{|A_2F_1 - A_2F_2| = 2a}$$



Substituindo A_2F_2 por A_1F_1 nesta última igualdade, vem:

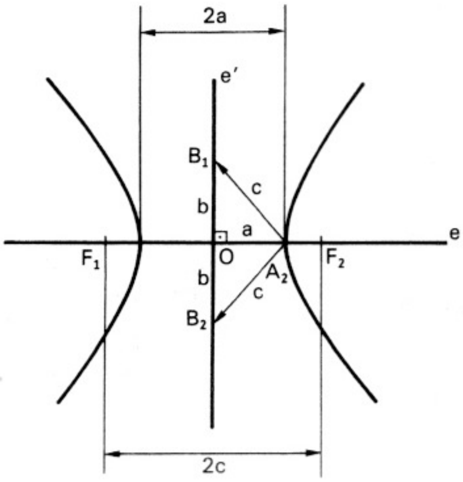
$$|A_2F_1 - A_1F_1| = 2a$$

$$\therefore \quad \boxed{A_1A_2 = 2a}$$

Isto é, o comprimento do diâmetro principal de uma hipérbole é igual a 2a.

Observação: Vamos convencionar que o comprimento do diâmetro imaginário de uma hipérbole é $B_1B_2 = 2b$.

Resumindo



Eixos de simetria: e, e'
Centro de simetria: O
$A_1A_2 = 2a$
$B_1B_2 = 2b$

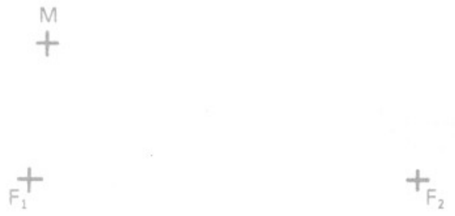
Observação: Convém você notar que, a exemplo do que ocorre na elipse, também na hipérbole os elementos **a**, **b** e **c** constituem os lados de um triângulo retângulo. Porém, aqui, a hipotenusa é **c** e os catetos são **a** e **b**.

Pelo teorema de Pitágoras, podemos escrever:

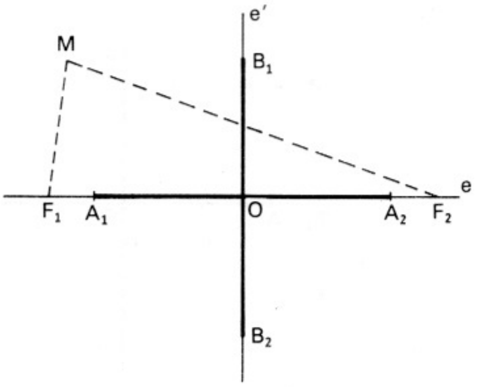
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Exercícios

E11.1 Construa os diâmetros principal e imaginário de uma hipérbole, dados os focos e um ponto M a ela pertencente.

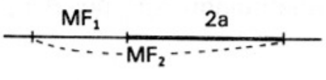


Suposto resolvido

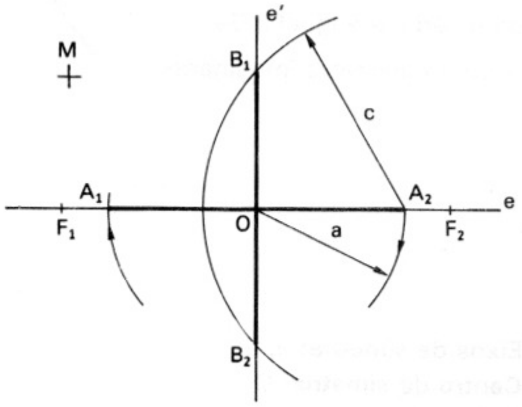


Resolução: Primeiramente traçamos o eixo **e** por F_1 e F_2, e o eixo e', mediatriz de $\overline{F_1F_2}$. Na intersecção dos eixos fica determinado o centro O. Uma vez que M pertence à hipérbole, temos $MF_2 - MF_1 = 2a$. Isso nos permite determinar o semidiâmetro principal, cujo comprimento é **a**. Então, descrevemos as seguintes circunferências:

1.º) centro em O e raio **a**, determinando A_1 e A_2 em **e**;
2.º) centro em A_2 (ou A_1) e raio **c**, determinando B_1 e B_2 em e'.



$MF_2 - MF_1 = 2a$



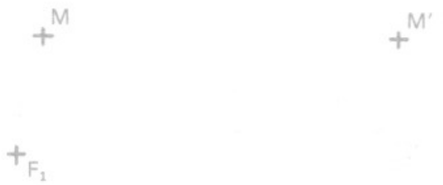
$\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ são os diâmetros procurados.

E11.2 Determine graficamente o diâmetro imaginário de uma hipérbole em que o diâmetro principal é $2a = 30$ mm e a distância focal é $2c = 78$ mm. Qual é o comprimento do diâmetro imaginário?

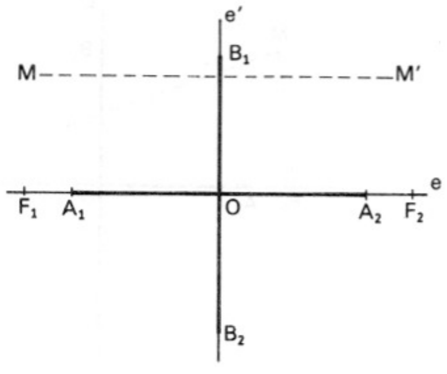
E11.3 Os diâmetros principal e imaginário de uma hipérbole medem, respectivamente, 63 mm e 60 mm. Qual é a distância focal? (Resolva graficamente.)

E11.4 Numa hipérbole, o diâmetro imaginário e a distância focal são, respectivamente, $2b = 40$ mm e $2c = 85$ mm. Obtenha graficamente o diâmetro principal. Qual é a sua medida?

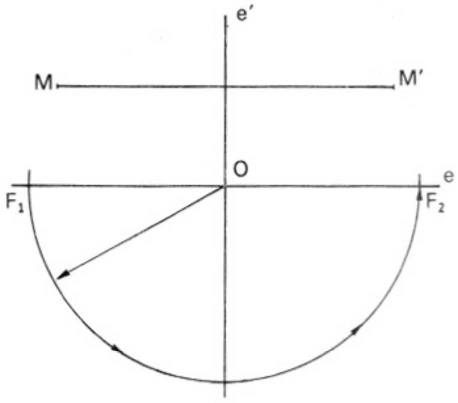
E11.5 De uma hipérbole são dados um foco e dois de seus pontos, M e M', simétricos em relação ao eixo imaginário. Construa os diâmetros principal e imaginário.



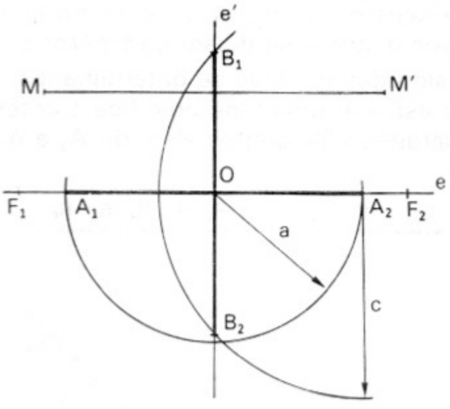
Suposto resolvido



Resolução: Primeiro traçamos o eixo imaginário (e'), pois ele é a mediatriz de $\overline{MM'}$. Depois, por F_1 e perpendicularmente a e', traçamos o eixo real (e), que intercepta e' em O. Então, é fácil determinar F_2 em **e**, pois $OF_1 = OF_2$ e, uma vez conhecidos F_1, F_2 e um ponto M (ou M') da hipérbole, recaímos no E11.1.



Determinando F_2...



... recaímos no E11.1.

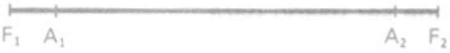
Resolva os exercícios de 144 a 147 do caderno de atividades.

Construção da hipérbole por pontos

Assim como a elipse, a hipérbole não pode ser traçada usando apenas régua e compasso. Mas, ela também pode ser construída por pontos, isto é, é possível determinar tantos pontos de uma hipérbole quantos se quiser. Passemos ao estudo dessa construção.

Problema

Construir uma hipérbole por pontos, dados os focos e o diâmetro principal.



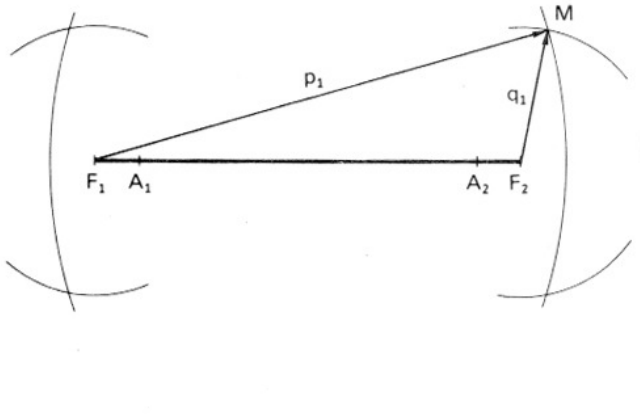
Resolução:

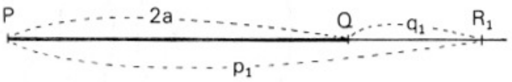
1.º) Sobre uma reta arbitrária, toma-se o segmento PQ de comprimento 2a. ($2a = A_1A_2$).

2.º) Sobre o prolongamento de $\overline{PQ}$ toma-se um ponto R_1 arbitrário. Sejam $p_1 = PR_1$ e $q_1 = QR_1$.

3.º) Com centros em F_1 e F_2 descrevem-se arcos de raios iguais a p_1 e q_1.

Os quatro pontos de intersecção dos arcos de raios diferentes pertencem à hipérbole.

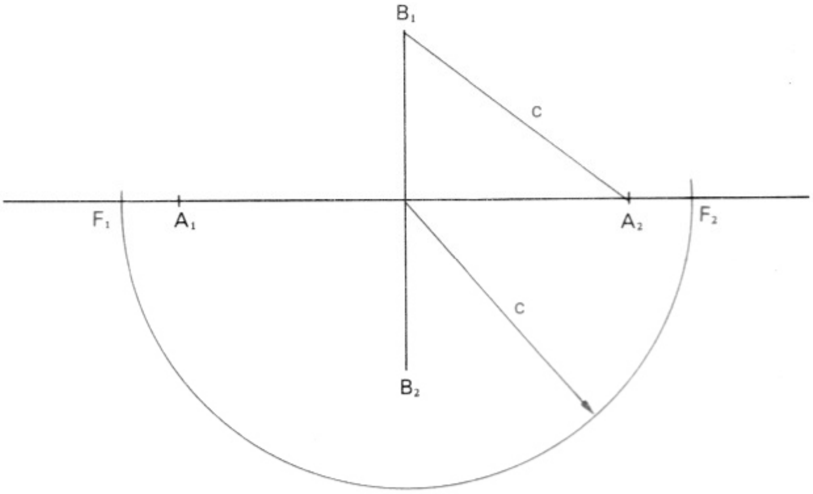




$p_1 - q_1 = 2a$

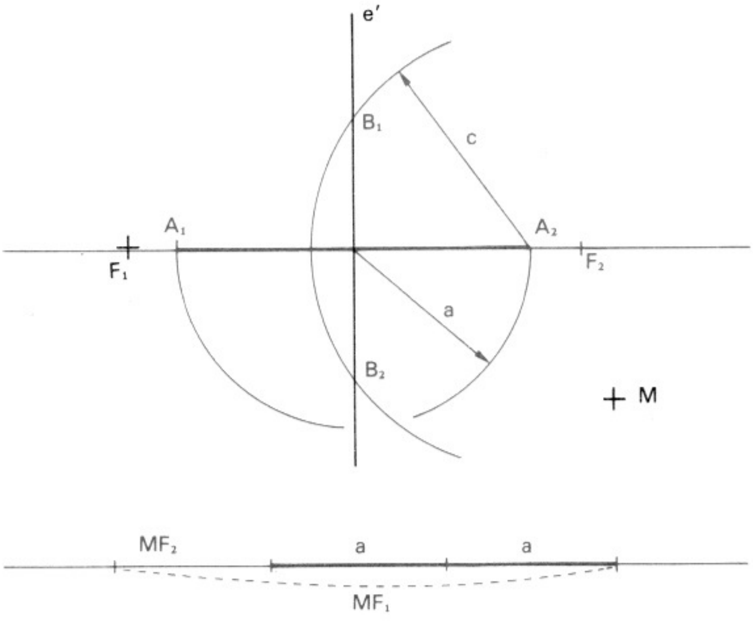
Hipérbole: elementos

144 Obtenha os focos de uma hipérbole, dados os diâmetros principal e imaginário.


B₁
c
F₁
A₁
A₂
F₂
c
B₂

145 São dados um foco F_1, o eixo imaginário **e'** e um ponto M de uma hipérbole. Construa os diâmetros principal e imaginário.
Sugestão: Após determinar F_2, lembre-se de que $MF_1 - MF_2 = 2a$.

Observação:
Aproveite esse exercício para reforçar a definição de hipérbole.

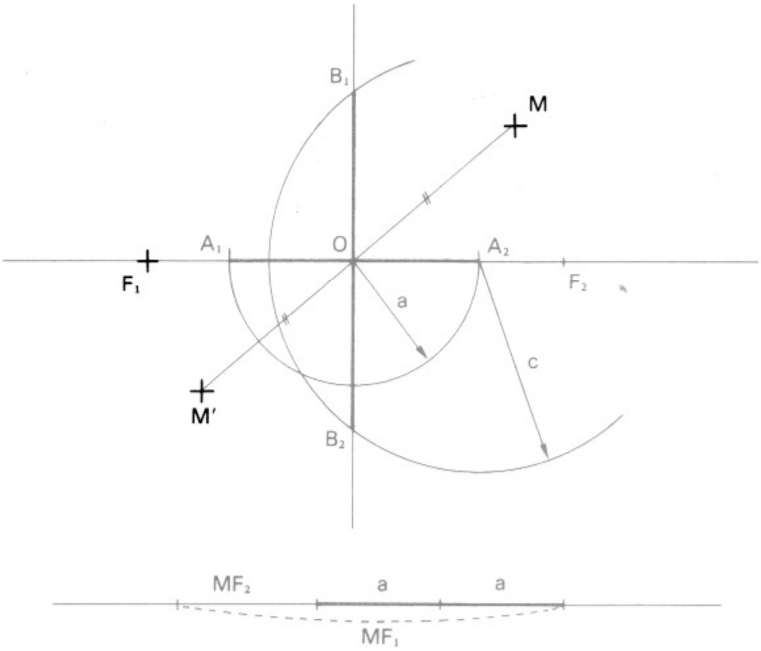

e'
B₁
c
A₁
A₂
F₁
F₂
a
B₂
M
MF₂
a
a
MF₁

Hipérbole: elementos

Figura auxiliar e anotações

146 De uma hipérbole são dados dois pontos M e M′ simétricos em relação ao centro e um foco F_1. Construa os diâmetros principal e imaginário.

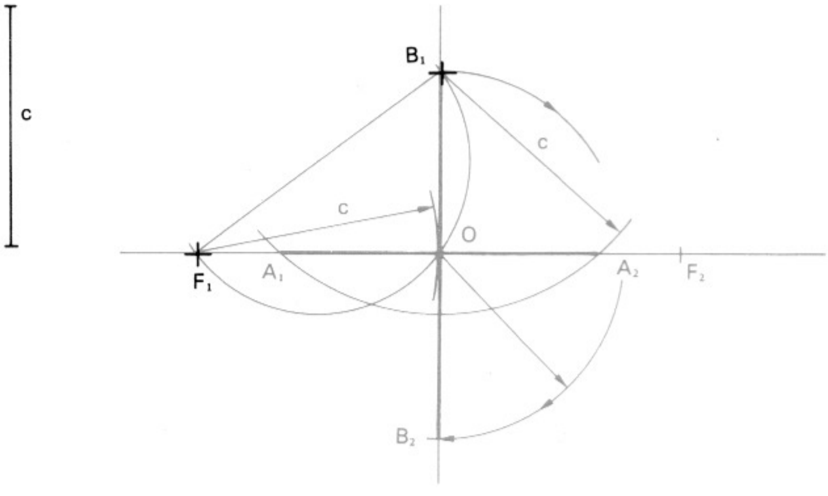
Sugestão: O centro da hipérbole é o ponto médio de $\overline{MM'}$. Isso permite traçar o eixo real e determinar F_2.



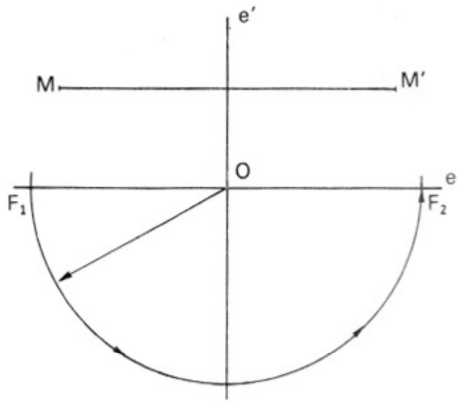
147 De uma hipérbole são dados um foco F_1, uma extremidade B_1 do diâmetro imaginário e a semidistância focal **c**. Obtenha o outro foco e construa os diâmetros principal e imaginário.

Sugestão: O centro O da hipérbole enxerga $\overline{F_1B_1}$ segundo um ângulo reto.

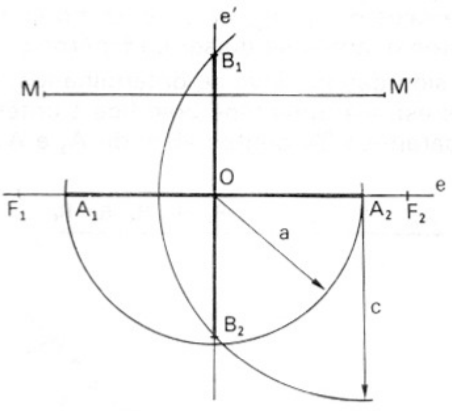
Observação:
A exemplo do que já ocorreu no exercício 128, de elipses, esse problema admite uma segunda solução, pois o centro O pode ser obtido no segundo arco capaz de 90° sobre $\overline{F_1B_1}$. Porém, ela cai fora dos limites reservados para a construção.



Resolução: Primeiro traçamos o eixo imaginário (e'), pois ele é a mediatriz de $\overline{MM'}$. Depois, por F_1 e perpendicularmente a e', traçamos o eixo real (e), que intercepta e' em O. Então, é fácil determinar F_2 em **e**, pois $OF_1 = OF_2$ e, uma vez conhecidos F_1, F_2 e um ponto M (ou M') da hipérbole, recaímos no E11.1.



Determinando F_2...



... recaímos no E11.1.

Resolva os exercícios de 144 a 147 do caderno de atividades.

Construção da hipérbole por pontos

Assim como a elipse, a hipérbole não pode ser traçada usando apenas régua e compasso. Mas, ela também pode ser construída por pontos, isto é, é possível determinar tantos pontos de uma hipérbole quantos se quiser. Passemos ao estudo dessa construção.

Problema

Construir uma hipérbole por pontos, dados os focos e o diâmetro principal.

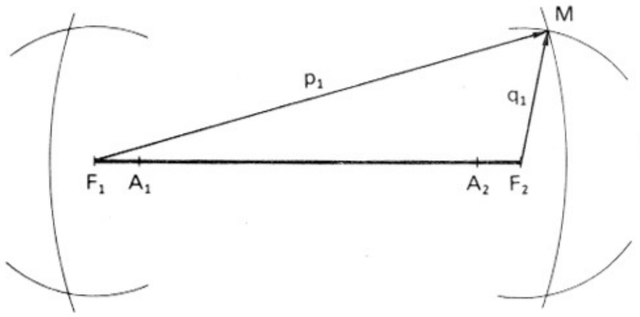
Resolução:

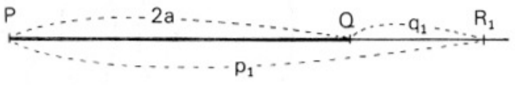
1.º) Sobre uma reta arbitrária, toma-se o segmento PQ de comprimento 2a. ($2a = A_1A_2$).

2.º) Sobre o prolongamento de $\overline{PQ}$ toma-se um ponto R_1 arbitrário. Sejam $p_1 = PR_1$ e $q_1 = QR_1$.

3.º) Com centros em F_1 e F_2 descrevem-se arcos de raios iguais a p_1 e q_1.

Os quatro pontos de intersecção dos arcos de raios diferentes pertencem à hipérbole.





$p_1 - q_1 = 2a$

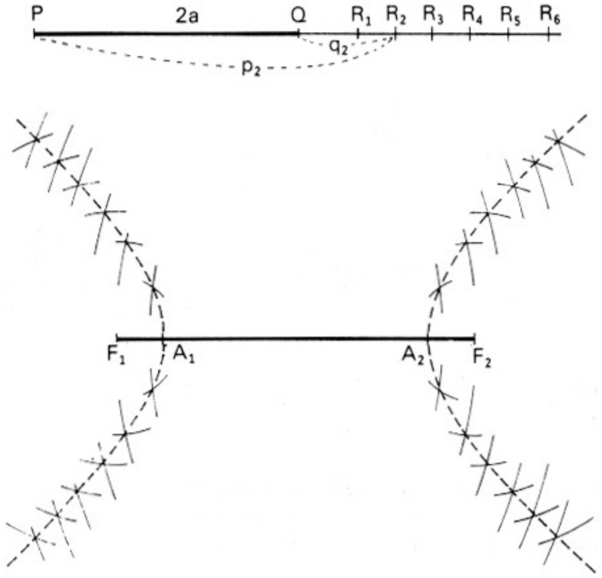
Com efeito, sendo M um qualquer dos quatro pontos, tem-se:

$$|MF_1 - MF_2| = p_1 - q_1$$

$$\therefore \quad \boxed{|MF_1 - MF_2| = 2a}$$

Do mesmo modo, tomam-se agora os pontos R_2, R_3, ... sobre o prolongamento de $\overline{PQ}$ e obtêm-se os pares de raios p_2, q_2; p_3, q_3; ... e, como se fez com p_1 e q_1, determinam-se tantos pontos quantos se quiser da hipérbole.

Caso os vértices não tenham sido dados, deve-se determiná-los, mas o número de pontos necessários para se esboçar uma hipérbole fica a critério do bom senso. (Na figura seguinte, usaram-se 24 pontos além de A_1 e A_2.)



Observações:

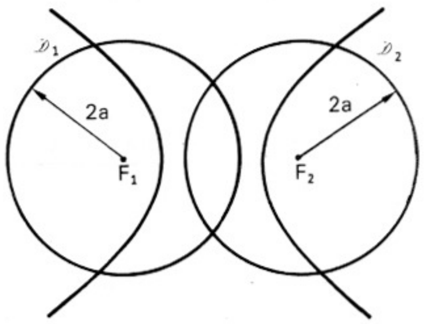
- Note que para a construção da hipérbole por pontos, é necessário conhecer F_1, F_2 e 2a.
- Pode-se usar o próprio diâmetro $\overline{A_1A_2}$ para se marcar R_1, R_2, R_3, ... em vez do segmento $\overline{PQ}$.
- O esboço da hipérbole construída por pontos não pode ser usado para resolver problemas de construção.

Resolva os exercícios 148 e 149 do caderno de atividades.

Circunferências diretoras

Definição

As duas circunferências que têm centros nos focos e raios iguais a 2a são chamadas **circunferências diretoras** da hipérbole.



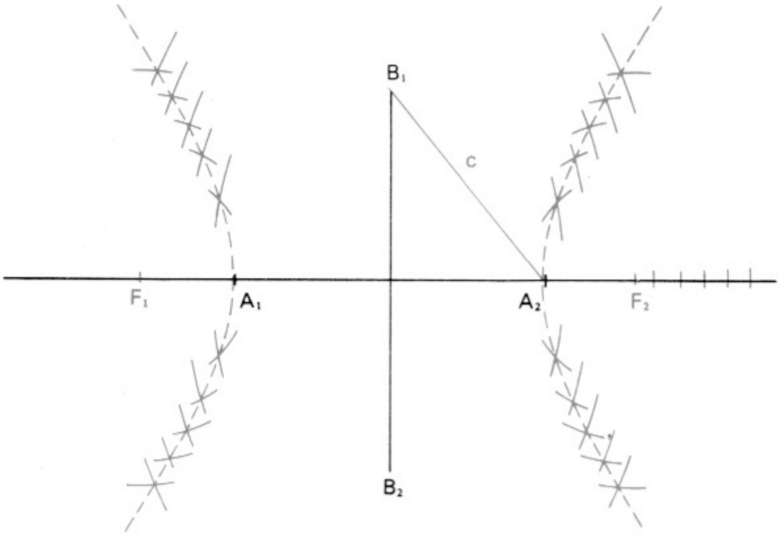
Hipérbole: construção por pontos

Figura auxiliar e anotações

148 Construa uma hipérbole por pontos, dados os diâmetros principal e imaginário.

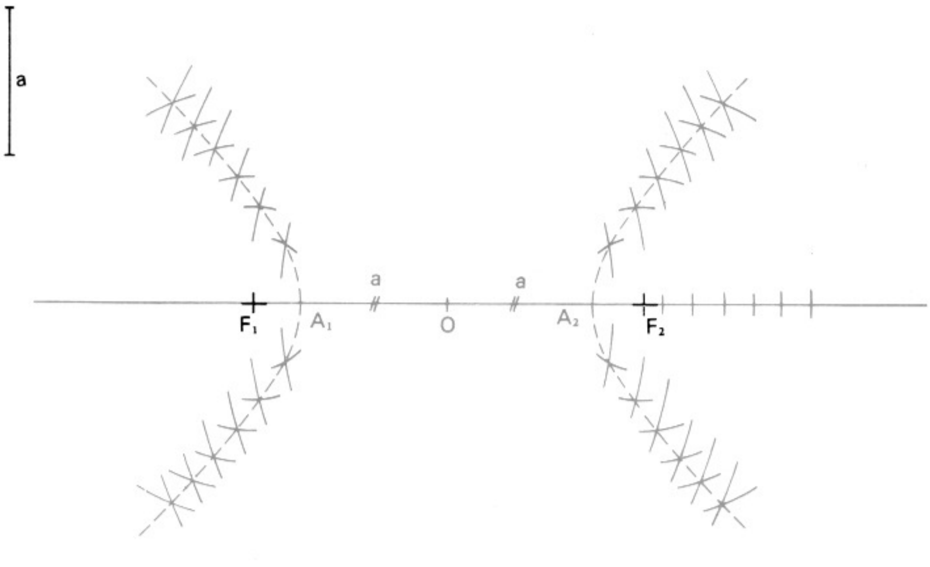
Observação:
Reforce o fato de que cada ponto M obtido nessa construção satisfaz a condição

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$



149 Construa uma hipérbole por pontos, dados os focos e o comprimento **a** do semidiâmetro principal.

Sugestão:
Proponha também a construção de uma hipérbole por pontos, dados os focos e um ponto pertencente a ela.



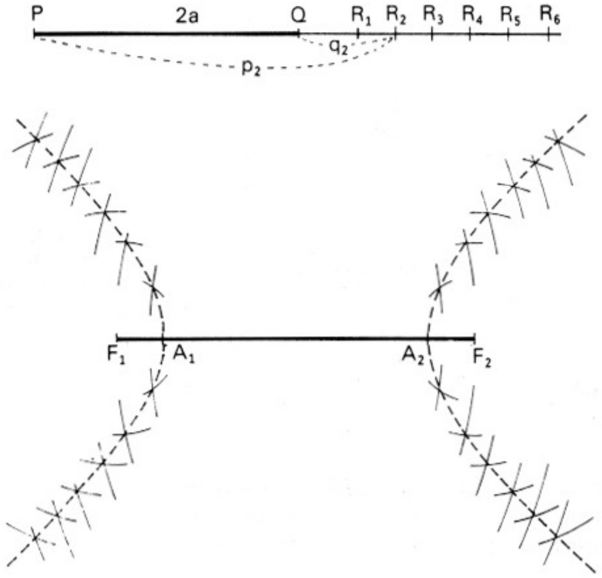
Com efeito, sendo M um qualquer dos quatro pontos, tem-se:

$$|MF_1 - MF_2| = p_1 - q_1$$

$$\therefore \quad \boxed{|MF_1 - MF_2| = 2a}$$

Do mesmo modo, tomam-se agora os pontos R_2, R_3, ... sobre o prolongamento de $\overline{PQ}$ e obtêm-se os pares de raios p_2, q_2; p_3, q_3; ... e, como se fez com p_1 e q_1, determinam-se tantos pontos quantos se quiser da hipérbole.

Caso os vértices não tenham sido dados, deve-se determiná-los, mas o número de pontos necessários para se esboçar uma hipérbole fica a critério do bom senso. (Na figura seguinte, usaram-se 24 pontos além de A_1 e A_2.)



Observações:

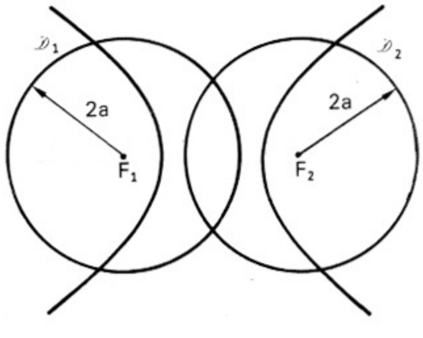
- Note que para a construção da hipérbole por pontos, é necessário conhecer F_1, F_2 e 2a.
- Pode-se usar o próprio diâmetro $\overline{A_1A_2}$ para se marcar R_1, R_2, R_3, ... em vez do segmento $\overline{PQ}$.
- O esboço da hipérbole construída por pontos não pode ser usado para resolver problemas de construção.

Resolva os exercícios 148 e 149 do caderno de atividades.

Circunferências diretoras

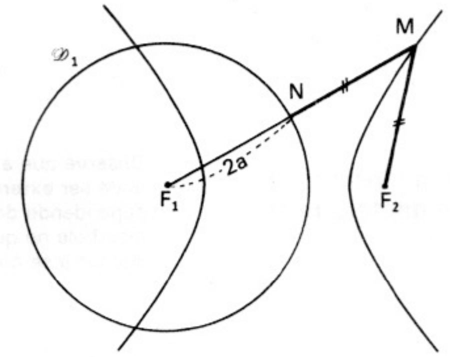
Definição

As duas circunferências que têm centros nos focos e raios iguais a 2a são chamadas **circunferências diretoras** da hipérbole.



Observação: A circunferência diretora de centro F_1 é dita **relativa ao foco** F_1 e a outra é dita **relativa ao foco** F_2. Vamos também denotá-las por $\mathscr{D}_1$ e $\mathscr{D}_2$, respectivamente.

Também na hipérbole, as circunferências diretoras desempenham um papel fundamental na resolução dos problemas de intersecção e tangência. Por isso, acompanhe com toda a atenção a exposição seguinte, pois ela levará à formulação de uma propriedade muito importante. Comece por observar a figura.



$MF_1 > MF_2$

Seja M um ponto qualquer da hipérbole e vamos supor, inicialmente, $MF_1 > MF_2$. Então, $\overline{MF_1}$ intercepta $\mathscr{D}_1$ num ponto N, tal que $MN = MF_2$. De fato:

$$F_1N = 2a \Rightarrow \boxed{MF_1 - MN = 2a} \quad (1)$$

Mas, como M pertence à hipérbole, tem-se:

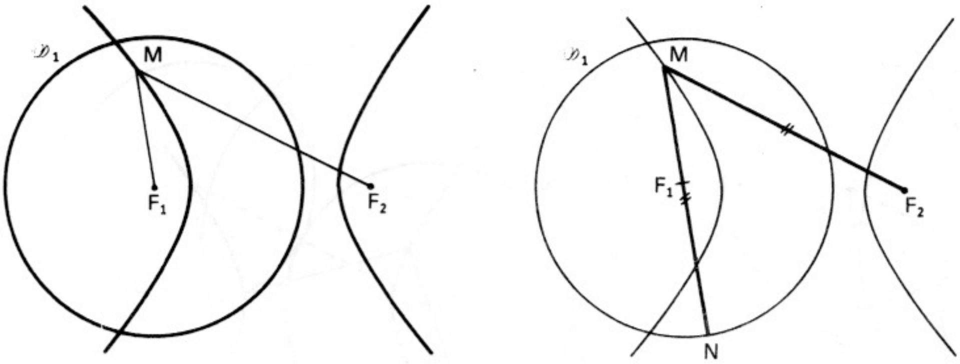
$$\boxed{MF_1 - MF_2 = 2a}$$

De (1) e (2), conclui-se que:

$$\cancel{MF_1} - MN = \cancel{MF_1} - MF_2$$

$$\therefore \quad \boxed{MN = MF_2}$$

No caso em que $MF_1 < MF_2$, então N é o ponto em que o prolongamento de $\overline{MF_1}$ intercepta $\mathscr{D}_1$, e demonstra-se facilmente que também $MN = MF_2$.



$MF_1 < MF_2$

Nesse caso, podemos escrever:

$$F_1N = 2a \Rightarrow \boxed{MN - MF_1 = 2a} \quad (1)$$

Uma vez que M pertence à hipérbole,

$$\boxed{MF_2 - MF_1 = 2a} \quad (2)$$

Finalmente, de (1) e (2) vem:

$$MN - \cancel{MF_1} = MF_2 - \cancel{MF_1}$$

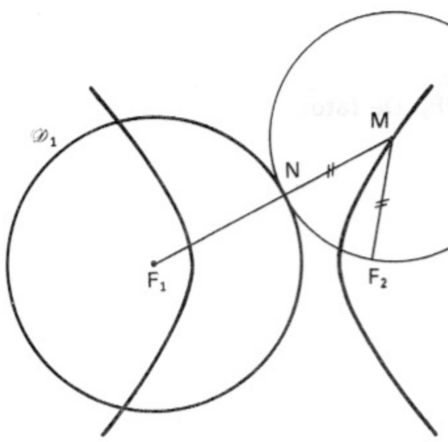
$$\therefore \quad \boxed{MN = MF_2}$$

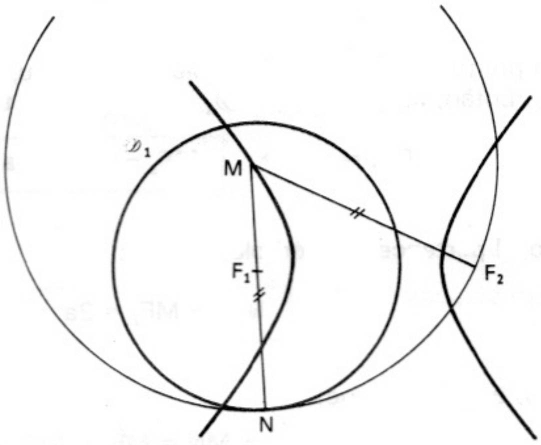
Daí, podemos enunciar o seguinte:

Propriedade

Toda circunferência que tem centro num ponto qualquer de uma hipérbole e passa por um dos focos da mesma é tangente à circunferência diretora relativa ao **outro** foco.

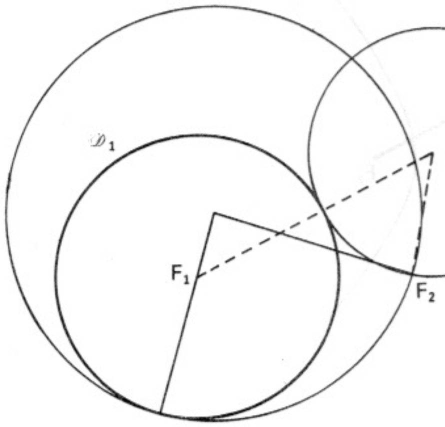
Observe que a tangência pode ser externa ou interna, dependendo do ramo da hipérbole no qual encontra-se o centro.

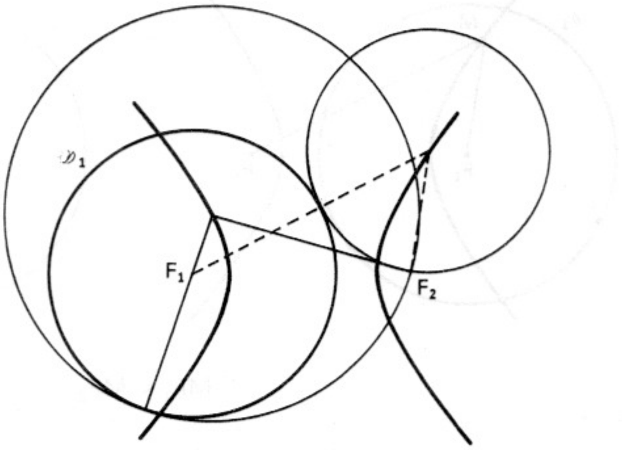




Também se demonstra a propriedade recíproca, isto é:

Se uma circunferência passa por um dos focos de uma hipérbole e tangencia a circunferência diretora relativa ao outro foco, então o seu centro pertence à hipérbole.





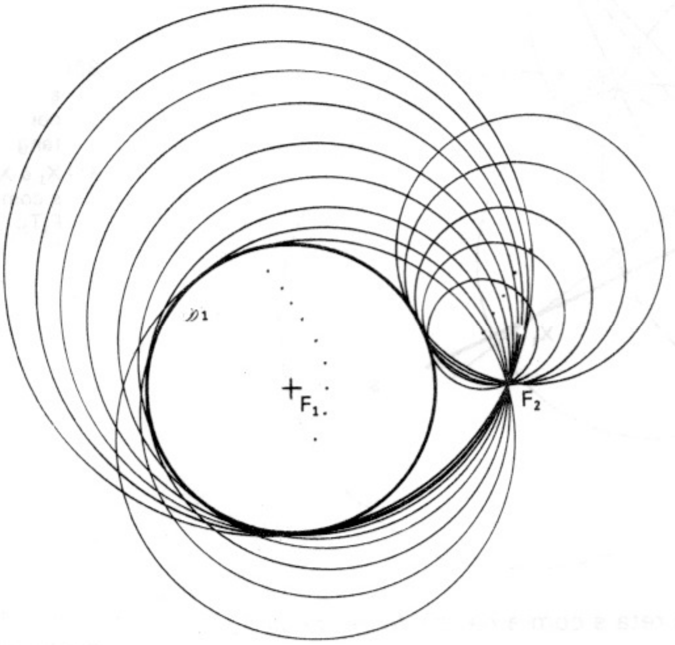
Assim sendo, a exemplo do que ocorre na elipse, a propriedade discutida caracteriza plenamente os pontos da hipérbole, permitindo também uma nova definição dessa cônica.

Definição

Sejam dados uma circunferência $\mathscr{D}_1$, de centro F_1, e um ponto F_2 no seu exterior.

Chama-se hipérbole o lugar geométrico dos **centros** das circunferências que passam por F_2 e tangenciam $\mathscr{D}_1$.

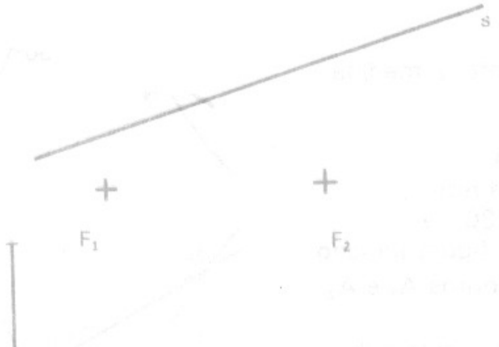
Note que a elipse e a hipérbole unificam-se com esta definição. Só que F_2 é interno a $\mathscr{D}_1$ na elipse e externo na hipérbole.

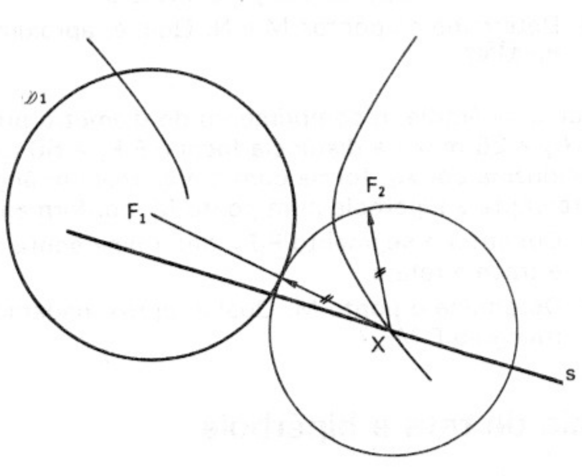


Agora, podemos passar ao problema de intersecção de reta e hipérbole.

Problema

Determinar os pontos de intersecção de uma reta **s** com uma hipérbole, da qual são conhecidos os focos e o comprimento 2a do diâmetro principal.

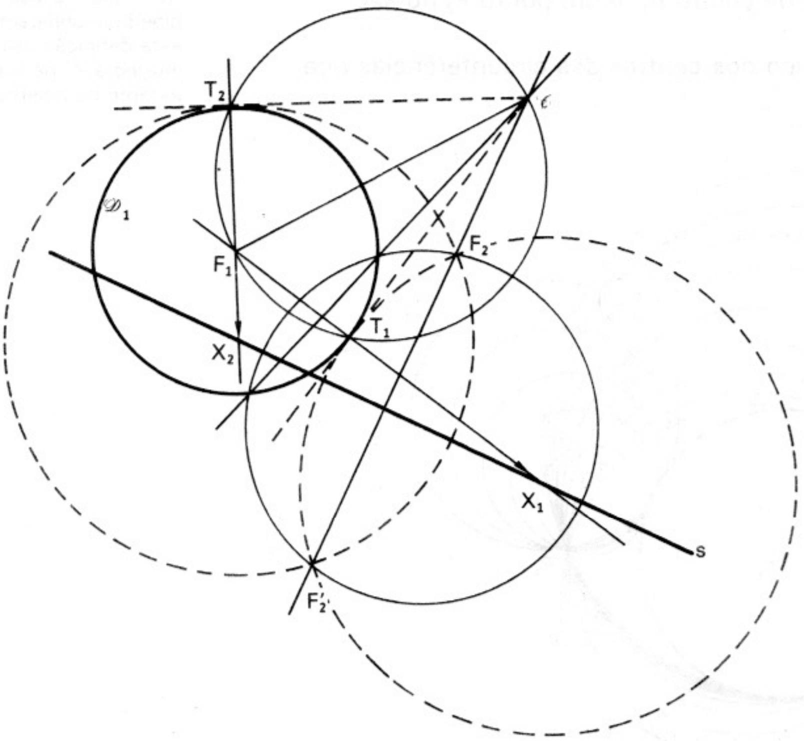




Resolução: Consideremos a circunferência diretora $\mathscr{D}_1$ e seja X um dos pontos procurados. Pela segunda definição de hipérbole, podemos ''traduzir'' o problema da seguinte forma:

Dados um ponto F_2, uma reta s **e uma circunferência $\mathscr{D}_1$, determinar em** s **o centro** X **de uma circunferência que passa por F_2 e tangencia $\mathscr{D}_1$.**

Assim, o problema recai também no **pt 4**.



Apenas para você recordar, os pontos, nessa construção, foram obtidos na seguinte seqüência:

- **1.º) F_2', simétrico de F_2 em relação a s.**
- **2.º) $\mathcal{C}$, centro radical de $\mathcal{D}_1$ com o feixe de circunferências secantes em F_2 e F_2'.**
- **3.º) T_1 e T_2, pontos em que as retas tangentes a $\mathcal{D}_1$, conduzidas por $\mathcal{C}$, a tangenciam.**
- **4.º) X_1 e X_2, intersecções de s com as retas F_1T_1 e F_1T_2.**

X_1 e X_2 são os pontos de intersecção da reta **s** com a hipérbole de focos F_1 e F_2.

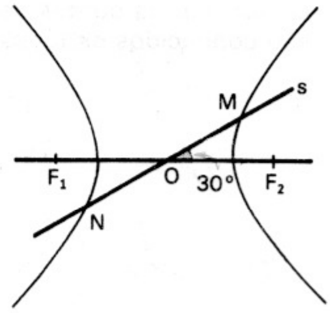
Resolva os exercícios 150 e 151 do caderno de atividades.

Exercícios

E11.6 A distância focal de uma hipérbole é $F_1F_2 = 42$ mm e o diâmetro principal tem comprimento $2a = 27$ mm. Uma reta **s** passa pelo centro da hipérbole, forma um ângulo de 30° com o eixo real e a intercepta nos pontos M e N. (Veja figura de apoio ao lado.)

a) Construa o segmento F_1F_2 e a reta **s**.

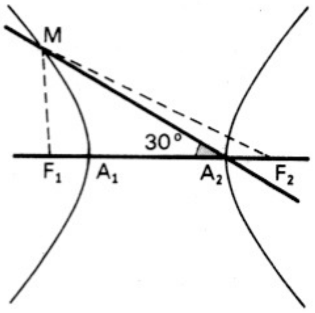
b) Determine os pontos M e N. Qual é, aproximadamente, a medida de $\overline{MN}$?



E11.7 Numa hipérbole, o comprimento do diâmetro principal é $A_1A_2 = 26$ mm e a distância focal é $F_1F_2 = 56$ mm. Uma reta **s**, conduzida por A_2, forma com o eixo real um ângulo de 30° e intercepta a hipérbole num ponto M, conforme ilustra a figura ao lado.

a) Construa o segmento F_1F_2, determine sobre ele os pontos A_1 e A_2, e trace a reta **s**.

b) Determine o ponto M. Qual é, aproximadamente, o perímetro do triângulo F_1MF_2?



Tangência de reta e hipérbole

Para que uma reta e uma hipérbole sejam tangentes, é necessário e suficiente que elas possuam um único ponto comum, isto é, elas devem ter um único ponto de intersecção. Mas, como o problema da intersecção de uma reta e uma hipérbole recai no **pt 4**, para que ele admita solução única, os elementos do problema devem estar posicionados de modo que o **pt 4** tenha solução única. Da discussão feita sobre aquele problema de tangência, podemos agora enunciar a propriedade que segue.

Hipérbole: intersecção com a reta

150 Determine os pontos de intersecção da reta **s** com a hipérbole de diâmetro principal $\overline{A_1A_2}$ e focos F_1 e F_2.

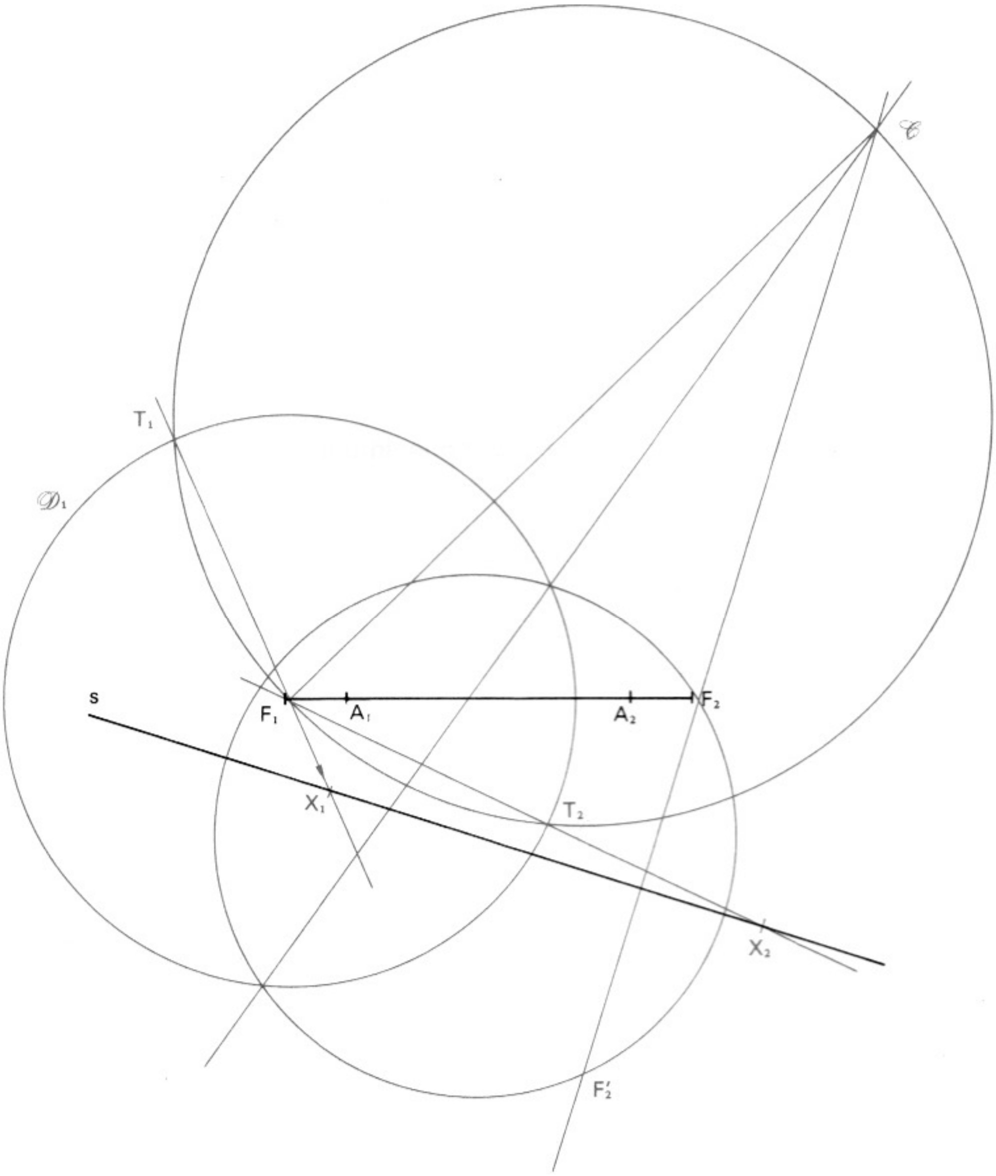
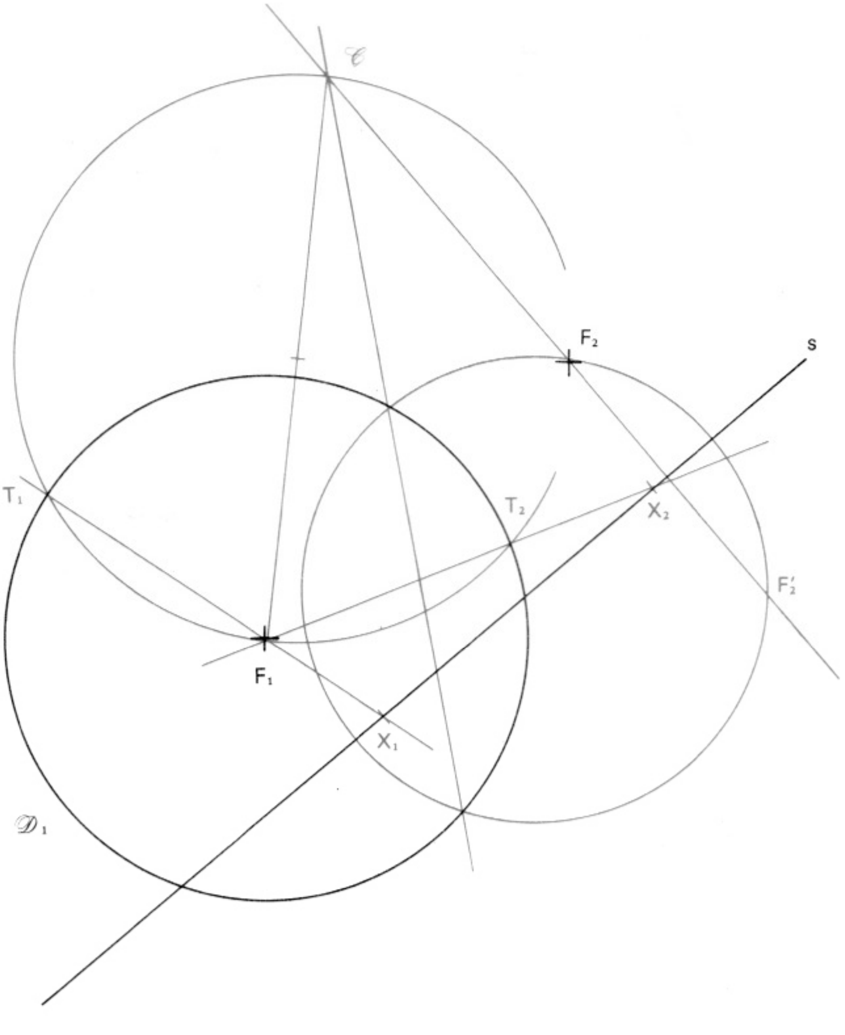


Figura auxiliar e anotações

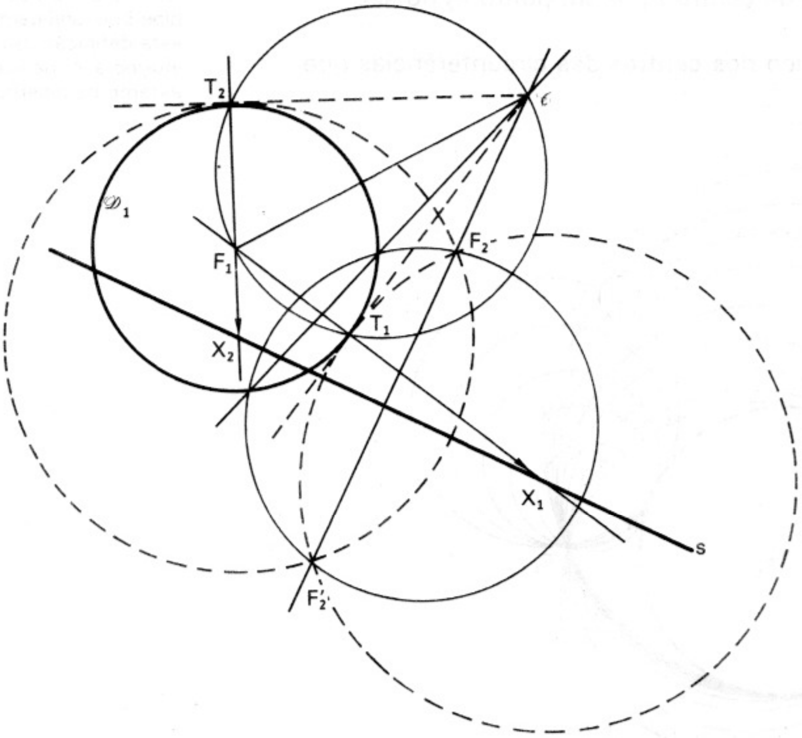
Observação:
Nota-se que o ponto X_2 não fica bem determinado, já que a reta conduzida por F_1 e T_2 intercepta **s** segundo um ângulo muito pequeno. Em função disso, oriente o aluno no sentido de que aquele ponto fica melhor determinado se ele for obtido, por exemplo, na intersecção da mediatriz de T_2F_2' com **s**, já que X_2 é eqüidistante de T_2 e F_2'.) Também se poderia traçar a mediatriz de $\overline{T_2F_2}$.)
De qualquer modo, convem pedir ao aluno que trace as circunferências de centros X_1 e X_2 tangentes a $\mathscr{D}_1$ em T_1 e T_2, respectivamente, para verificar se elas passam por F_2 e F_2'.

Hipérbole: intersecção com a reta

151 Determine os pontos de intersecção da reta **s** com a hipérbole de circunferência diretora $\mathscr{D}_1$ e focos F_1 e F_2.


$\mathscr{C}$
F_2
s
T_1
T_2
X_2
F_2'
F_1
X_1
$\mathscr{D}_1$

Assim, o problema recai também no **pt 4**.



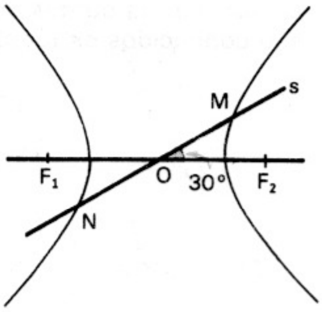
Apenas para você recordar, os pontos, nessa construção, foram obtidos na seguinte seqüência:

- **1.º) F'_2, simétrico de F_2 em relação a s.**
- **2.º) 𝒞, centro radical de $\mathscr{D}_1$ com o feixe de circunferências secantes em F_2 e F'_2.**
- **3.º) T_1 e T_2, pontos em que as retas tangentes a $\mathscr{D}_1$, conduzidas por 𝒞, a tangenciam.**
- **4.º) X_1 e X_2, intersecções de s com as retas F_1T_1 e F_1T_2.**

X_1 e X_2 são os pontos de intersecção da reta **s** com a hipérbole de focos F_1 e F_2.

Resolva os exercícios 150 e 151 do caderno de atividades.

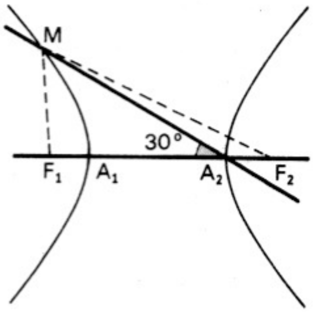
Exercícios



E11.**6** A distância focal de uma hipérbole é $F_1F_2 = 42$ mm e o diâmetro principal tem comprimento $2a = 27$ mm. Uma reta **s** passa pelo centro da hipérbole, forma um ângulo de 30° com o eixo real e a intercepta nos pontos M e N. (Veja figura de apoio ao lado.)

a) Construa o segmento F_1F_2 e a reta **s**.

b) Determine os pontos M e N. Qual é, aproximadamente, a medida de $\overline{MN}$?



E11.**7** Numa hipérbole, o comprimento do diâmetro principal é $A_1A_2 = 26$ mm e a distância focal é $F_1F_2 = 56$ mm. Uma reta **s**, conduzida por A_2, forma com o eixo real um ângulo de 30° e intercepta a hipérbole num ponto M, conforme ilustra a figura ao lado.

a) Construa o segmento F_1F_2, determine sobre ele os pontos A_1 e A_2, e trace a reta **s**.

b) Determine o ponto M. Qual é, aproximadamente, o perímetro do triângulo F_1MF_2?

Tangência de reta e hipérbole

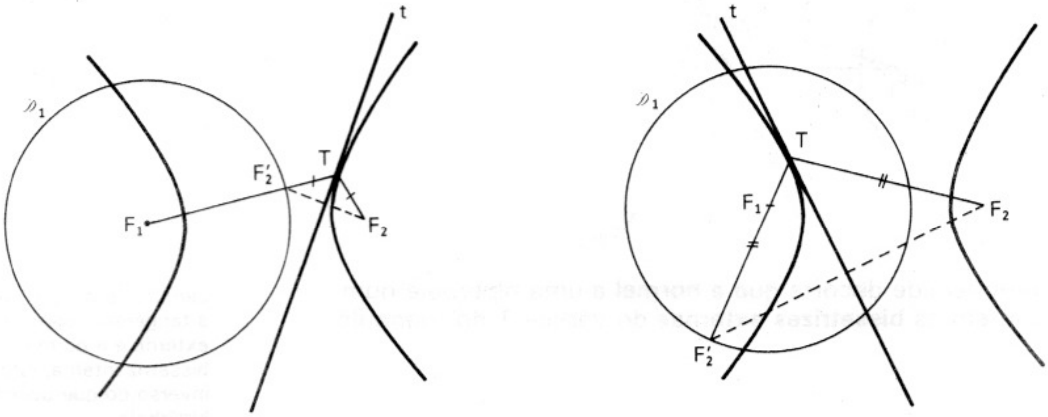
Para que uma reta e uma hipérbole sejam tangentes, é necessário e suficiente que elas possuam um único ponto comum, isto é, elas devem ter um único ponto de intersecção. Mas, como o problema da intersecção de uma reta e uma hipérbole recai no **pt 4**, para que ele admita solução única, os elementos do problema devem estar posicionados de modo que o **pt 4** tenha solução única. Da discussão feita sobre aquele problema de tangência, podemos agora enunciar a propriedade que segue.

Propriedade fundamental da tangência

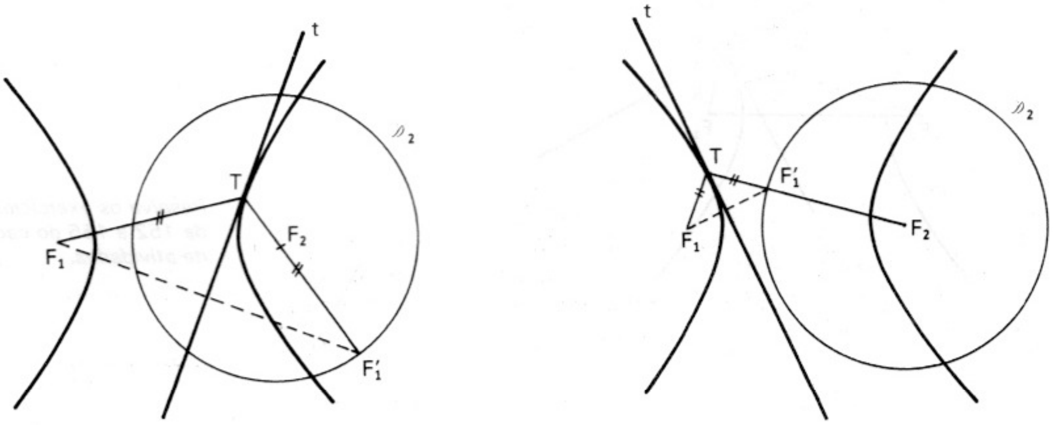
Propriedade

Uma reta e uma hipérbole são tangentes quando, e somente quando, o simétrico de qualquer dos dois focos em relação à reta pertence à circunferência diretora relativa ao outro foco.

O simétrico de F_2 em relação a qualquer tangente à hipérbole cai em $\mathcal{D}_1$.


t
$\mathcal{D}_1$
F_2'
T
F_1
F_2
t
$\mathcal{D}_1$
T
F_1
F_2
F_2'

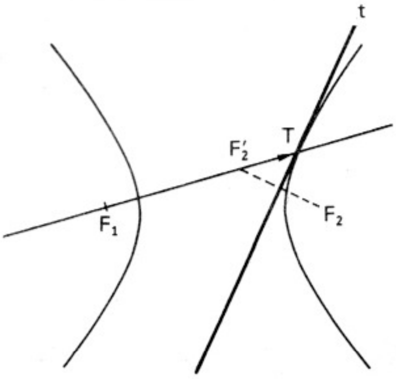
O simétrico de F_1 em relação a qualquer tangente à hipérbole cai em $\mathcal{D}_1$.

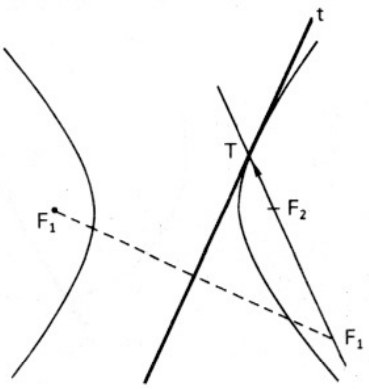

t
$\mathcal{D}_2$
T
F_2
F_1
F_1'
t
T
F_1'
$\mathcal{D}_2$
F_1
F_2

Como conseqüências imediatas da propriedade fundamental da tangência, decorrem outras duas propriedades importantes.

Propriedade

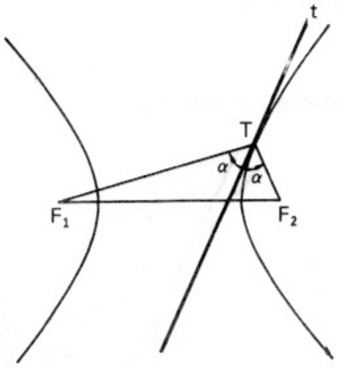
Se F_1' e F_2' são os simétricos dos focos em relação a uma tangente **t** qualquer à hipérbole, então as retas F_1F_2' e F_2F_1' interceptam **t** no ponto T de tangência.





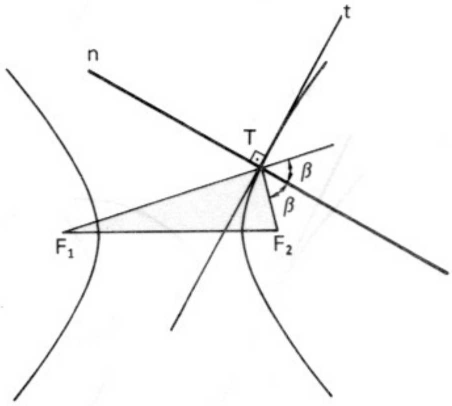
Propriedade

A reta tangente à hipérbole, num ponto T qualquer da mesma, contém a **bissetriz interna** do vértice T do triângulo F_1TF_2.



Observação: Dessa propriedade decorre que a **normal** a uma hipérbole num ponto T da mesma contém as **bissetrizes externas** do vértice T do triângulo F_1TF_2.

Lembre-se de que na elipse a tangente é bissetriz externa e a normal é bissetriz interna, isto é, o inverso do que ocorre na hipérbole.

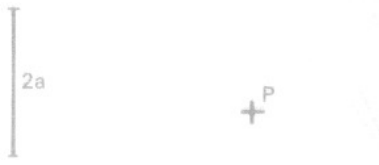


Resolva os exercícios de 152 a 155 do caderno de atividades.

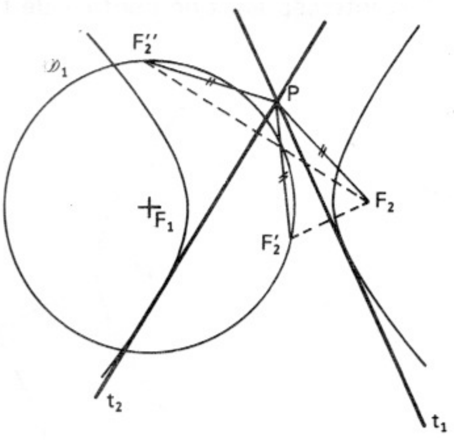
Exercícios

E11.8 São dados os focos e o comprimento 2a do diâmetro principal de uma hipérbole e um ponto P externo a ela. Conduza por P as retas tangentes à hipérbole.

◁ IMPORTANTE



Suposto resolvido

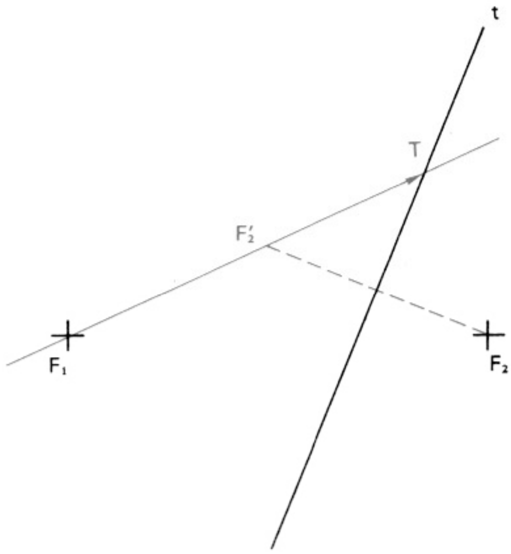


Hipérbole: tangência

Figura auxiliar e anotações

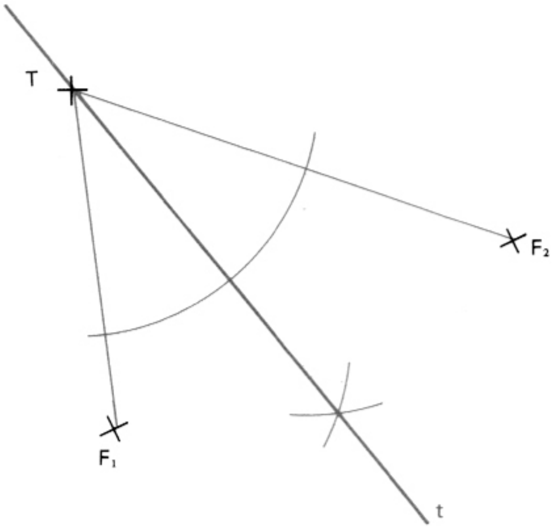
152 Dados os focos de uma hipérbole e uma tangente a ela, determine o ponto de tangência.

Sugestão:
Proponha, neste exercício, que o aluno construa o diâmetro principal. Então, pode-se reforçar que $F_1F_2' = 2a$, já que F_2' pertence a $\mathscr{D}_1$.



153 O ponto T pertence a uma hipérbole de focos F_1 e F_2. Construa a reta tangente à hipérbole em T.

Sugestão:
Pergunte o que é a reta **t** obtida, supondo que os dados sejam de uma elipse.



Hipérbole: tangência (normal)

154 O ponto N pertence a uma hipérbole de focos F_1 e F_2. Construa a normal à hipérbole em N.

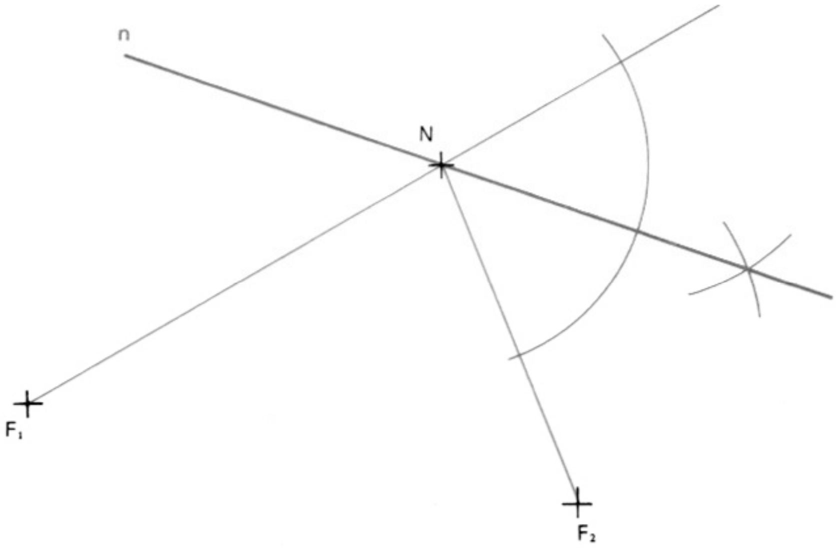
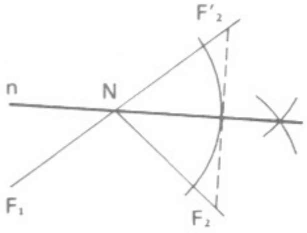
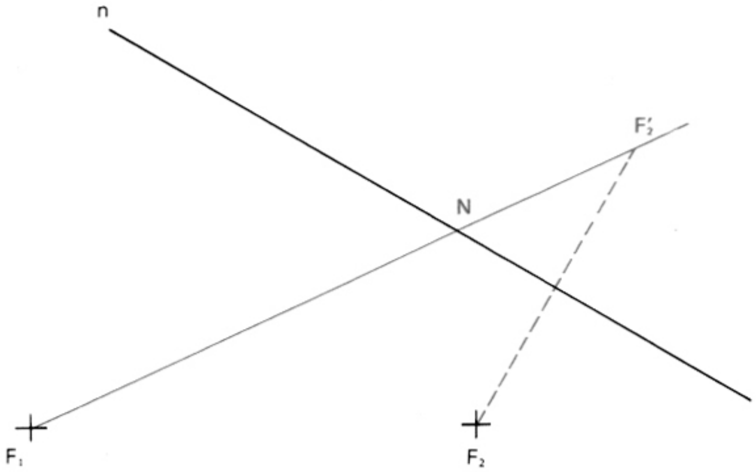


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Como preparação ao próximo exercício, comente que o simétrico de F_2 em relação a **n** cai no prolongamento de $\overline{F_1N}$.

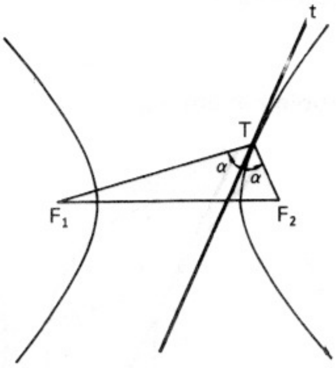


155 São dados os focos de uma hipérbole e uma normal a ela num ponto N desconhecido. Determine o ponto N.



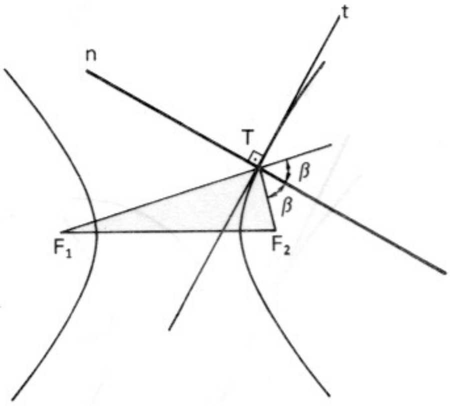
Propriedade

A reta tangente à hipérbole, num ponto T qualquer da mesma, contém a **bissetriz interna** do vértice T do triângulo F_1TF_2.



Observação: Dessa propriedade decorre que a **normal** a uma hipérbole num ponto T da mesma contém as **bissetrizes externas** do vértice T do triângulo F_1TF_2.

Lembre-se de que na elipse a tangente é bissetriz externa e a normal é bissetriz interna, isto é, o inverso do que ocorre na hipérbole.

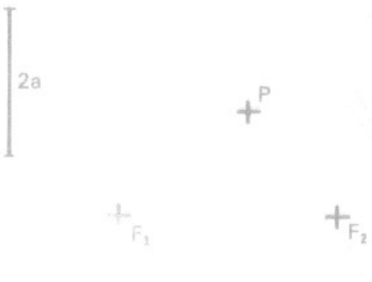


Resolva os exercícios de 152 a 155 do caderno de atividades.

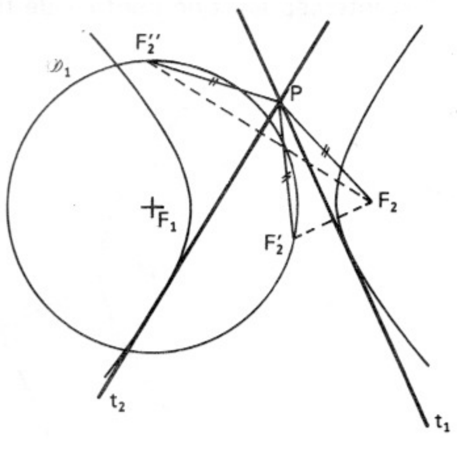
Exercícios

E11.8 São dados os focos e o comprimento 2a do diâmetro principal de uma hipérbole e um ponto P externo a ela. Conduza por P as retas tangentes à hipérbole.

◁ IMPORTANTE

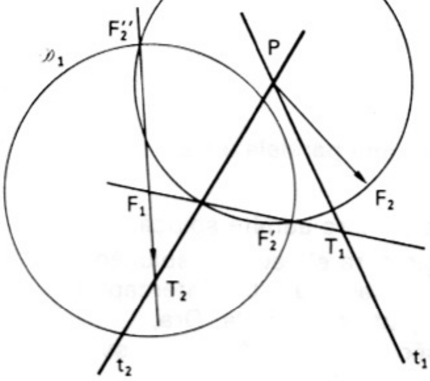


Suposto resolvido



Resolução: Sejam t_1 e t_2 as retas procuradas. Então, os simétricos de F_2 em relação a elas (F_2' e F_2'') pertencem a $\mathscr{D}_1$. Daí, é fácil concluir que F_2, F_2' e F_2'' são eqüidistantes de P. Assim, a circunferência de centro P que passa por F_2 intercepta $\mathscr{D}_1$ em F_2' e F_2''. As retas t_1 e t_2 são as mediatrizes de $\overline{F_2F_2'}$ e $\overline{F_2F_2''}$.

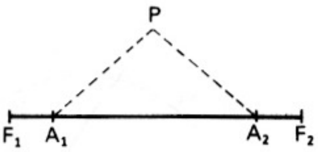
Lembre-se que devemos obter também os pontos de tangências. Para tanto, basta traçar as retas F_1F_2' e F_1F_2'', as quais interceptam $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$ nos pontos $\mathbf{T_1}$ e $\mathbf{T_2}$ de tangências.



E11.**9** Numa hipérbole, a distância focal é igual a 70 mm e o diâmetro principal tem comprimento igual a 44 mm. Um ponto P dista 30 mm de A_1 e 27 mm de A_2, conforme indica a figura ao lado.

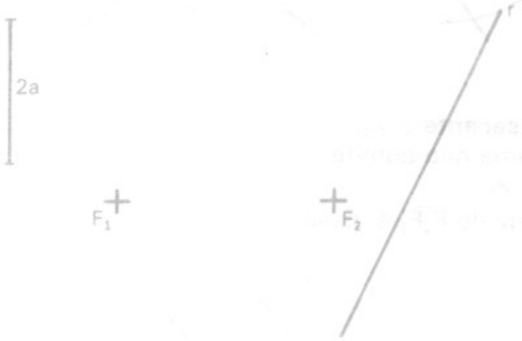
a) Construa $\overline{F_1F_2}$ e $\overline{A_1A_2}$ e obtenha P.

b) Trace as tangentes à hipérbole conduzidas por P e obtenha os pontos T_1 e T_2 de tangências. Qual é, aproximadamente, a medida de $\overline{T_1T_2}$?

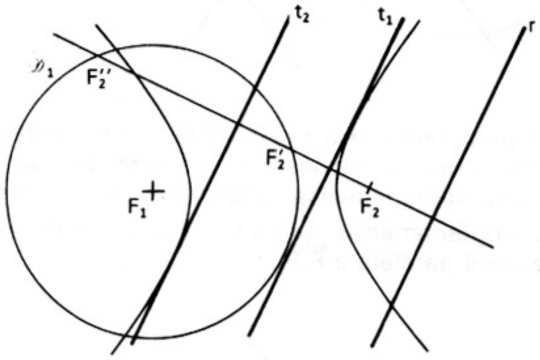


E11.**10** São dados os focos e o comprimento 2a do diâmetro principal de uma hipérbole e uma reta **r**. Trace as retas paralelas a **r** e tangentes à hipérbole.

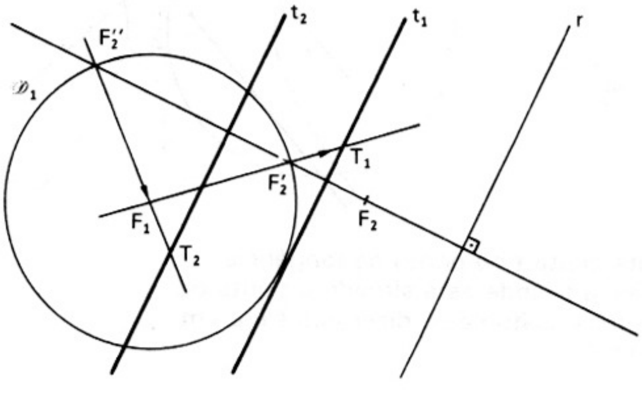
◁ IMPORTANTE



Suposto resolvido

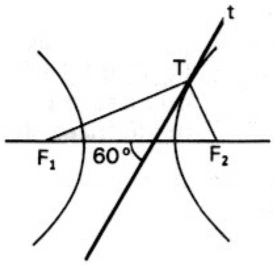


Resolução: A reta perpendicular a **r**, conduzida por F_2, intercepta $\mathscr{D}_1$ nos pontos F_2' e F_2'', simétricos de F_2 em relação às retas t_1 e t_2 procuradas. Então, t_1 e t_2 são as mediatrizes de $\overline{F_2F_2'}$ e $\overline{F_2F_2''}$.



Convém insistir que as retas F_1F_2' e F_1F_2'' interceptam t_1 e t_2 nos pontos de tangência.

E11.**11** Numa hipérbole, o comprimento do diâmetro principal é 2a = 40 mm e a distância focal é $F_1F_2 = 72$ mm. Uma reta **t** forma um ângulo de 60° com o eixo transverso e tangencia a hipérbole no ponto T, conforme indica a figura ao lado. Qual é, aproximadamente, o perímetro do triângulo F_1TF_2?



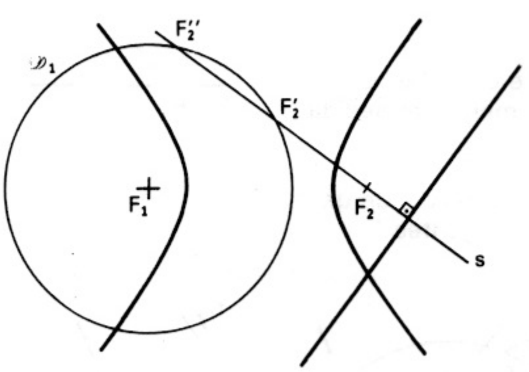
Resolva os exercícios de 156 a 159 do caderno de atividades.

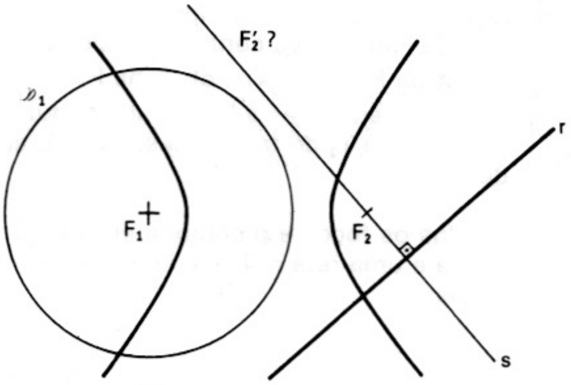
Assíntotas da hipérbole

Retomemos o último problema resolvido.

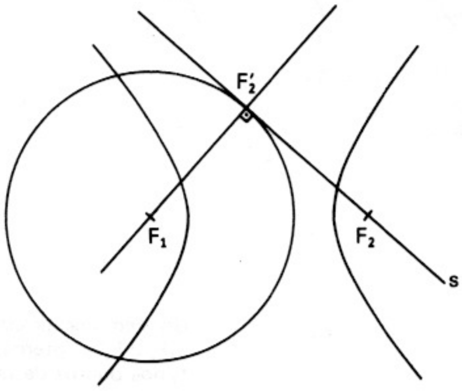
Dadas uma hipérbole e uma reta r **qualquer, construir uma paralela a** r **e tangente à hipérbole.**

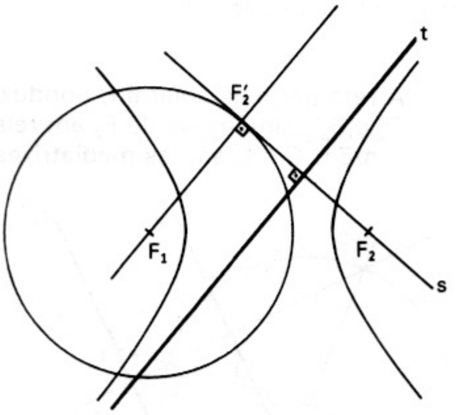
Vamos acrescentar a seguinte pergunta: O problema sempre admite solução?
É fácil responder negativamente a essa pergunta, pois para ele admitir solução é necessário que a reta conduzida por F_2 perpendicularmente à reta **r** intercepte $\mathscr{D}_1$, determinando o simétrico de F_2 em relação à tangente procurada. Ora, dependendo da posição de **r**, aquela perpendicular não interceptará $\mathscr{D}_1$ e, nesse caso, a tangente não existirá.





Seja **s** a reta perpendicular a **r** conduzida por F_2. Então, se **s** é **secante** a $\mathscr{D}_1$, o problema admite duas soluções e se **s** é **exterior** a $\mathscr{D}_1$, o problema não admite solução. Porém, vamos analisar o caso em que **s** é tangente a $\mathscr{D}_1$.
Lembremos, primeiramente, que a reta **t** procurada é a mediatriz de $\overline{F_1F_2'}$ e disso decorre que ela é paralela a $\overleftrightarrow{F_1F_2'}$.





Por outro lado, sabemos que a reta $\overleftrightarrow{F_1F_2'}$ intercepta **t** no ponto de tangência. Então, surge uma questão: se $\overleftrightarrow{F_1F_2'}$ é paralela a **t**, onde está situado o ponto de tangência? A rigor, esse ponto não existe, mas costuma-se dizer que ele é um **ponto impróprio**, ou seja, "situado no infinito".

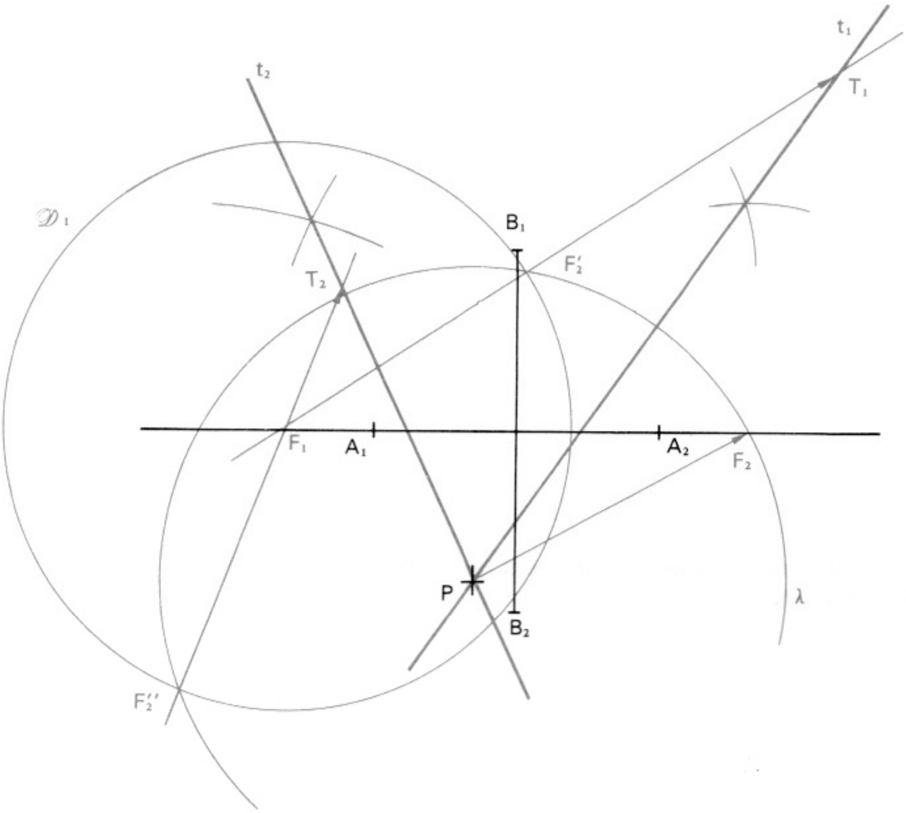
Hipérbole: tangência

156 São dados os diâmetros principal ($\overline{A_1A_2}$) e imaginário ($\overline{B_1B_2}$) de uma hipérbole e um ponto P externo a ela. Construa as retas que passam por P e tangenciam a hipérbole.

Observação: Não esqueça de obter os pontos de tangência.

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Convém reforçar para o aluno que os problemas de tangência entre reta e hipérbole têm resoluções inteiramente análogas aos de reta e elipse. Isso ocorre porque, em última análise, essas duas cônicas são definidas por propriedades idênticas, exceto que na elipse cada foco é interno à circunferência diretora relativa ao outro foco, enquanto na hipérbole eles são externos.

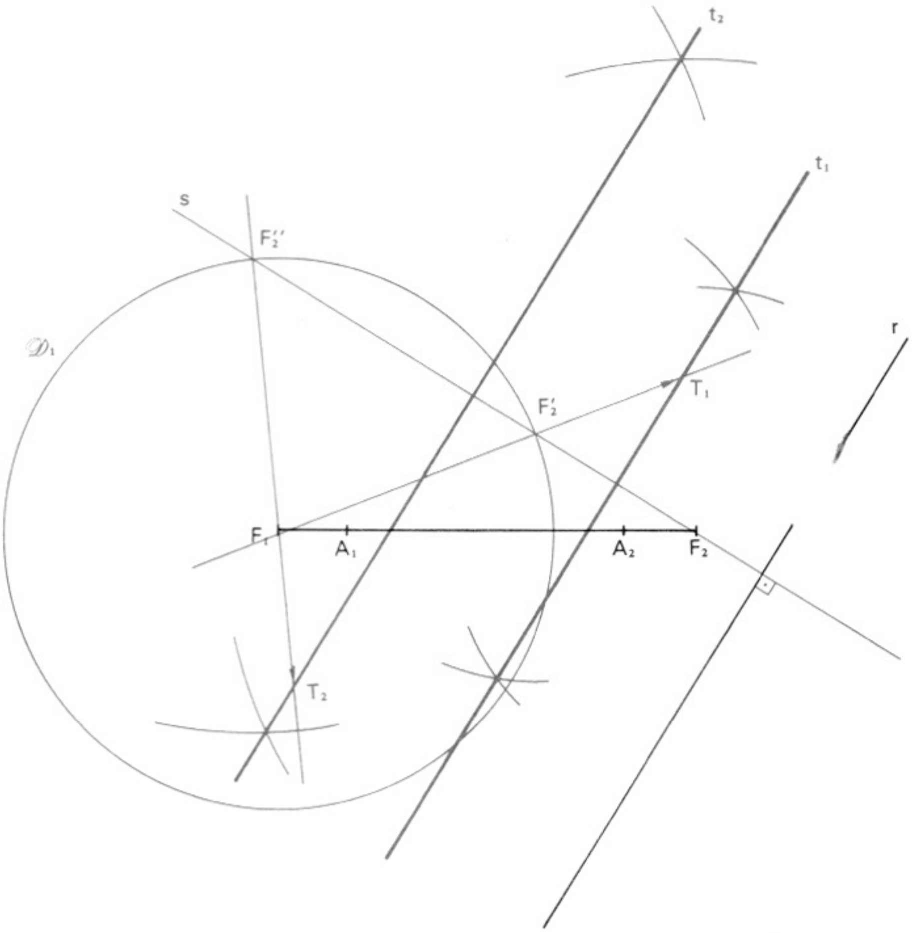


1.°) F_1 e F_2
2.°) $\mathscr{D}_1$
3.°) λ, raio $\overline{PF_2}$, determinando F_2' e F_2''.
4.°) t_1 e t_2, mediatrizes de $\overline{F_2F_2'}$ e $\overline{F_2F_2''}$.
5.°) Retas F_1F_2' e F_1F_2'', determinando T_1 e T_2.

Hipérbole: tangência

Figura auxiliar e anotações

157 Construa as retas paralelas a **r** e tangentes à hipérbole da qual são conhecidos os focos e o diâmetro principal.



t_2
t_1
s
F_2''
$\mathcal{D}_1$
T_1
r
F_2'
F_1
A_1
A_2
F_2
T_2

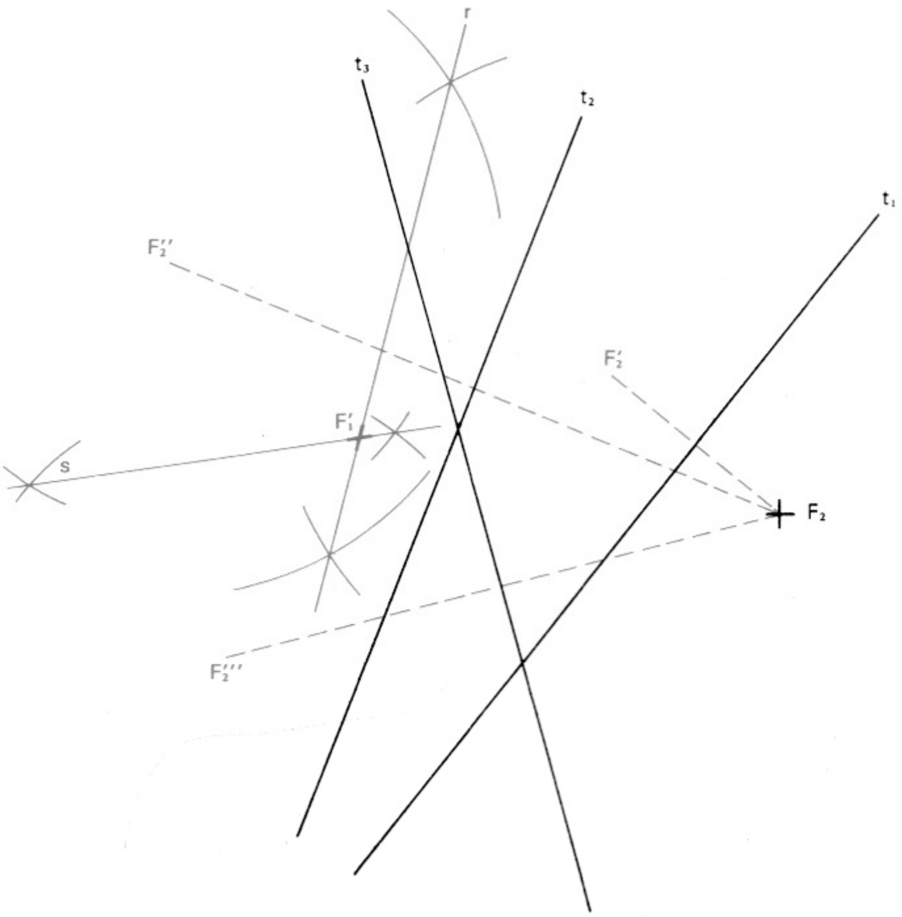
1.º) Por F_2, **s** $\perp$ **r**, determinando F_2' e F_2''.
2.º) t_1 e t_2, mediatrizes de $\overline{F_2F_2'}$ e $\overline{F_2F_2''}$.
3.º) Retas F_1F_2' e F_1F_2'', determinando T_1 e T_2.

Hipérbole: tangência de reta

Figura auxiliar e anotações

158 São dados três retas tangentes a uma hipérbole e um dos focos da mesma. Obtenha o outro foco.

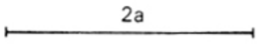
Sugestão: Esse problema é inteiramente análogo ao E 10.11, com a diferença de que lá a cônica é uma elipse.

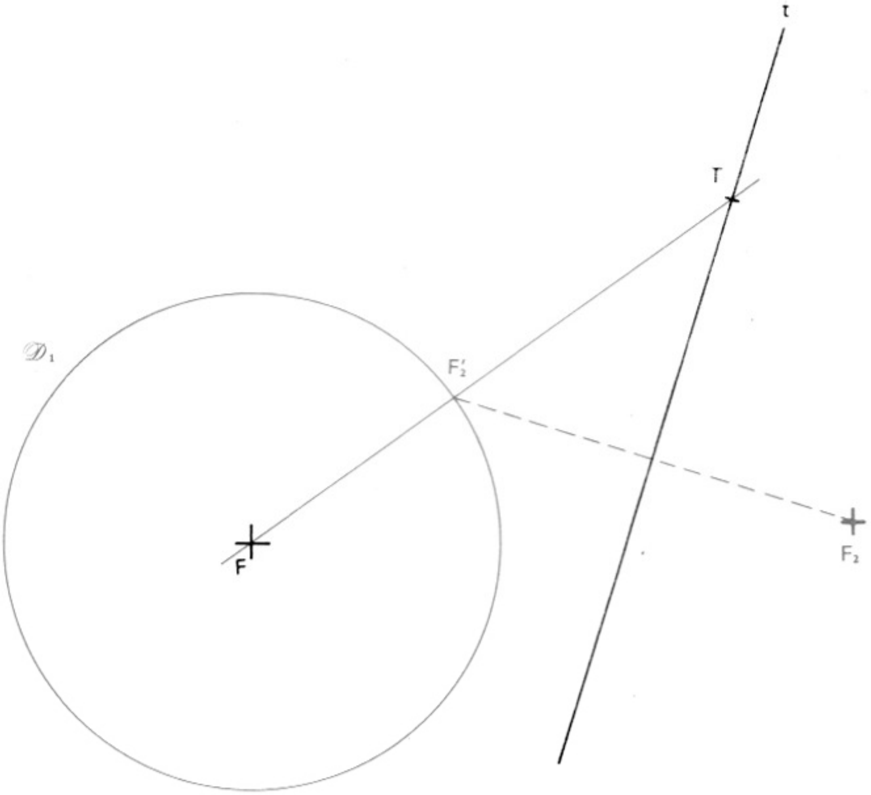


1.°) F_2', F_2'' e F_2''', simétricos de F_2 em relação a t_1, t_2 e t_3, respectivamente.
2.°) **r** e **s**, mediatrizes de $\overline{F_2'F_2''}$ e $\overline{F_2''F_2'''}$, determinando F_1.

Hipérbole: tangência

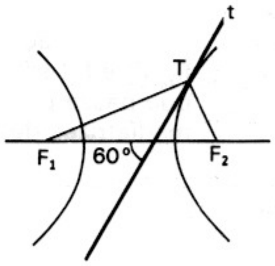
159 De uma hipérbole são dados um foco, o comprimento 2a do diâmetro principal, uma reta **t** tangente a ela e o ponto T de tangência. Determine o outro foco.





1.º) $\mathscr{D}_1$
2.º) Reta FT, determinando F_2'.
3.º) F_2, simétrico de F_2' em relação a **t**.

11 Numa hipérbole, o comprimento do diâmetro principal é $2a = 40$ mm e a distância focal é $F_1F_2 = 72$ mm. Uma reta **t** forma um ângulo de 60° com o eixo transverso e tangencia a hipérbole no ponto T, conforme indica a figura ao lado. Qual é, aproximadamente, o perímetro do triângulo F_1TF_2?



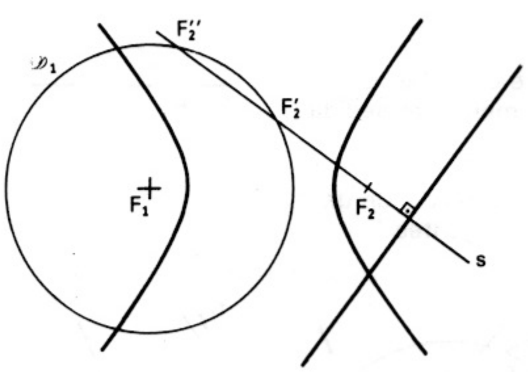
Resolva os exercícios de 156 a 159 do caderno de atividades.

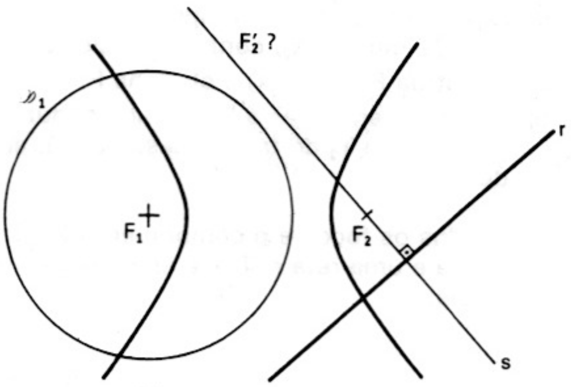
Assíntotas da hipérbole

Retomemos o último problema resolvido.

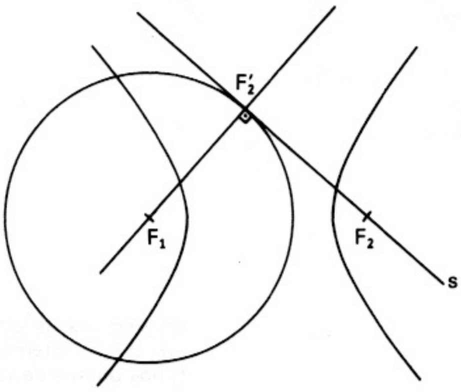
Dadas uma hipérbole e uma reta r **qualquer, construir uma paralela a** r **e tangente à hipérbole.**

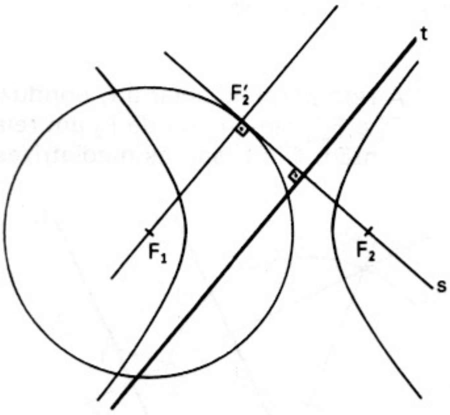
Vamos acrescentar a seguinte pergunta: O problema sempre admite solução? É fácil responder negativamente a essa pergunta, pois para ele admitir solução é necessário que a reta conduzida por F_2 perpendicularmente à reta **r** intercepte $\mathcal{D}_1$, determinando o simétrico de F_2 em relação à tangente procurada. Ora, dependendo da posição de **r**, aquela perpendicular não interceptará $\mathcal{D}_1$ e, nesse caso, a tangente não existirá.





Seja **s** a reta perpendicular a **r** conduzida por F_2. Então, se **s** é **secante** a $\mathcal{D}_1$, o problema admite duas soluções e se **s** é **exterior** a $\mathcal{D}_1$, o problema não admite solução. Porém, vamos analisar o caso em que **s** é tangente a $\mathcal{D}_1$.
Lembremos, primeiramente, que a reta **t** procurada é a mediatriz de $\overline{F_1F_2'}$ e disso decorre que ela é paralela a $\overleftrightarrow{F_1F_2'}$.





Por outro lado, sabemos que a reta $\overleftrightarrow{F_1F_2'}$ intercepta **t** no ponto de tangência. Então, surge uma questão: se $\overleftrightarrow{F_1F_2'}$ é paralela a **t**, onde está situado o ponto de tangência? A rigor, esse ponto não existe, mas costuma-se dizer que ele é um **ponto impróprio**, ou seja, "situado no infinito".

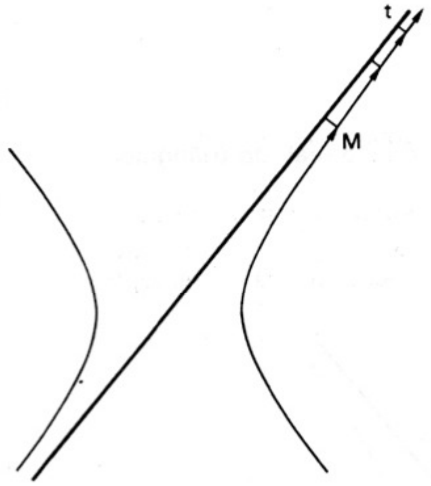
Assim, a reta **t** em questão possui a propriedade fundamental da tangência, isto é, o simétrico de qualquer foco em relação a **t** pertence à circunferência diretora relativa ao outro foco, mas o ponto de tangência é inexistente.

Na realidade, a propriedade que a reta **t** possui é a seguinte:

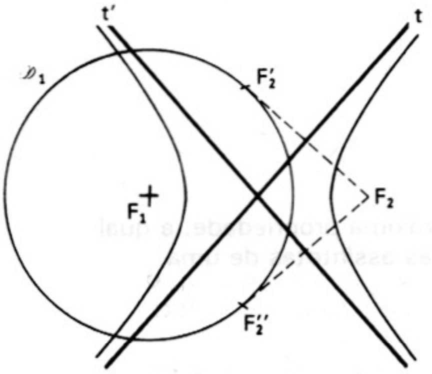
Supondo que um ponto M percorra a hipérbole, afastando-se indefinidamente sobre ela num sentido conveniente, então a distância de M a **t** tende a zero.

Toda reta que possui tal propriedade com relação a uma curva é denominada **assíntota**. Assim, a reta **t** é uma assíntota da hipérbole.

A expressão "situado no infinito" traduz uma idéia, mas ela não tem valor matemático, já que não define qualquer posição em t.



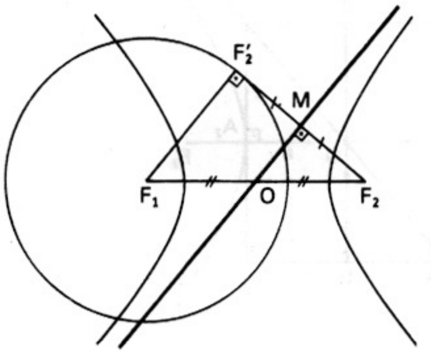
Observemos que a hipérbole admite uma segunda assíntota, pois de F_2 é possível traçar uma outra reta tangente a $\mathcal{D}_1$, determinando o ponto F_2''. A mediatriz de $\overline{F_2F_2''}$ é também uma assíntota.



Convém, agora, estabelecer algumas propriedades úteis para os problemas de construção que envolvem as assíntotas.

Propriedade

As assíntotas de uma hipérbole passam pelo centro da mesma.



Lembre-se de que se uma reta passa pelo ponto médio de um lado de um triângulo e é paralela a um segundo lado, então ela passa pelo ponto médio do terceiro lado (teorema de Tales).

De fato, no triângulo $F_1F_2F'_2$, a assíntota passa pelo ponto médio de $\overline{F_2F'_2}$ e é paralela a $\overline{F_1F'_2}$. Logo, ela passa pelo ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ o qual é o centro O da hipérbole.

Observação: Na figura anterior, da semelhança dos triângulos OF_2M e $F_1F_2F'_2$ decorre que:

$$OM = \frac{F_1F_2}{2}$$

$$OM = \frac{2a}{2}$$

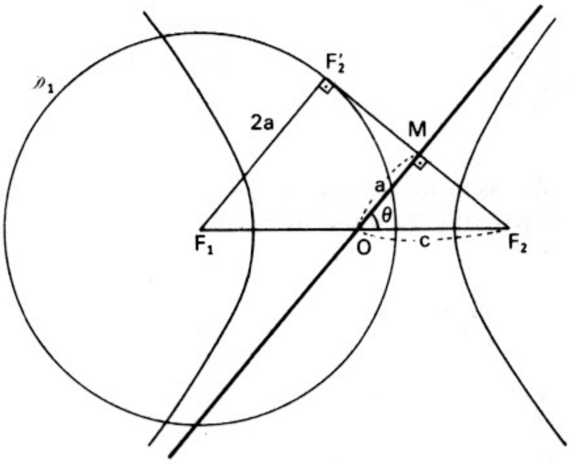
$$\therefore \quad \boxed{OM = a}$$

Sendo θ o **ângulo agudo** que a assíntota forma com o eixo real do triângulo retângulo OF_2M, podemos escrever:

$$\boxed{\cos \theta = \frac{a}{c}}$$

Lembre-se de que se θ é um ângulo agudo de um triângulo retângulo, então:

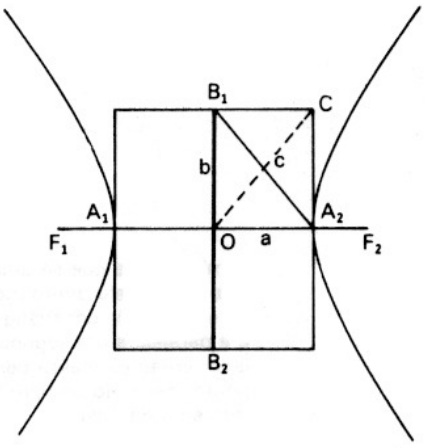
$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

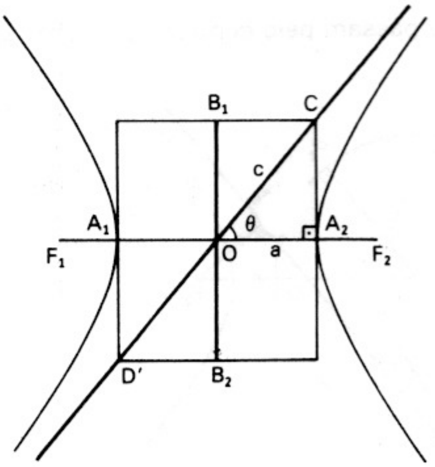


A partir dessa constatação, podemos estabelecer a próxima propriedade, a qual é de grande utilidade nas construções que envolvem as assíntotas de uma hipérbole.

Propriedade

Sejam $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$ os diâmetros principal e imaginário de uma hipérbole, respectivamente. Consideremos, agora, o retângulo que se obtém traçando-se por A_1 e A_2 as paralelas a $\overline{B_1B_2}$ e, por B_1 e B_2 as paralelas a $\overline{A_1A_2}$. Então, as assíntotas da hipérbole contêm as diagonais do retângulo considerado.





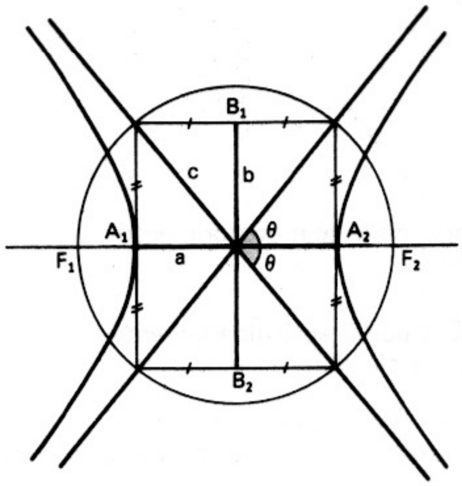
Para demonstrar a propriedade, notemos inicialmente que $A_2B_1 = c$ por definição e, portanto, sendo C um vértice qualquer do retângulo, tem-se $OC = c$. Considerando agora uma das retas que contém uma diagonal do retângulo, verificamos de imediato que ela passa por O e forma com o eixo real um **ângulo agudo** θ, tal que:

$$\boxed{\cos \theta = \frac{a}{c}}$$

Isto é, a reta em questão é uma assíntota.

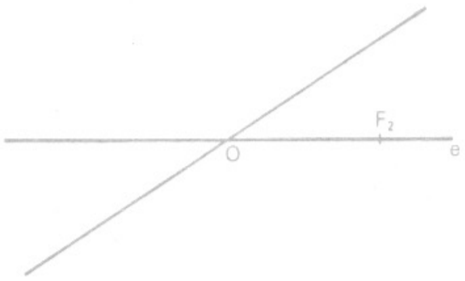
Observações:

- Os vértices do retângulo pertencem à circunferência de centro O e raio **c**.
- A_1, A_2, B_1 e B_2 são os pontos médios dos lados do retângulo.
- Os eixos da hipérbole são bissetrizes dos ângulos formados pelas assíntotas.

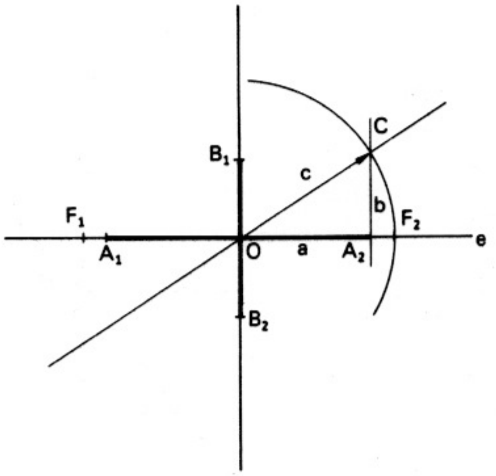


Exercícios

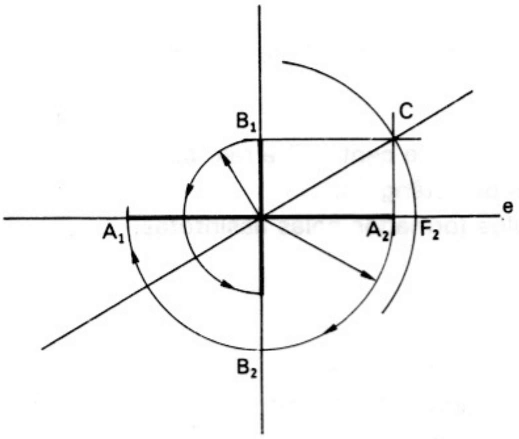
E11.12 Construa os diâmetros principal e imaginário de uma hipérbole, dados um foco, o eixo real e uma assíntota.



Suposto resolvido



Resolução: Com centro em O e raio OF_2 ($OF_2 = c$), traçamos um arco de circunferência determinando o ponto C na assíntota. Por C baixamos uma perpendicular ao eixo real determinando A_2 no mesmo. Então, a construção se completa de imediato, pois no triângulo OCA_2, $OA_2 = a$ e $CA_2 = b$.



13 Numa hipérbole os diâmetros principal e imaginário têm comprimentos iguais a 60 mm e 74 mm, respectivamente.

a) Construa esses diâmetros.

b) Construa as assíntotas a essa hipérbole. Qual é, aproximadamente, a medida do maior ângulo formado pelas assíntotas?

14 O diâmetro principal de uma hipérbole mede 78 mm e uma assíntota forma com o eixo real um ângulo de 30°. Qual é, aproximadamente, a distância focal?

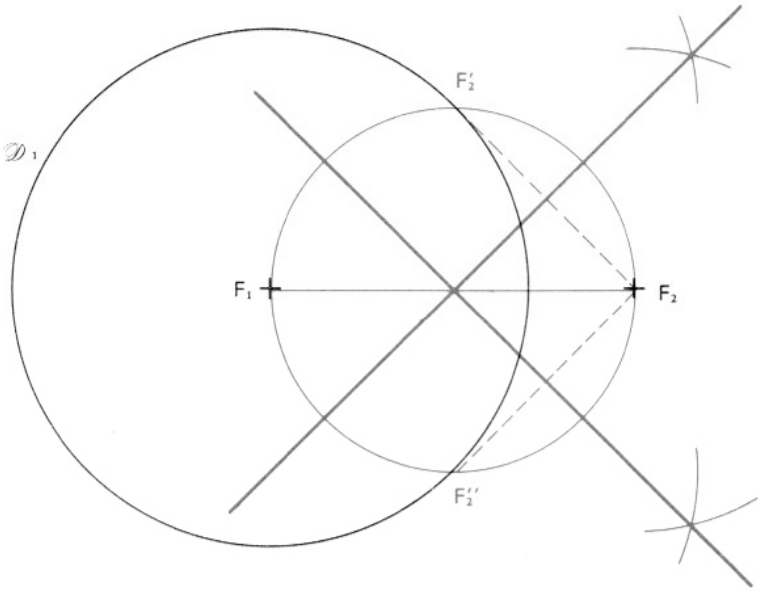
Resolva os exercícios de 160 a 163 do caderno de atividades.

Hipérbole: assíntotas

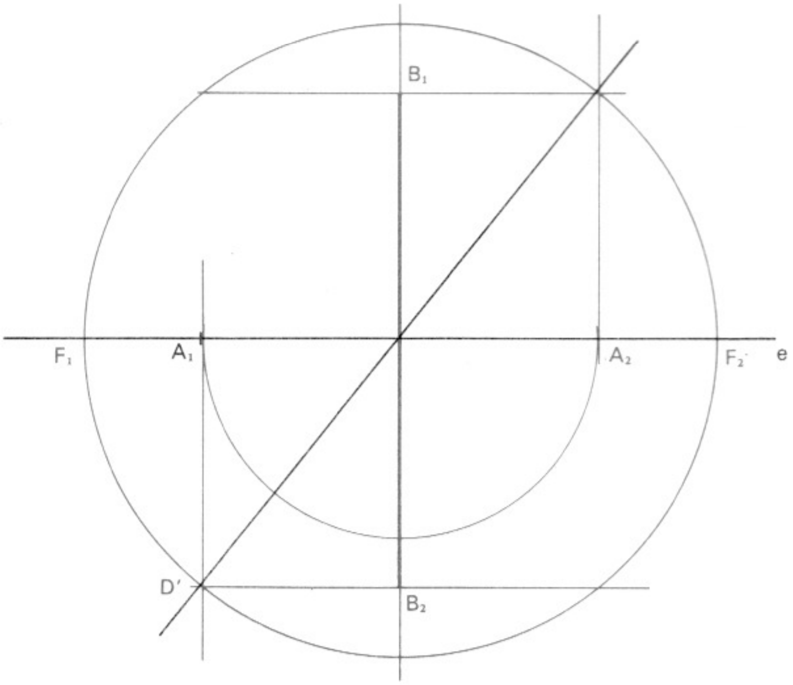
Figura auxiliar e anotações

160 De uma hipérbole são dados a circunferência diretora $\mathscr{D}_1$ (centro F_1) e o foco F_2. Construa as assíntotas dessa cônica.

Observação: Reforce que $\overline{F_2F_2'}$ e $\overline{F_2F_2''}$ são tangentes a $\mathscr{D}_1$.

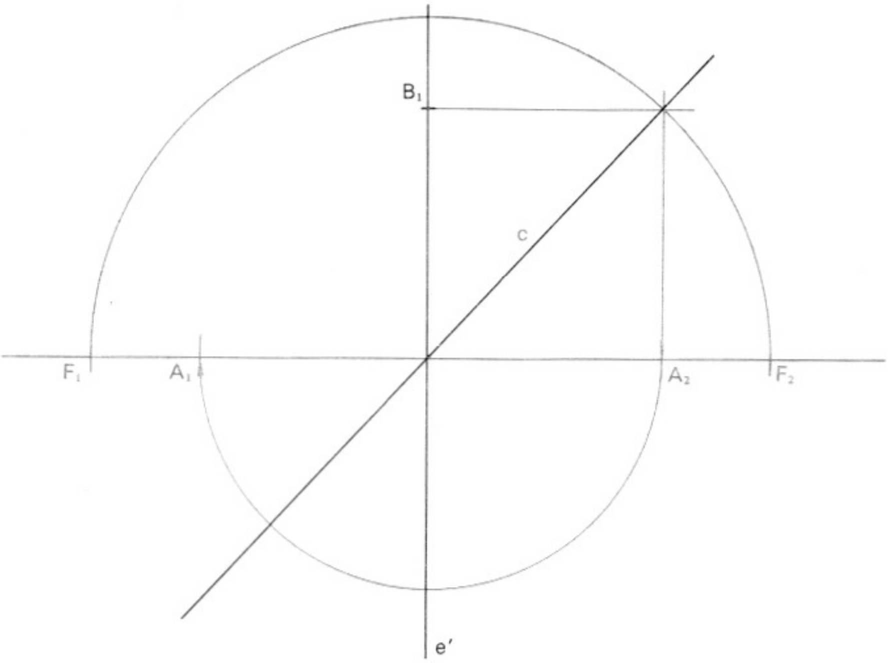


161 Obtenha os focos e os diâmetros principal e imaginário de uma hipérbole, da qual são dados um vértice, o eixo transverso e uma assíntota.



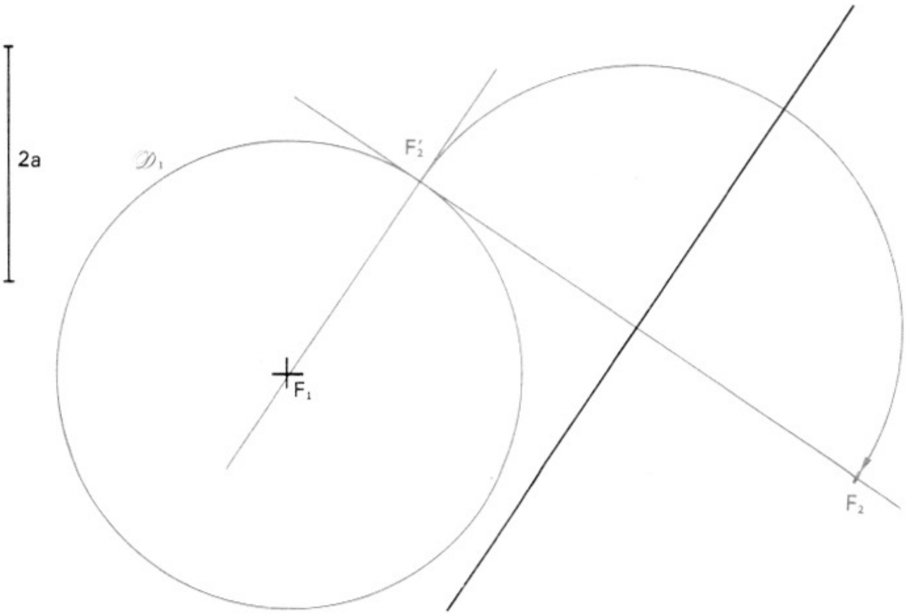
Hipérbole: assíntotas

162 Construa os focos e o diâmetro principal de uma hipérbole, dados o eixo imaginário, a extremidade B_1 do diâmetro imaginário e uma assíntota.



163 De uma hipérbole são dados um foco, uma assíntota e o comprimento 2a do diâmetro principal. Obtenha o outro foco.

Sugestão: Comece com $\mathscr{D}_1$ e lembre-se de que $\overline{F_1F_2'}$ é paralelo à assíntota.



12

Parábola

Passaremos, agora, ao estudo da terceira cônica. Durante o estudo da parábola, você vai perceber que suas propriedades têm muita afinidade com as da elipse e as da hipérbole.

O conceito de parábola

Definição

Considerem-se uma reta δ e um ponto F não-pertencente a ela.
Chama-se **parábola** o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de F e δ.

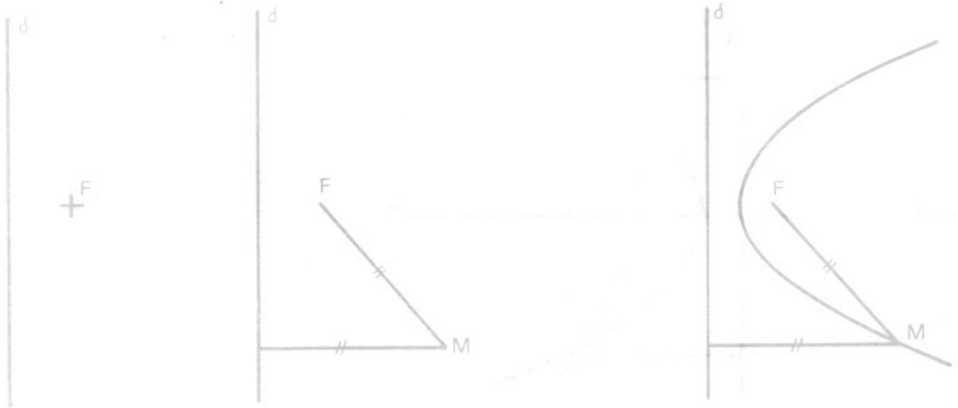
δ: lê-se **delta**. Letra minúscula do alfabeto grego.

Dessa definição, decorre que:

- Se M é um ponto da parábola, então:

$$\boxed{d(M, \delta) = MF}$$

- Todo ponto M que satisfaz a condição $d(M, \delta) = MF$ pertence à parábola.

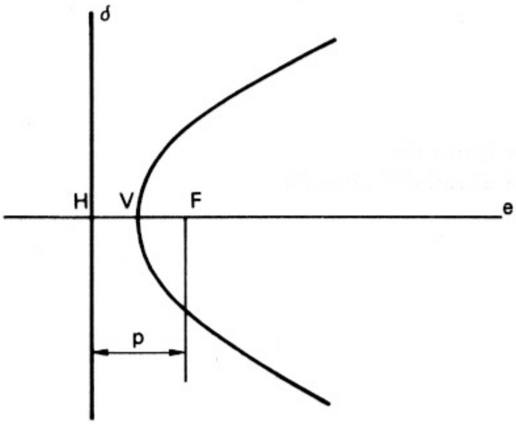


$d(M, \delta) = MF$

Alguns elementos da parábola

- **Foco**: É o ponto F.
- **Diretriz**: É a reta δ.
- **Eixo**: É a reta conduzida pelo foco perpendicularmente à diretriz.
- **Vértice**: É o ponto de intersecção do eixo com a parábola.
- **Parâmetro**: É a distância do foco à diretriz.

Resumindo



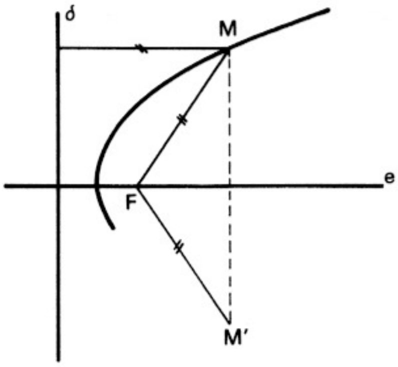
Foco: F
Diretriz: δ
Eixo: e
Vértice: V
Parâmetro: p
Note que V é o ponto médio de $\overline{FH}$ (por definição).

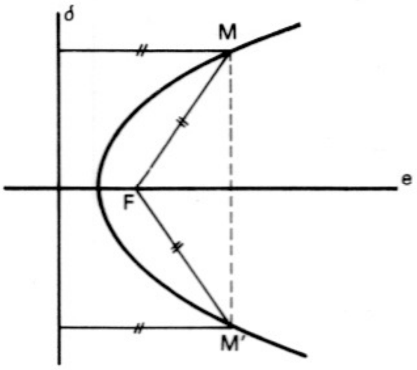
Eixo de simetria

Propriedade

O eixo de uma parábola é um **eixo de simetria** da mesma.

Seja M um ponto da parábola e M′ o seu simétrico em relação a **e**.
Queremos provar que M′ também pertence à parábola.





De fato, como F pertence ao eixo, temos:

$$\boxed{MF = M'F} \quad (1)$$

Como $\overline{MM'} \parallel \delta$, podemos concluir que:

$$\boxed{d\,(M, \delta) = d\,(M', \delta)} \quad (2)$$

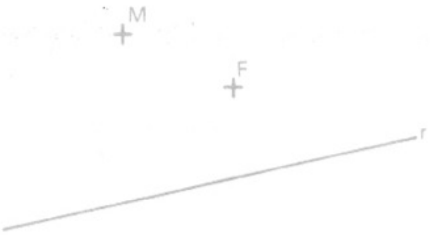
Finalmente, como M pertence à parábola, temos:

$$d\,(M, \delta) = FM \xRightarrow{(1)\text{ e }(2)} \boxed{d\,(M', \delta) = M'F}$$

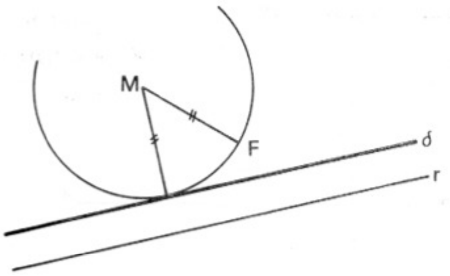
A última igualdade comprova que M′ pertence à parábola.

Exercícios

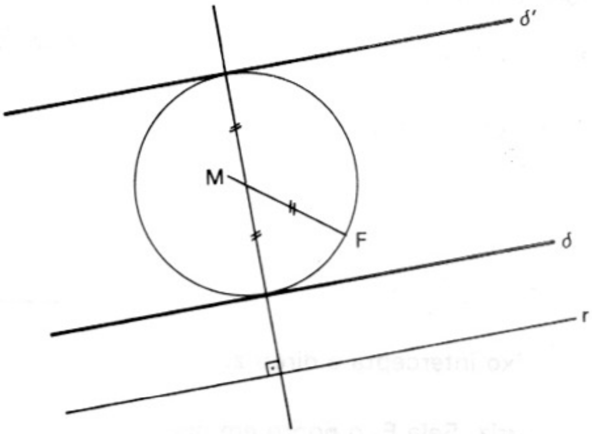
E12.**1** Construa a diretriz de uma parábola da qual são dados o foco, um ponto M e a direção **r** da diretriz.



Suposto resolvido

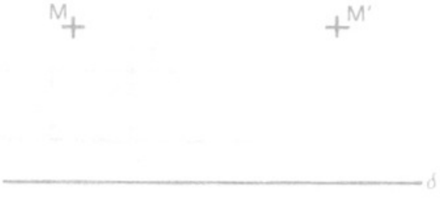


Resolução: Como d (M, δ) = MF, a diretriz é paralela a **r** e tangente à circunferência que tem centro em M e passa por F.

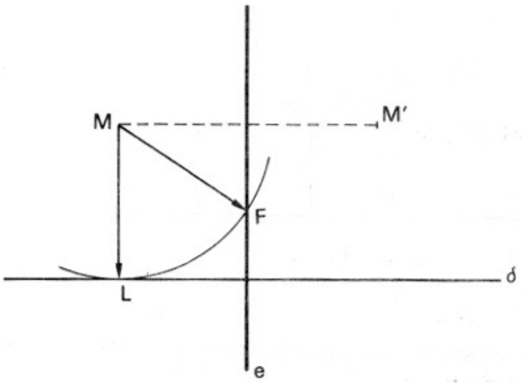


Note que o problema admite duas soluções: δ e δ'.

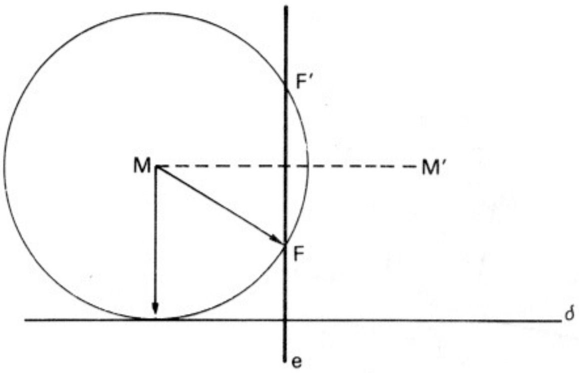
E12.**2** Obtenha o foco de uma parábola da qual são dados a diretriz e dois pontos M e M' simétricos em relação ao eixo.



Suposto resolvido



Resolução: O eixo **e** pode ser traçado, pois ele é a mediatriz de $\overline{MM'}$. Sendo L o pé da perpendicular a δ conduzida por M, então F se encontra na intersecção da circunferência de centro M e raio ML com o eixo.



Observe que o problema admitiu duas soluções: **F** e **F'**.

Resolva os exercícios 164 e 165 do caderno de atividades.

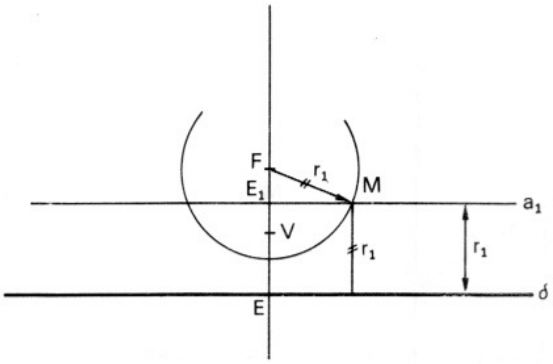
Construção da parábola por pontos

Problema

Construir uma parábola por pontos, dados o foco e a diretriz.

Resolução:

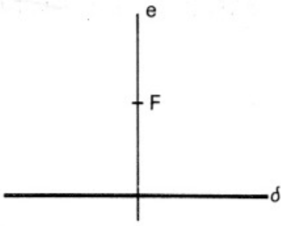
1.º) Traça-se o eixo **e**. Seja E o ponto em que o eixo intercepta a diretriz.
2.º) Determina-se o vértice, ponto médio de $\overline{FE}$.
3.º) Traça-se uma reta a_1, arbitrária paralela à diretriz. Seja E_1 o ponto em que a_1 intercepta o eixo.
4.º) Com centro em F e raio $r_1 = EE_1$, traça-se um arco de circunferência, o qual determina em a_1 dois pontos pertencentes à parábola.



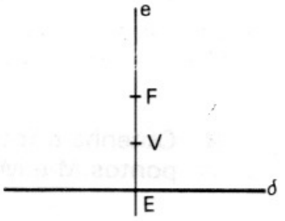
De fato, sendo M um qualquer desses dois pontos, tem-se d (M, δ) = MF. Assim, M pertence à parábola.

Evolução do traçado

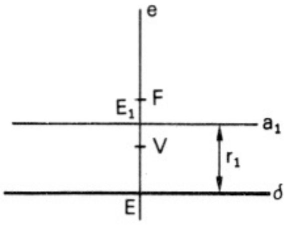
1.º passo



2.º passo



3.º passo



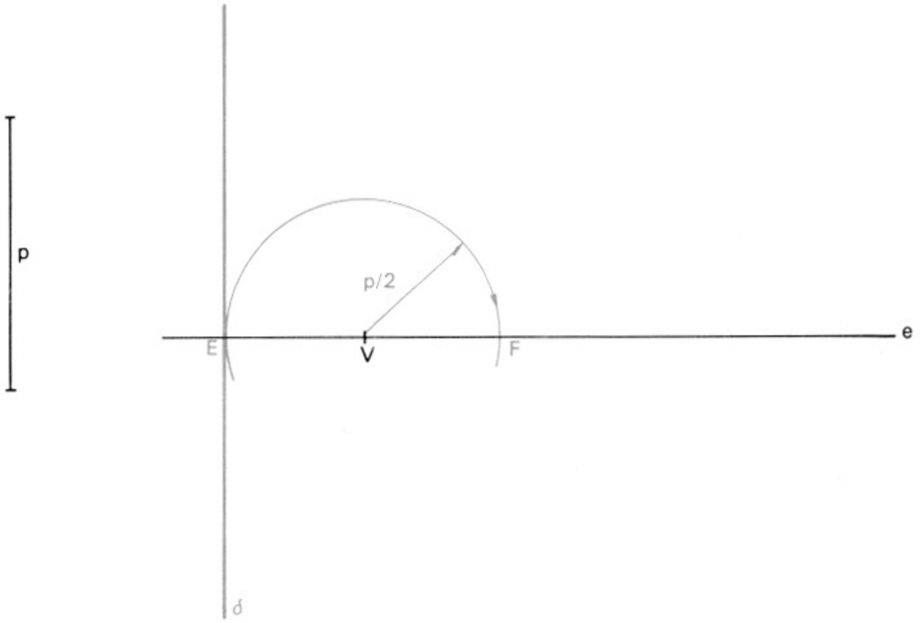
Note que r_1 é a distância de a_1 a δ.

Parábola: elementos

Figura auxiliar e anotações

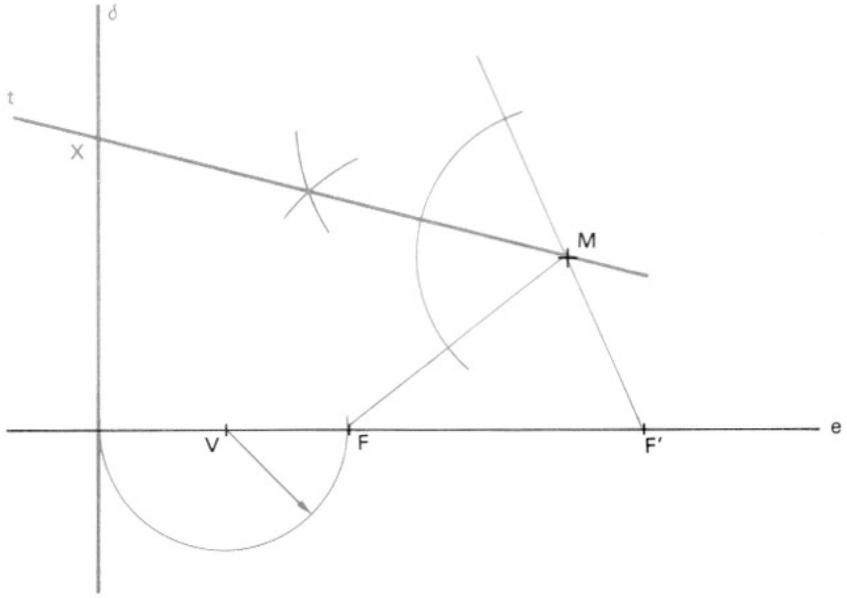
164 Construa a diretriz e o foco de uma parábola da qual são dados o eixo, o vértice e o parâmetro.

Observação:
Comente que os primeiros exercícios não apresentam dificuldades, mas são necessários apenas para que o aluno adquira familiaridade com os elementos da parábola.

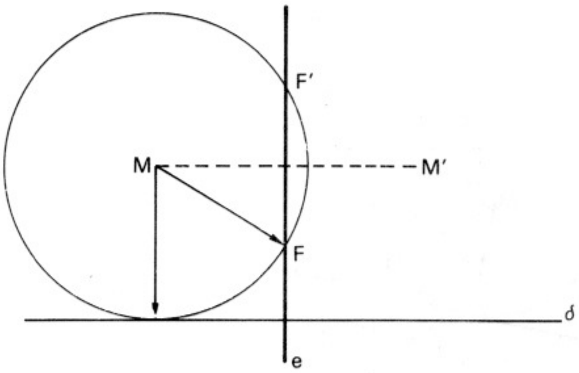


Há uma segunda solução em que d é a perpendicular a e conduzida por F. Nesse caso, o foco é o ponto E.

165 Os pontos F e F′ são focos de uma elipse à qual o ponto M pertence. O ponto F é também o foco de uma parábola de vértice V. Determine o ponto X em que a reta tangente à elipse em M intercepta a diretriz da parábola.



Resolução: O eixo **e** pode ser traçado, pois ele é a mediatriz de $\overline{MM'}$. Sendo L o pé da perpendicular a δ conduzida por M, então F se encontra na intersecção da circunferência de centro M e raio ML com o eixo.



Observe que o problema admitiu duas soluções: **F** e **F'**.

Resolva os exercícios 164 e 165 do caderno de atividades.

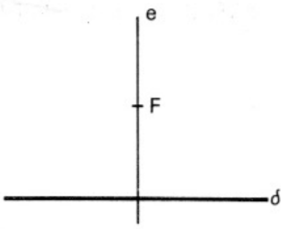
Construção da parábola por pontos

Problema

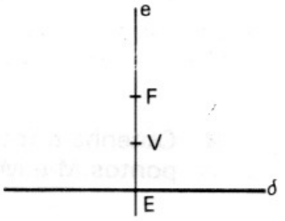
Construir uma parábola por pontos, dados o foco e a diretriz.

Evolução do traçado

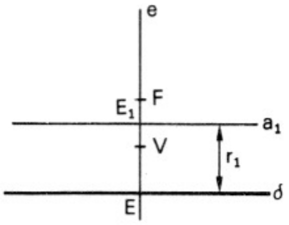
1.º passo



2.º passo

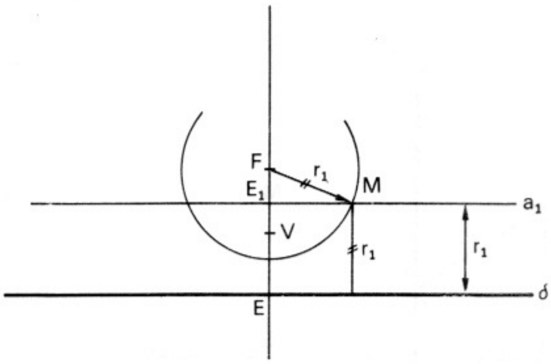


3.º passo



Resolução:

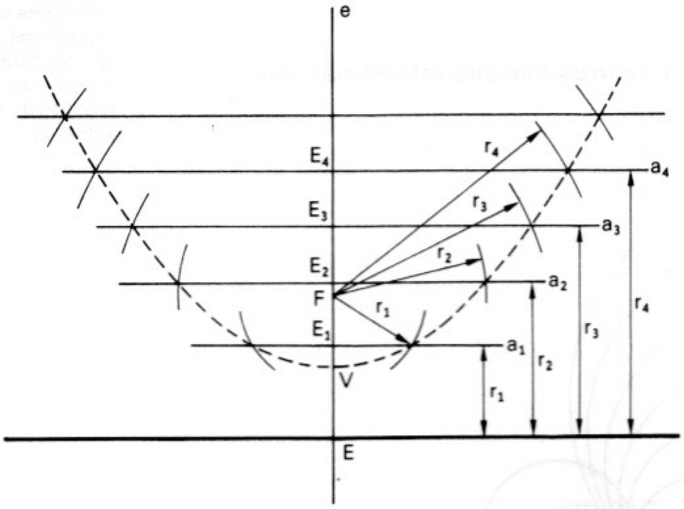
1.º) Traça-se o eixo **e**. Seja E o ponto em que o eixo intercepta a diretriz.
2.º) Determina-se o vértice, ponto médio de $\overline{FE}$.
3.º) Traça-se uma reta a_1, arbitrária paralela à diretriz. Seja E_1 o ponto em que a_1 intercepta o eixo.
4.º) Com centro em F e raio $r_1 = EE_1$, traça-se um arco de circunferência, o qual determina em a_1 dois pontos pertencentes à parábola.



De fato, sendo M um qualquer desses dois pontos, tem-se d (M, δ) = MF. Assim, M pertence à parábola.

Note que r_1 é a distância de a_1 a δ.

Para se obterem mais pontos da parábola, basta traçar as retas a_2, a_3, a_4, ..., paralelas a δ, determinando E_2, E_3, E_4... em **e**. Com centros em F e raios $r_2 = EE_2$, $r_3 = EE_3$ ... determinam-se em a_2, a_3 ..., respectivamente, outros pontos da parábola.



Resolva os exercícios 166 e 167 do caderno de atividades.

Observação: Para construir uma parábola por pontos, é necessário conhecer o foco e a diretriz.

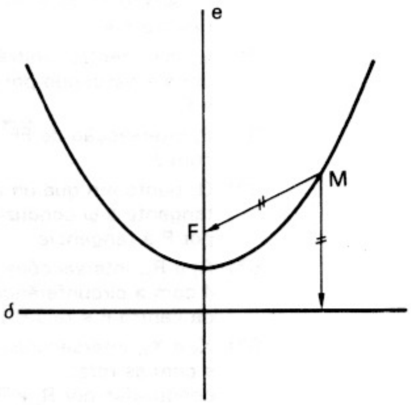
Segunda definição da parábola

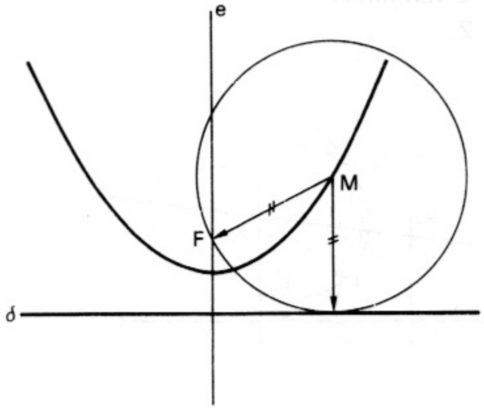
A exemplo do que ocorre com a elipse e a hipérbole, pode-se definir a parábola como lugar geométrico de **centros** de circunferências que obedecem a certas condições. Para tanto, vamos examinar uma propriedade que decorre imediatamente da definição já dada.

Propriedade

Toda circunferência que tem centro num ponto qualquer da parábola e passa pelo foco é tangente à diretriz.

Com efeito, seja M um ponto qualquer da parábola. Como d (M, δ) = FM, a circunferência de centro M e que passa por F é tangente à diretriz.

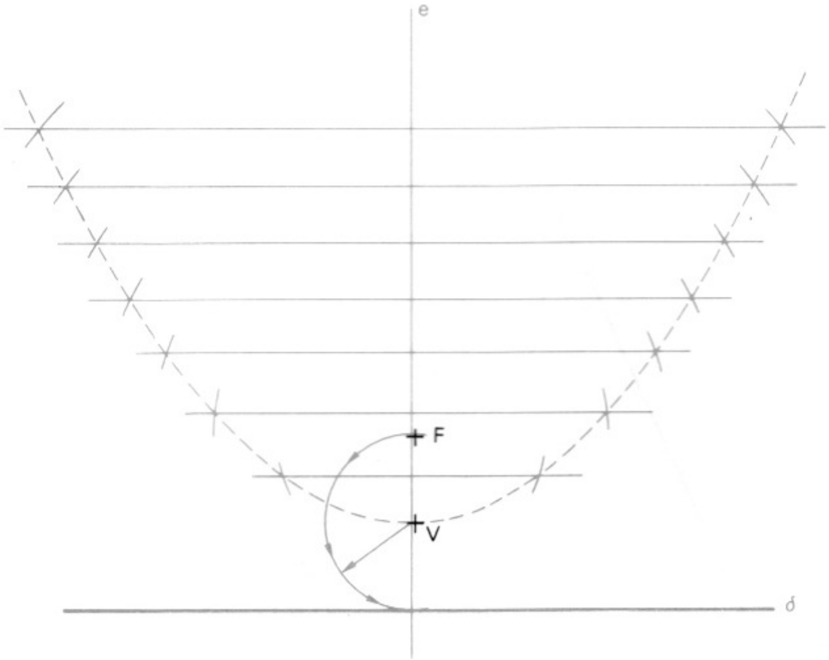




Parábola: construção por pontos

Figura auxiliar e anotações

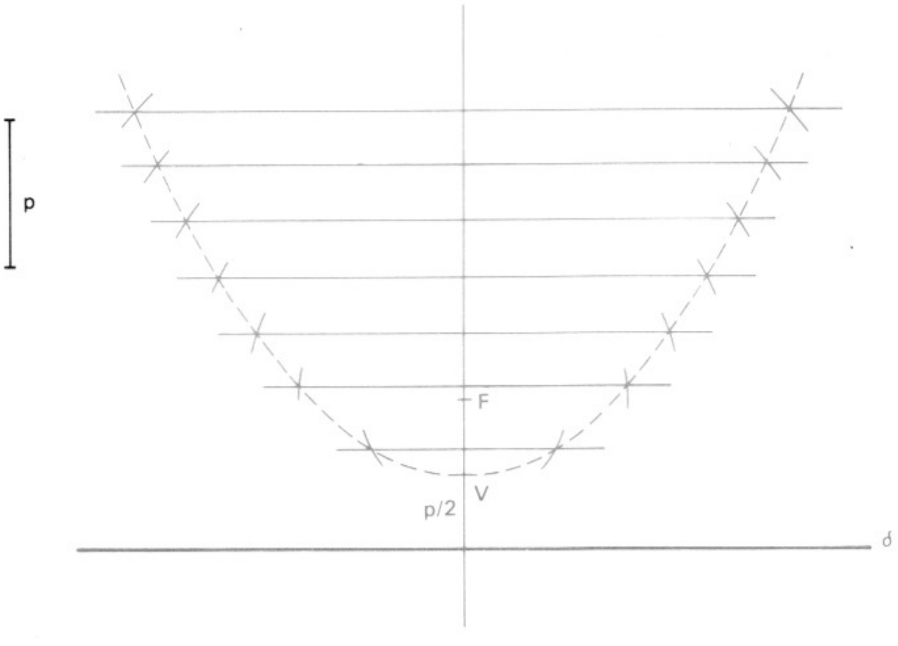
166 Construa uma parábola por pontos, dados o foco e o vértice.



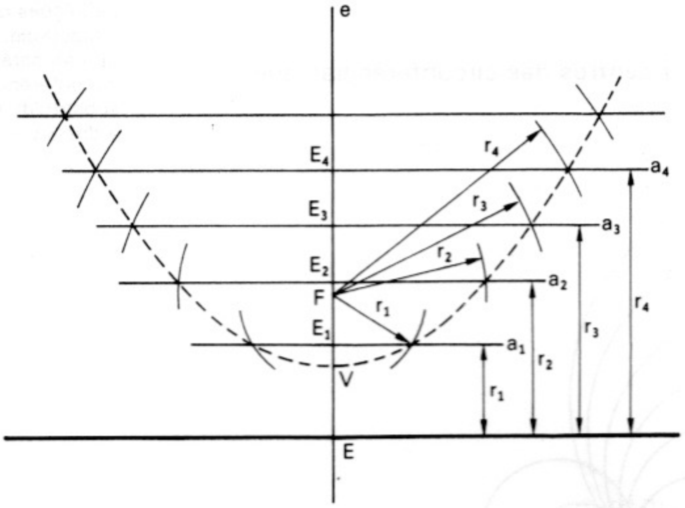
167 Construa uma parábola por pontos, dado o parâmetro.

Observação: Evidentemente, a escolha da posição para a construção é arbitrária.

Sugestão:
Proponha a mesma construção fornecendo um parâmetro menor do que o dado, para que o aluno perceba como muda o aspecto da parábola em função do parâmetro.



Para se obterem mais pontos da parábola, basta traçar as retas a_2, a_3, a_4, ..., paralelas a δ, determinando E_2, E_3, E_4... em **e**. Com centros em F e raios $r_2 = EE_2$, $r_3 = EE_3$ ... determinam-se em a_2, a_3 ..., respectivamente, outros pontos da parábola.



Resolva os exercícios 166 e 167 do caderno de atividades.

Observação: Para construir uma parábola por pontos, é necessário conhecer o foco e a diretriz.

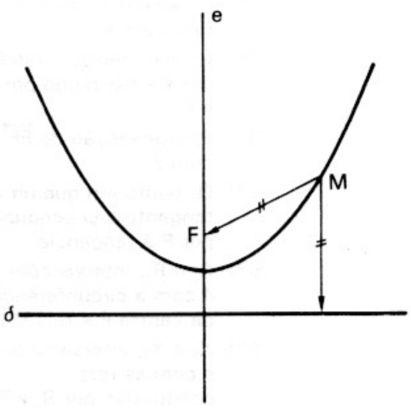
Segunda definição da parábola

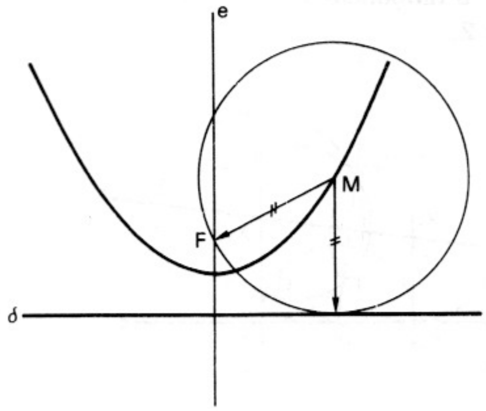
A exemplo do que ocorre com a elipse e a hipérbole, pode-se definir a parábola como lugar geométrico de **centros** de circunferências que obedecem a certas condições. Para tanto, vamos examinar uma propriedade que decorre imediatamente da definição já dada.

Propriedade

Toda circunferência que tem centro num ponto qualquer da parábola e passa pelo foco é tangente à diretriz.

Com efeito, seja M um ponto qualquer da parábola. Como $d(M, \delta) = FM$, a circunferência de centro M e que passa por F é tangente à diretriz.





Reciprocamente, **toda circunferência que passa pelo foco e tangencia a diretriz tem o centro pertencente à parábola.**

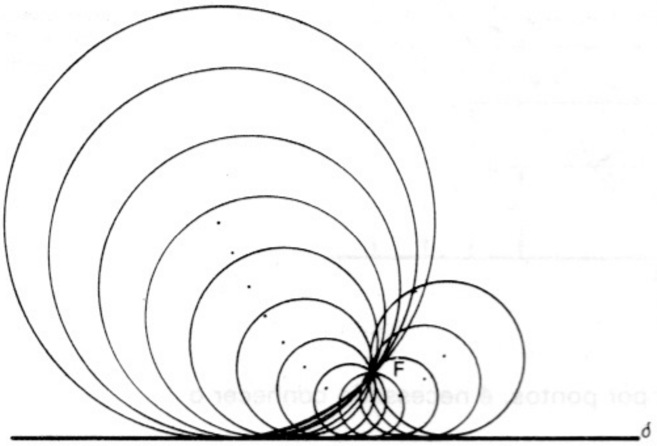
Então, a seguinte definição é equivalente àquela que foi apresentada.

Definição

Sejam dados um ponto F e uma reta δ.

Chama-se **parábola** o lugar geométrico dos **centros** das circunferências que passam por F e são tangentes a δ.

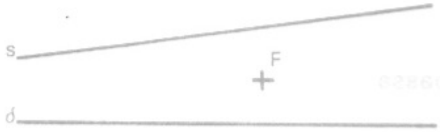
Note que esta definição é análoga às segundas definições dadas para elipse e hipérbole. A diferença é que na parábola a circunferência diretora é substituída por uma reta — a diretriz.



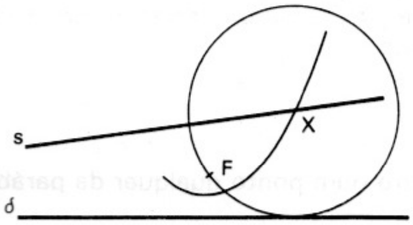
Passemos, agora, ao problema da intersecção de uma reta com uma parábola.

Problema

Determinar o ponto de intersecção de uma reta **s** com uma parábola, da qual são dados o foco e a diretriz.



Suposto resolvido



Convém você reestudar o **pt 2**.

Resolução: Seja X um dos pontos procurados. Pela segunda definição de parábola, o problema pode ser enunciado da seguinte forma:

Dados um ponto F **e duas retas** δ **e** s**, determinar em** s **o centro** X **de uma circunferência que passa por** F **e tangencia** δ.

Assim, o problema recai no **pt 2**.

Resumidamente, veja a seqüência em que se fez a construção:

1.º) F′, simétrico de F em relação a **s**.

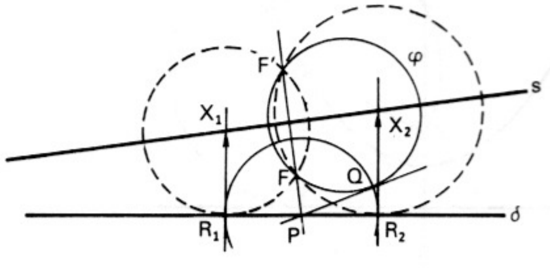
2.º) φ, com centro arbitrário em **s** e passando por F e F′.

3.º) P, intersecção de $\overleftrightarrow{FF'}$ com δ.

4.º) Q, ponto em que uma tangente a φ conduzida por P a tangencia.

5.º) R_1 e R_2, intersecções de δ com a circunferência de centro P e raio $\overline{PQ}$.

6.º) X_1 e X_2, intersecções de **s** com as retas conduzidas por R_1 e R_2 perpendicularmente a δ.



Os pontos de intersecção de **s** com a parábola são X_1 e X_2.

Exercícios

E12.**3** Uma parábola tem parâmetro p = 20 mm. Uma reta **s** passa pelo vértice, forma com a diretriz um ângulo de 45° e intercepta a parábola num segundo ponto X (o primeiro é o próprio vértice). Determine, aproximadamente, a distância de X ao foco da parábola.

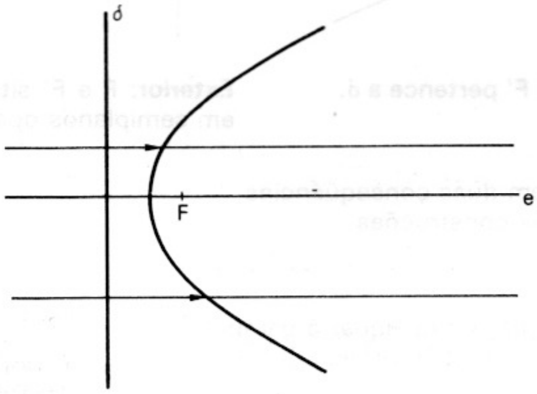
E12.**4** Numa parábola de parâmetro p = 16 mm, o eixo intercepta a diretriz num ponto E. Uma reta **s** intercepta a diretriz num ponto distante 50 mm de E, forma um ângulo de 30° com a mesma e encontra a parábola nos pontos A e B. Qual é, aproximadamente, a medida de $\overline{AB}$?

Resolva os exercícios 168 e 169 do caderno de atividades.

Tangência de reta e parábola

Pelo mesmo raciocínio que usamos para a elipse e a hipérbole, vamos analisar a propriedade que possui a reta tangente à parábola. Para isso, basta observar que uma reta e uma parábola tangentes possuem um único ponto de intersecção. Assim, para que haja a tangência, é necessário que o problema da intersecção da reta com a parábola tenha solução única, isto é, o foco, a diretriz e a tangente devem estar posicionados de modo a fazer com que o **pt 2** tenha uma única solução.

Porém, é preciso observar que o fato de a reta e a parábola terem um único ponto comum não é suficiente para garantir a tangência, pois qualquer reta perpendicular à diretriz intercepta a parábola num único ponto, mas não é tangente a ela.



Excluindo as perpendiculares à diretriz, toda reta que tem um único ponto comum com uma parábola é tangente a ela e, da observação que segue a resolução do **pt 2**, podemos enunciar a propriedade que garante a tangência.

Propriedade fundamental da tangência

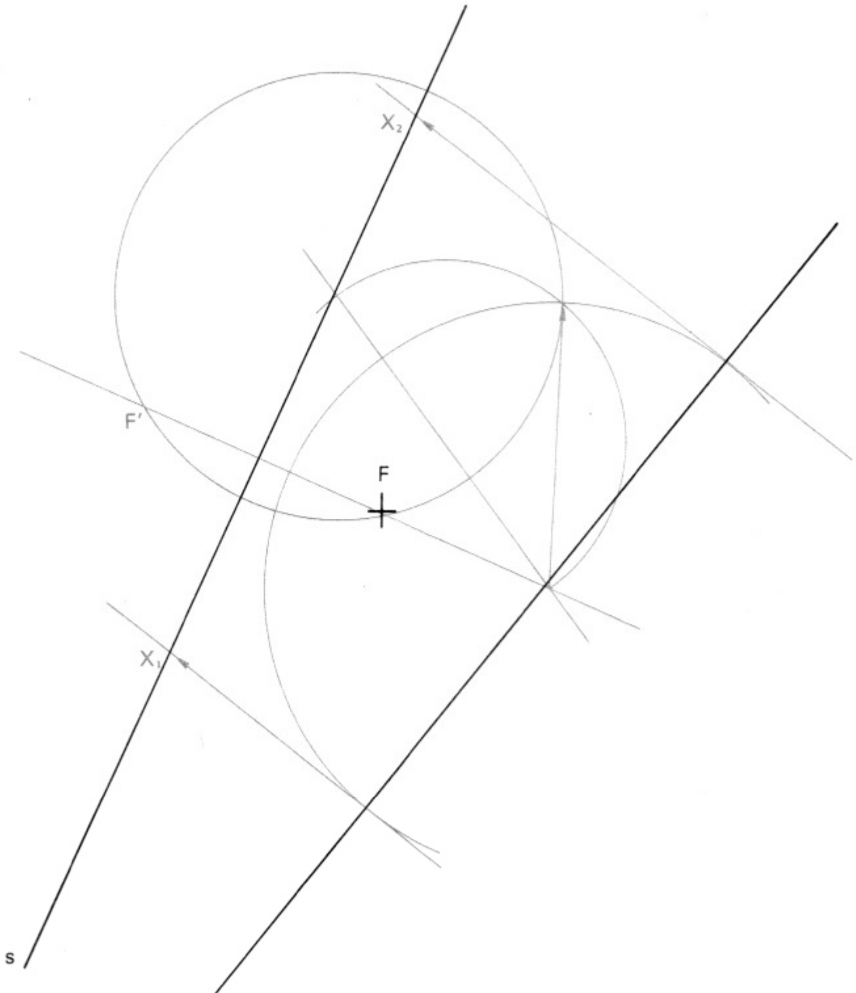
Propriedade

Uma reta e uma parábola são tangentes quando, e somente quando, o simétrico do foco em relação à reta pertence à diretriz.

Parábola: intersecção com a reta

Figura auxiliar e anotações

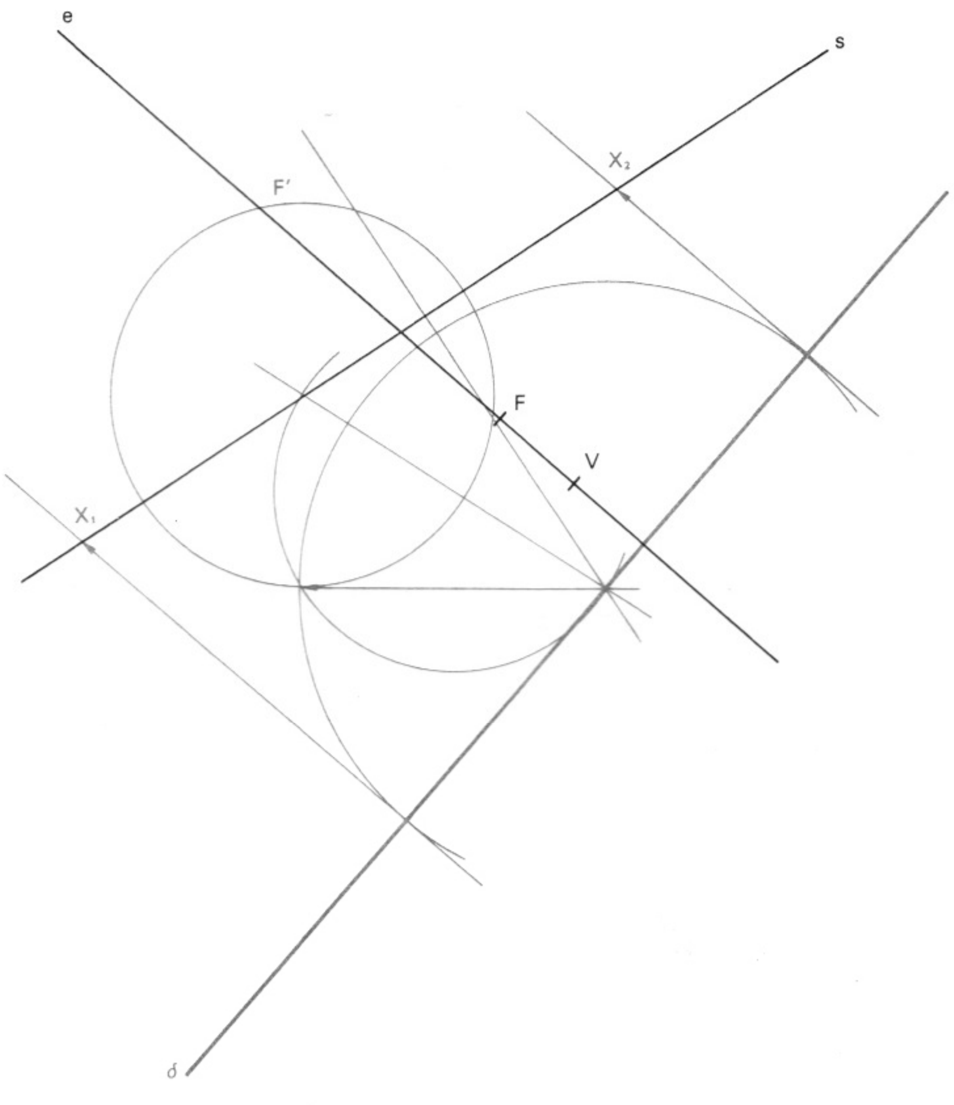
168 Obtenha os pontos de intersecção da reta **s** com a parábola de foco F e diretriz δ.



Parábola: intersecção com a reta

Figura auxiliar e anotações

169 Determine os pontos de intersecção da reta **s** com a parábola de eixo **e**, foco F e vértice V.



Exercícios

E12.**3** Uma parábola tem parâmetro p = 20 mm. Uma reta **s** passa pelo vértice, forma com a diretriz um ângulo de 45° e intercepta a parábola num segundo ponto X (o primeiro é o próprio vértice). Determine, aproximadamente, a distância de X ao foco da parábola.

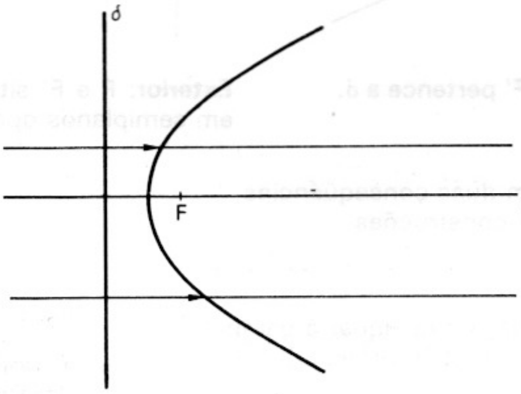
E12.**4** Numa parábola de parâmetro p = 16 mm, o eixo intercepta a diretriz num ponto E. Uma reta **s** intercepta a diretriz num ponto distante 50 mm de E, forma um ângulo de 30° com a mesma e encontra a parábola nos pontos A e B. Qual é, aproximadamente, a medida de $\overline{AB}$?

Resolva os exercícios 168 e 169 do caderno de atividades.

Tangência de reta e parábola

Pelo mesmo raciocínio que usamos para a elipse e a hipérbole, vamos analisar a propriedade que possui a reta tangente à parábola. Para isso, basta observar que uma reta e uma parábola tangentes possuem um único ponto de intersecção. Assim, para que haja a tangência, é necessário que o problema da intersecção da reta com a parábola tenha solução única, isto é, o foco, a diretriz e a tangente devem estar posicionados de modo a fazer com que o **pt 2** tenha uma única solução.

Porém, é preciso observar que o fato de a reta e a parábola terem um único ponto comum não é suficiente para garantir a tangência, pois qualquer reta perpendicular à diretriz intercepta a parábola num único ponto, mas não é tangente a ela.

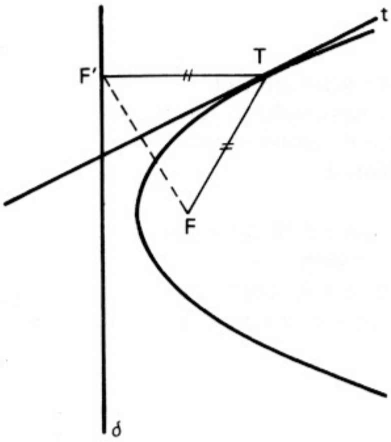


Excluindo as perpendiculares à diretriz, toda reta que tem um único ponto comum com uma parábola é tangente a ela e, da observação que segue a resolução do **pt 2**, podemos enunciar a propriedade que garante a tangência.

Propriedade fundamental da tangência

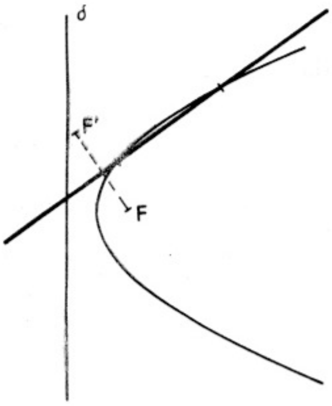
Propriedade

Uma reta e uma parábola são tangentes quando, e somente quando, o simétrico do foco em relação à reta pertence à diretriz.

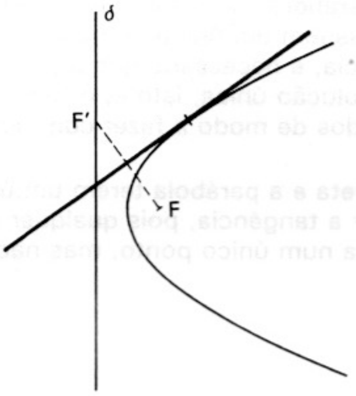


Note que t é a mediatriz de $\overline{FF'}$.

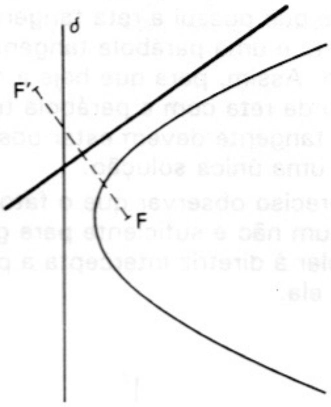
Observação: Note o que ocorre com o simétrico do foco de uma parábola em relação a uma reta não-perpendicular ao eixo, conforme essa reta é secante, tangente ou exterior à parábola. Com relação à diretriz δ e com os dois semiplanos que ela determina, temos:



Secante: F e F' situam-se num mesmo semiplano.



Tangente: F' pertence a δ.



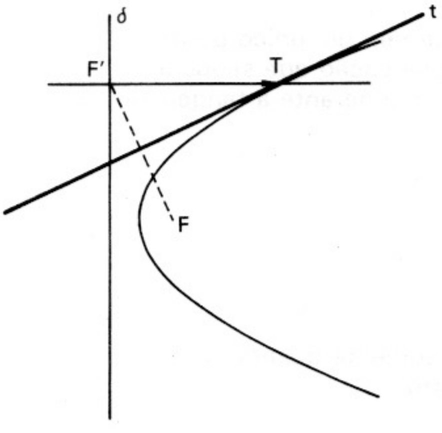
Exterior: F e F' situam-se em semiplanos opostos.

Da propriedade fundamental da tangência decorrem duas conseqüências importantes que são freqüentemente aplicadas nas construções.

Propriedade

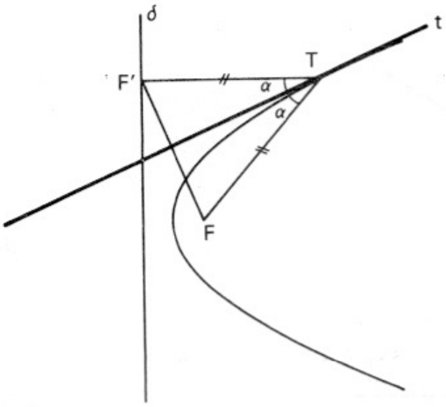
Se F' é o simétrico do foco em relação a uma tangente **t** qualquer à parábola, então a reta conduzida por F' perpendicularmente à diretriz intercepta **t** no ponto T de tangência.

Atenção! Essa propriedade permite determinar o ponto de tangência nas construções.

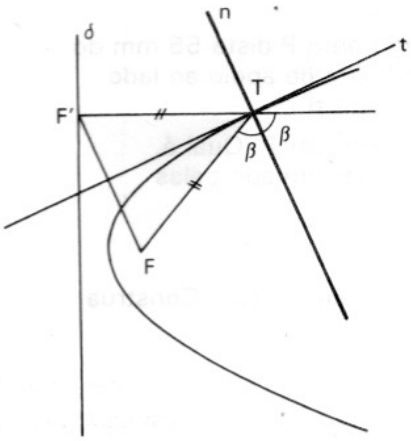


Propriedade

A reta tangente à parábola num ponto T qualquer da mesma contém a bissetriz interna do vértice T do triângulo FTF′, onde F′ é o simétrico do foco F em relação à tangente.



Observação: Dessa propriedade, decorre que a **normal** à parábola no ponto T contém as **bissetrizes externas** do vértice T do triângulo FTF′.

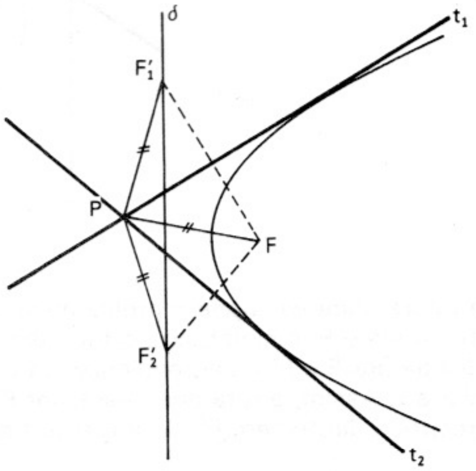


Exercícios

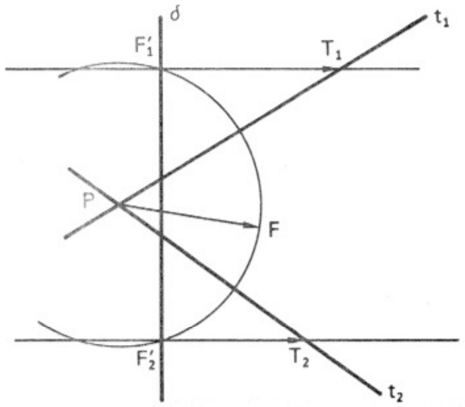
E12.**5** Trace por um ponto P as retas tangentes a uma parábola da qual se conhecem o foco e a diretriz.

◁ IMPORTANTE

Suposto resolvido



Resolução: Sejam t_1 e t_2 as tangentes procuradas e F_1' e F_2' os simétricos do foco em relação a elas. Ora, como t_1 é a mediatriz de $\overline{FF_1'}$ e t_2 é a mediatriz de $\overline{FF_2'}$, o ponto P é eqüidistante de F, F_1' e F_2'. Então, a circunferência que tem centro em P e passa por F intercepta δ em F_1' e F_2'. Obtidos esses dois pontos, é imediato o traçado das tangentes.



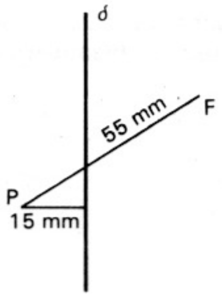
t_1 e t_2 são as mediatrizes de $\overline{FF_1'}$ e $\overline{FF_2'}$.

As retas perpendiculares a δ conduzidas por F_1' e F_2' interceptam t_1 e t_2 nos pontos T_1 e T_2 de tangências.

E12.6 Numa parábola de parâmetro p = 36 mm, um ponto P dista 55 mm do foco e 15 mm da diretriz, conforme indica a figura de apoio ao lado.

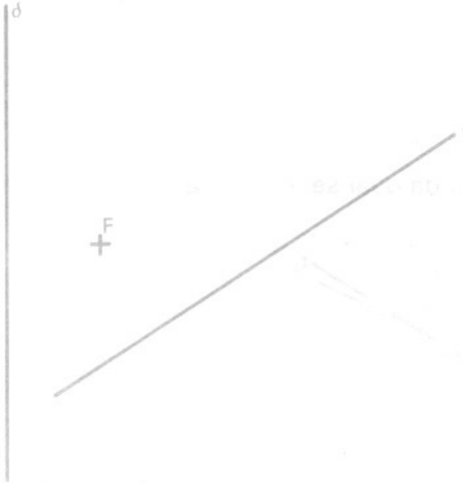
a) Construa a diretriz e obtenha o foco e o ponto P.

b) Construa as tangentes à parábola que passam por P. Qual é, aproximadamente, a medida do menor ângulo formado pelas tangentes?

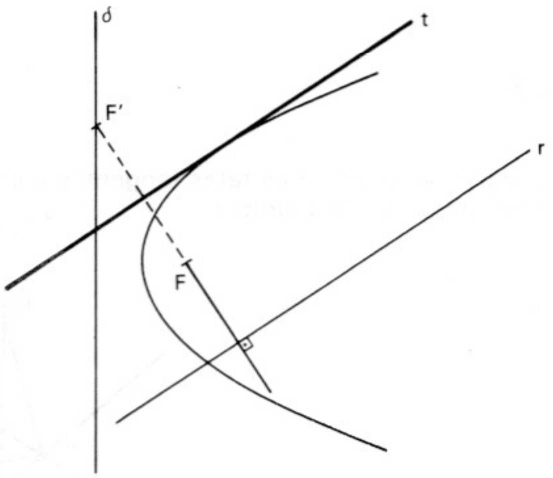


E12.7 São dados a diretriz e o foco de uma parábola e uma reta **r**. Construa uma reta paralela a **r** e tangente à parábola.

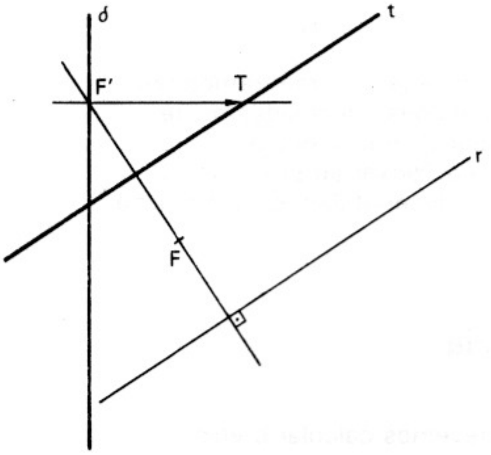
◁ IMPORTANTE



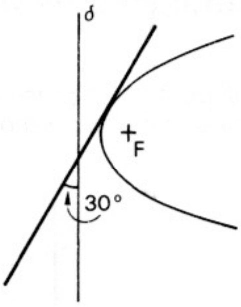
Suposto resolvido



Resolução: Observe a figura onde se supõe o problema já resolvido. Sendo **t** a tangente procurada e F' o simétrico do foco em relação a ela, então a reta conduzida por F e F' é perpendicular a **t** e, portanto, é também perpendicular a **r**. Assim, a reta que passa por F e é perpendicular a **r** intercepta a diretriz em F'. A tangente **t** é a mediatriz de $\overline{FF'}$.



A perpendicular a δ conduzida por F' intercepta a tangente no ponto de tangência.



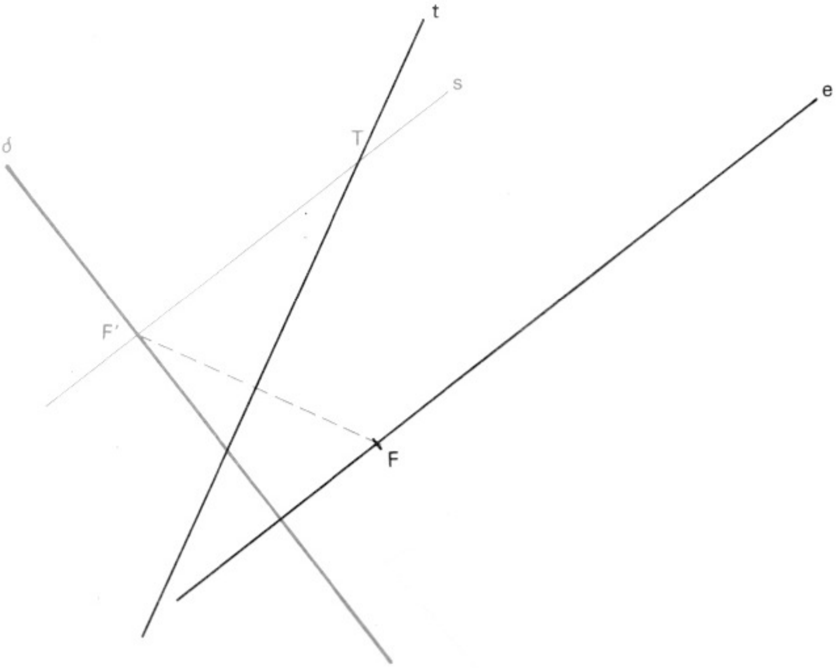
E12.8 Uma reta tangente a uma parábola de parâmetro p = 40 mm forma com a diretriz um ângulo de 30°, conforme indica a figura ao lado. Qual é, aproximadamente, a distância do foco ao ponto de tangência?

Resolva os exercícios de 170 a 174 do caderno de atividades.

Parábola: tangência

Figura auxiliar e anotações

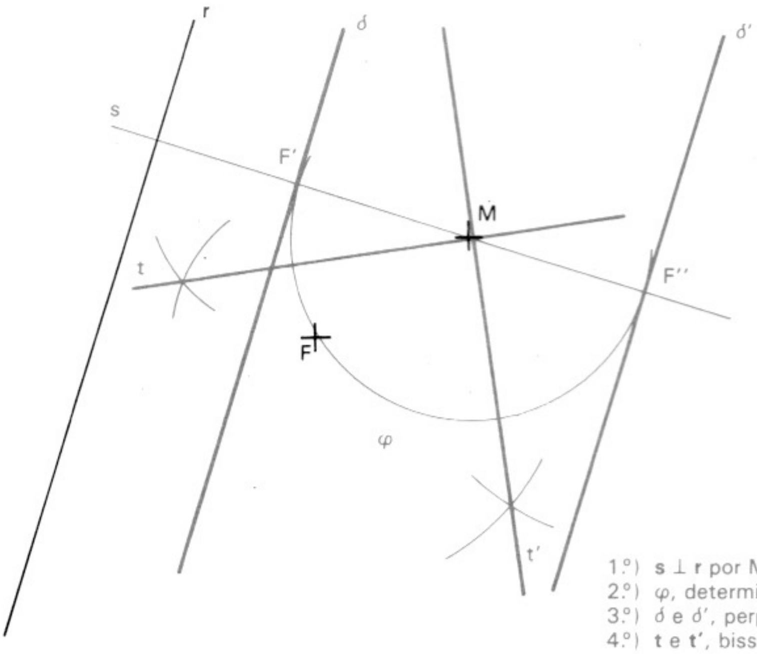
170 De uma parábola são dados o foco, o eixo e uma tangente. Construa a diretriz e obtenha o ponto de tangência.



1.°) F′, simétrico de F em relação a **t**.
2.°) δ, perpendicular a **e** passando por F′.
3.°) **s**, perpendicular a δ em F′, determinando T.

171 O ponto M pertence a uma parábola de foco F e a reta **r** é paralela à sua diretriz. Construa a diretriz e a reta tangente à parábola no ponto M.

Observação:
Comente que nas duas soluções obtidas (δ, **t** e δ′, **t′**) quando se assume, por exemplo, δ como diretriz e **t** como tangente, então **t′** é a normal em M, e na outra solução, δ′ e **t′**, **t** é a normal.

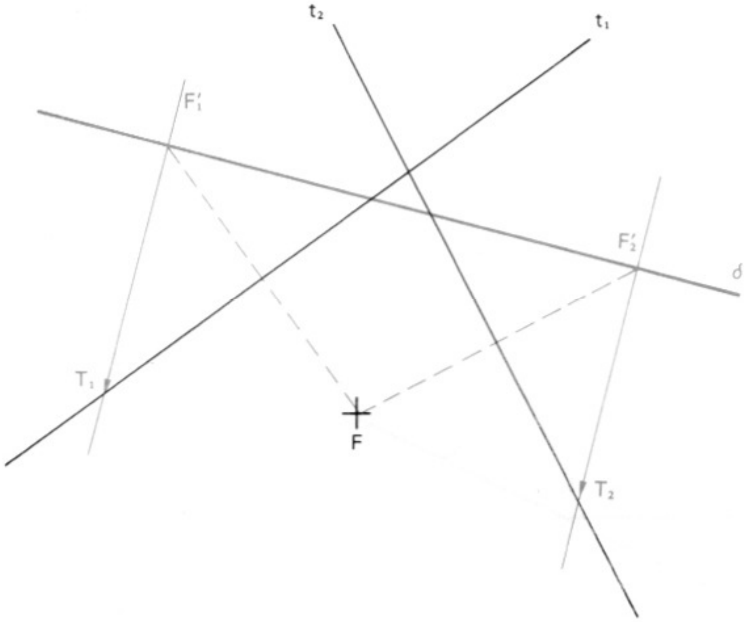


1.°) **s** ⊥ **r** por M.
2.°) φ, determinando F′ e F″.
3.°) δ e δ′, perpendiculares a **s** por F′ e F″.
4.°) **t** e **t′**, bissetrizes de ∡ $F\hat{M}F'$ e ∡ $F\hat{M}F''$.

Parábola: tangência

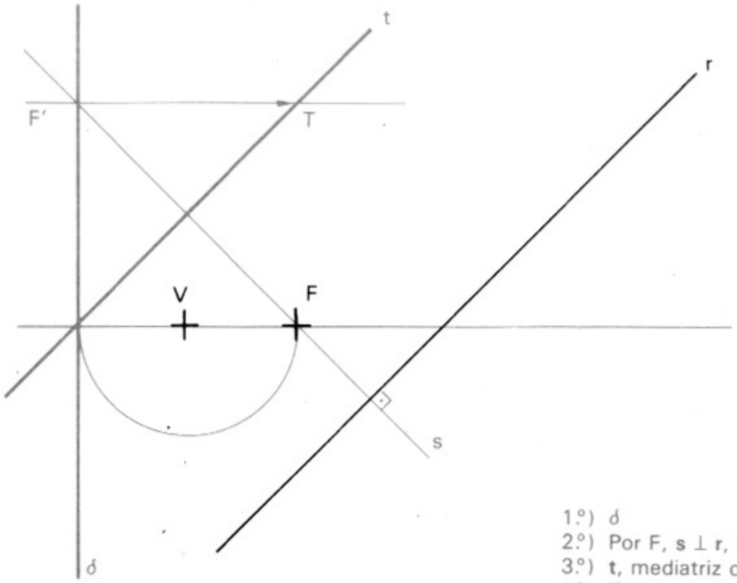
172 Construa a diretriz de uma parábola da qual são dados o foco e duas tangentes. Em seguida, determine os pontos de tangência.

Sugestão: Como os simétricos dos focos em relação às tangentes pertencem à diretriz, você pode obter dois pontos dela.



1.º) F'_1 e F'_2, simétricos de F em relação a t_1 e t_2.
2.º) δ por F'_1 e F'_2.
3.º) T_1 e T_2, pontos de tangência.

173 São dados o foco e o vértice de uma parábola e uma reta **r**. Construa a reta paralela a **r** e tangente à parábola, e obtenha o ponto de tangência.



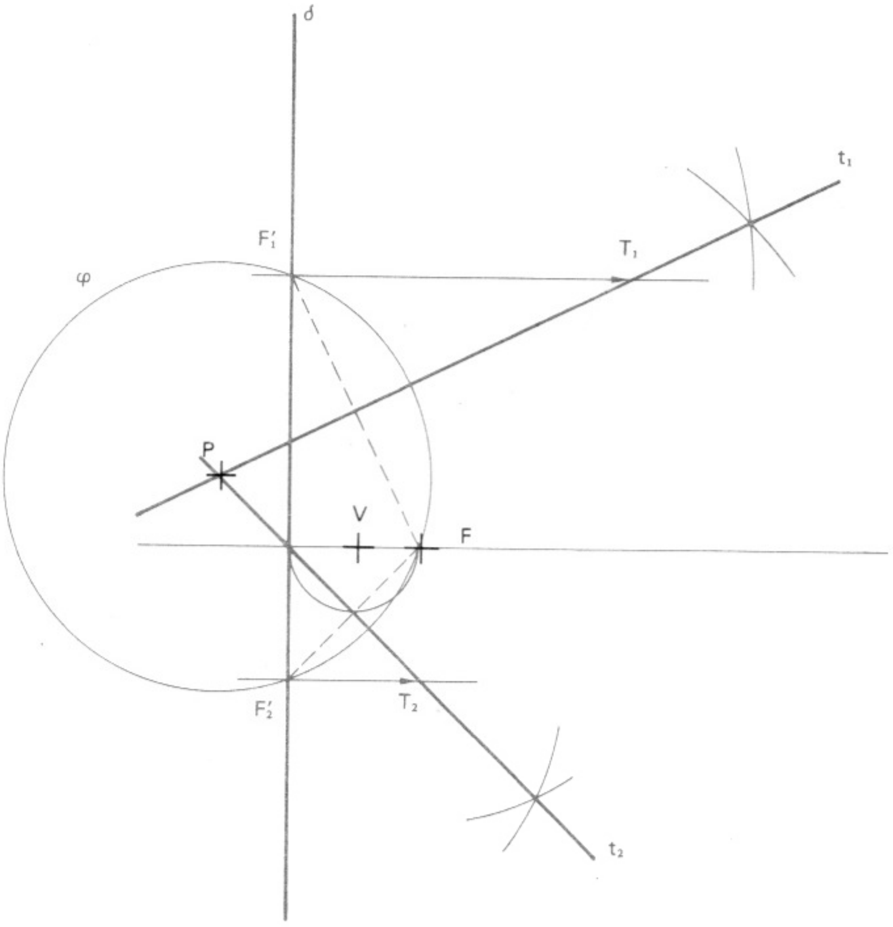
1.º) δ
2.º) Por F, **s** ⊥ **r**, determinando F'.
3.º) **t**, mediatriz de $\overline{FF'}$.
4.º) T, ponto de tangência.

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Os problemas correspondentes a esse de elipse e hipérbole exigem que se forneçam um foco e três tangentes, pois aquelas cônicas possuem circunferências diretoras, as quais ficam determinadas com três pontos. Comente isso com o aluno.

Parábola: tangência

174 Construa as retas que passam por P e tangenciam a parábola de foco e vértice dados e obtenha os pontos de tangência.



1.º) δ
2.º) φ, centro em P e passando por F, determinando F'_1 e F'_2.
3.º) t_1 e t_2, mediatrizes de $\overline{FF'_1}$ e $\overline{FF'_2}$.
4.º) T_1 e T_2, pontos de tangência.

6

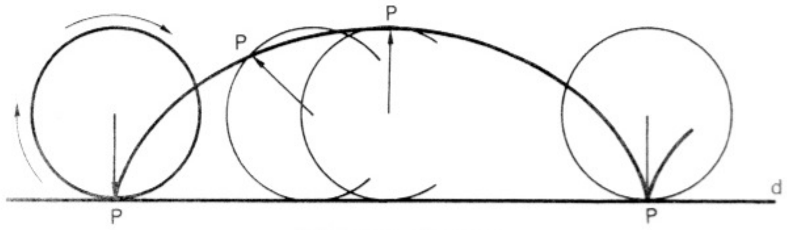
Ciclóides

Definição

Chama-se **ciclóide** uma curva plana descrita por um ponto de um raio (ou do prolongamento de um raio) de uma circunferência que rola sem escorregamento sobre uma reta.

Observação: Na definição acima, a circunferência é denominada **circunferência geradora** e a reta é denominada **diretriz**. O ponto que descreve a ciclóide é chamado **ponto gerador**.

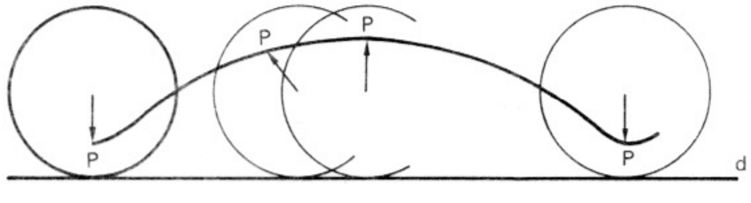
Se o ponto P gerador da ciclóide pertence à circunferência geradora, então a ciclóide é denominada **simples** ou **normal**.



Ciclóide simples

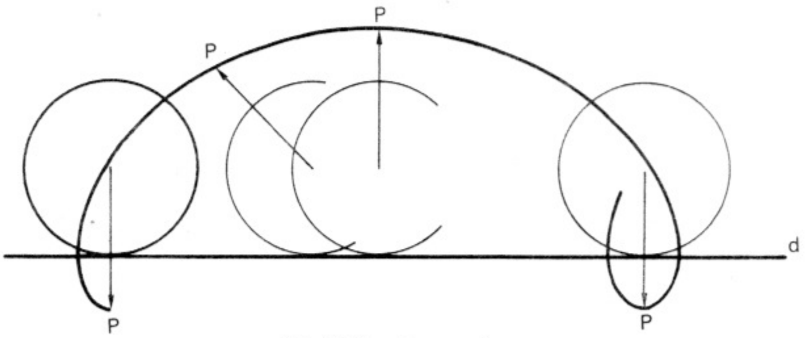
A figura ao lado mostra um ciclo da ciclóide simples, isto é, uma porção da ciclóide descrita pelo ponto P quando a circunferência geradora completa uma volta inteira.

Se o ponto gerador está no interior da circunferência geradora, a ciclóide é denominada **encurtada**.



Ciclóide encurtada

Por fim, se o ponto gerador é externo à circunferência geradora, a ciclóide é denominada **alongada**.



Ciclóide alongada

A cada volta completa da circunferência geradora o ponto P descreve um **ciclo** ou um **período** da ciclóide. Assim, a ciclóide é uma curva periódica, isto é, ela repete-se periodicamente em idênticas condições.

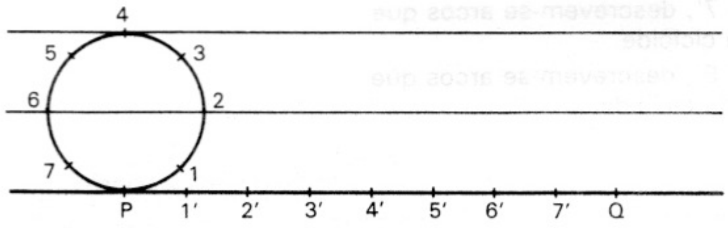
Construção de ciclóides

Construção da ciclóide simples

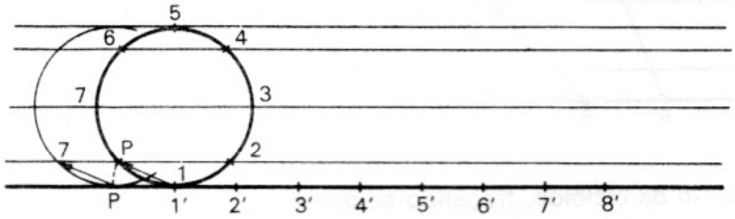
Não é possível construir uma ciclóide através de um traçado contínuo, utilizando apenas régua e compasso. Mas, com esses dois instrumentos, é possível determinar tantos pontos de uma ciclóide quantos se quiser. Desse modo, a construção dessa curva é feita por pontos, a exemplo do que ocorre nas construções das cônicas.

Para facilitar a compreensão da construção da ciclóide, imagine que ao longo do período em que a circunferência geradora completa uma volta inteira, sejam registrados *flashes* do seu movimento, identificando algumas posições do ponto P gerador.

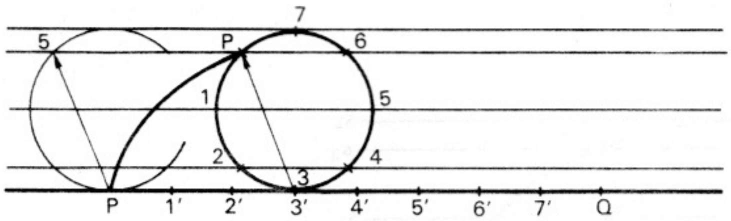
Nas figuras seguintes, o comprimento do segmento PQ é igual ao comprimento da circunferência geradora. Além disso, tanto $\overline{PQ}$ quanto a circunferência estão divididos em oito partes iguais.



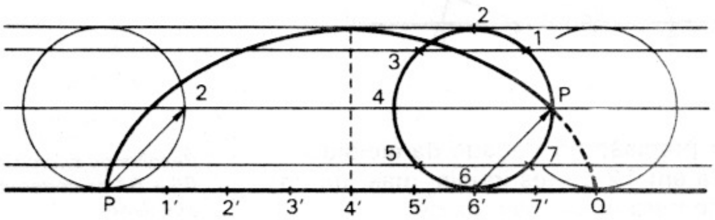
Primeiramente, observe que, conforme a circunferência geradora rola sobre a diretriz, o ponto 1 cai em 1′, 2 em 2′, 3 em 3′, e assim por diante.



Quando o ponto 1 passa para a posição 1′, o ponto P vai para a posição em que se encontrava o ponto 7 na situação inicial.



Quando o ponto 3 passa para a posição 3′, o ponto P vai para a posição em que se encontrava o ponto 5 na situação inicial.

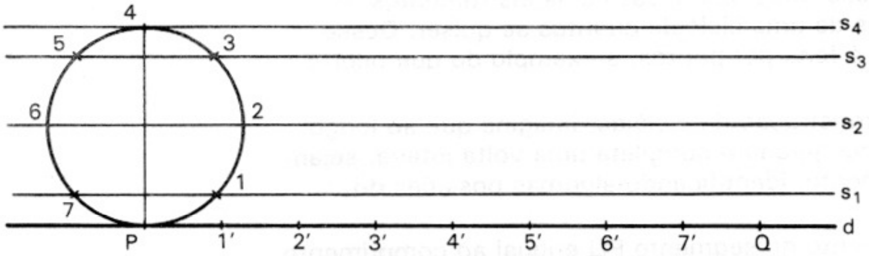


Quando 6 cai em 6′, o ponto P passa para a posição em que se encontrava o ponto 2 na situação inicial.

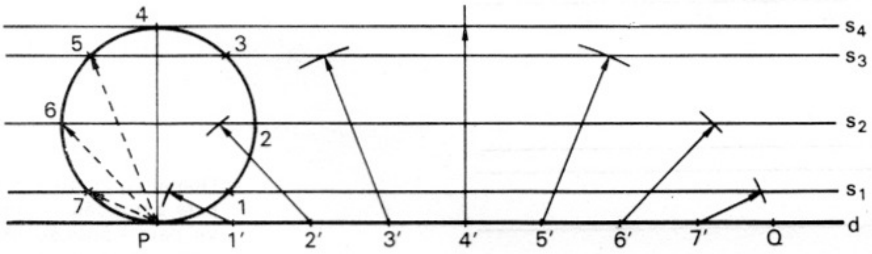
A partir dessas imagens do desenvolvimento de uma ciclóide, passemos à sua construção. Para tanto, vamos supor que o ponto gerador seja o ponto P em que a circunferência geradora tangencia a diretriz na posição inicial.

Se necessário, para a retificação da circunferência, consulte o volume 2 desta coleção.

1.º) Determina-se Q sobre a diretriz, de modo que $\overline{PQ}$ seja a retificação da circunferência geradora.
2.º) Dividem-se $\overline{PQ}$ e a circunferência geradora em um mesmo número de partes iguais. Por exemplo, 8 partes.
3.º) Pelos pontos de divisão da circunferência traçam-se as retas s_1, s_2, s_3 e s_4 paralelas à diretriz.

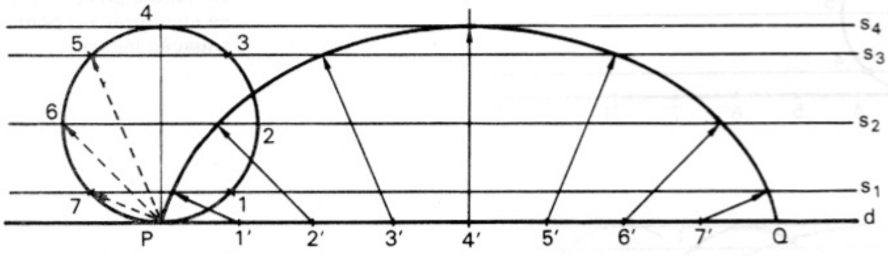


4.º) Com raio P7 (ou P1) e centros em 1′ e 7′, descrevem-se arcos que determinam em s_1 dois pontos da ciclóide.
5.º) Com raio Pb (ou P2) e centros em 2′ e 7′, descrevem-se arcos que determinam em s_2 mais dois pontos da ciclóide.
6.º) Com raio P5 (ou P3) e centros em 3′ e 5′, descrevem-se arcos que determinam em s_3 outros dois pontos da ciclóide.



7.º) Por fim, determina-se em s_4 mais um ponto da ciclóide, traçando-se por 4′ uma perpendicular à diretriz.

Então, unindo-se de modo conveniente os pontos determinados obtém-se a ciclóide.



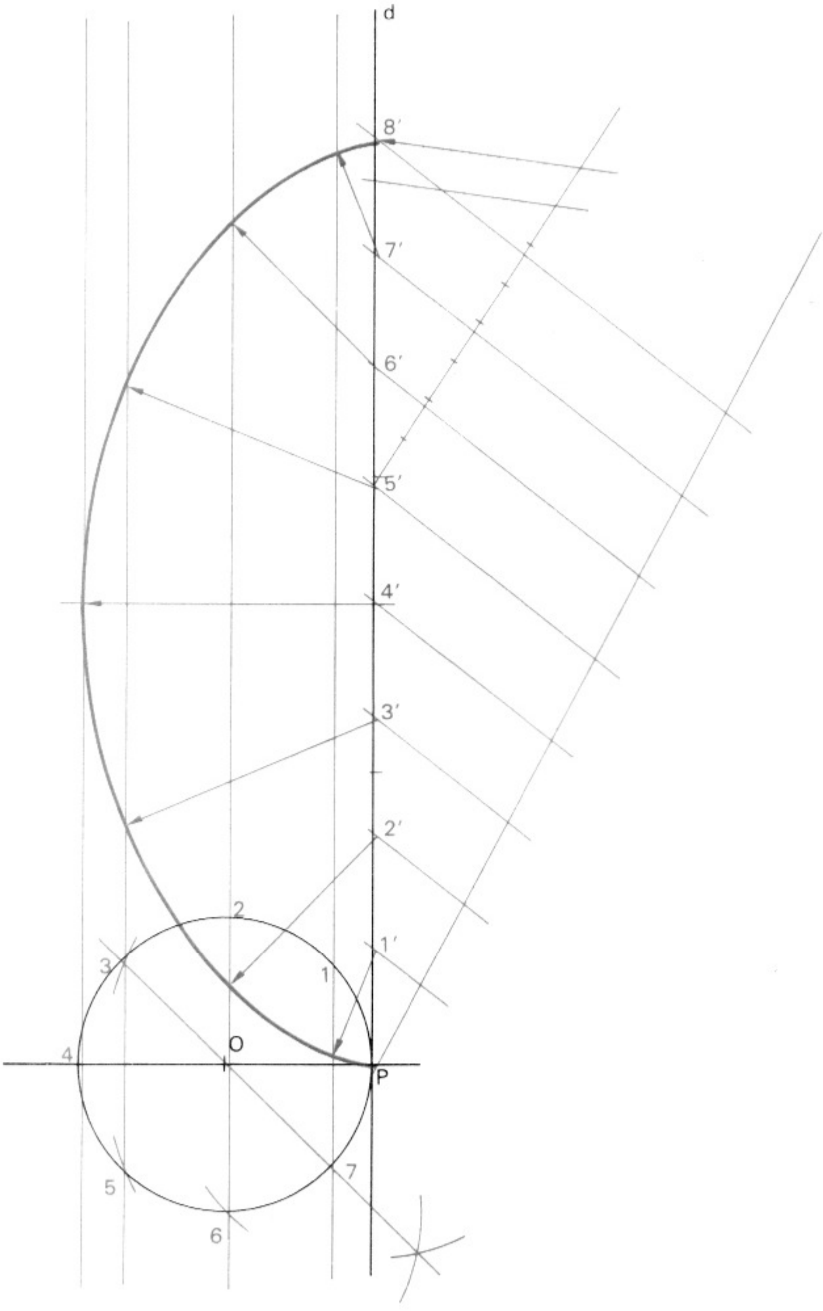
Observação: Com o propósito de obter maior precisão no traçado da ciclóide, pode-se dividir $\overline{PQ}$ e a circunferência geradora em 12 partes iguais, mas, de um modo geral, a divisão em 8 partes é suficiente para os problemas de vestibulares.

Resolva os exercícios de 65 a 67 do caderno de atividades.

Ciclóide

Figura auxiliar e anotações

65 Construa um ciclo da ciclóide simples descrita pelo ponto P quando a circunferência geradora rola sem escorregamento sobre a diretriz **d**.


d
8′
7′
6′
5′
4′
3′
2′
1′
2
3
1
4
O
P
5
7
6

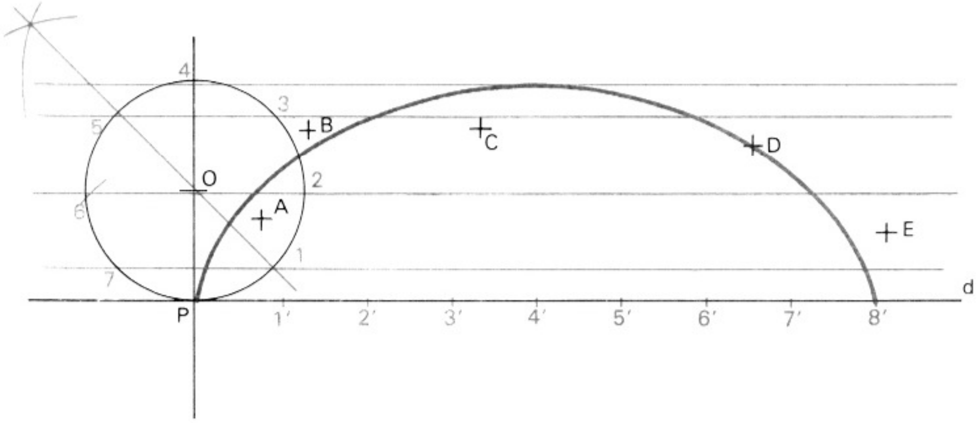
Ciclóide

Figura auxiliar e anotações

Nota:
Deste exercício em diante, não registraremos, na construção das ciclóides, os traçados correspondentes às retificações das circunferências geradoras.

66 Qual dos pontos assinalados pertence à curva descrita pelo ponto P quando a circunferência rola sem escorregamento sobre a reta **d**?

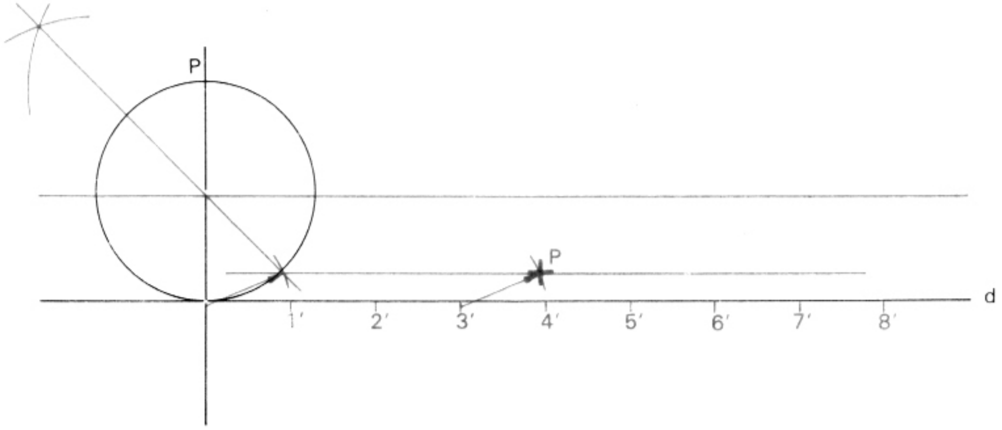
Observação: Nos vestibulares do ITA têm sido comuns problemas deste tipo.



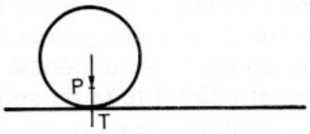
Resposta: D

67 Determine a posição do ponto P após a circunferência ter girado 135° no sentido horário, sem escorregamento, sobre a reta **d**.

Observação: Procure determinar a posição de P sem construir a ciclóide completamente.



Construção da ciclóide encurtada



◁ **Atenção**: $\overline{TQ}$ é a retificação da circunferência geradora.

A construção da ciclóide encurtada é realizada de maneira inteiramente análoga à que você já aprendeu para a ciclóide simples.

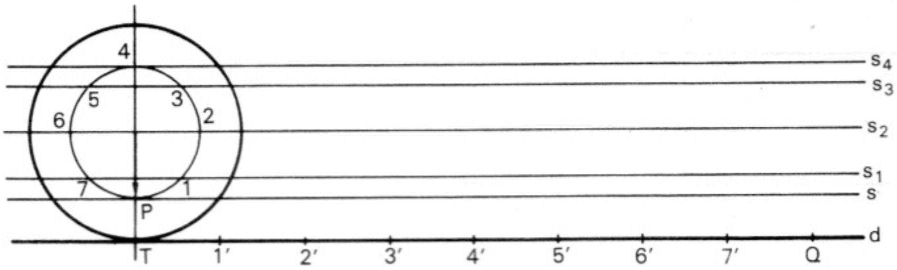
Vamos supor que, na sua posição inicial, o ponto P que descreve a ciclóide esteja situado sobre o raio que tem extremidade no ponto T de tangência da circunferência geradora com a diretriz. Então, procedemos à construção da seguinte maneira:

1.º) Determina-se Q sobre a diretriz de modo que $\overline{TQ}$ seja a retificação da circunferência geradora.

2.º) Com o mesmo centro da circunferência geradora, descreve-se a circunferência que passa por P.

3.º) Dividem-se $\overline{TQ}$ e essa segunda circunferência em um mesmo número de partes iguais. Por exemplo, oito partes.

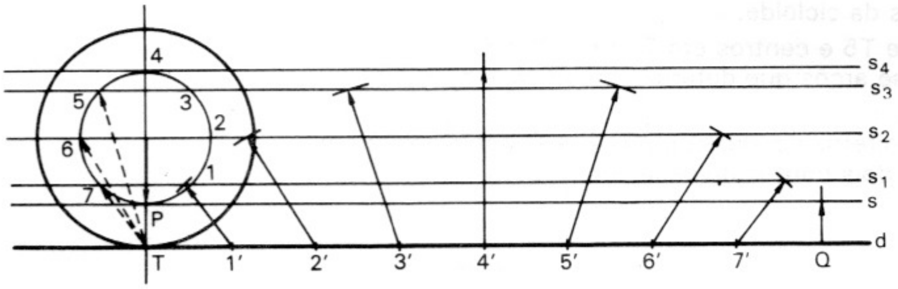
4.º) Pelos pontos de divisão da segunda circunferência traçam-se as retas s, s_1, s_2, s_3 e s_4 paralelas à diretriz.



5.º) Com raio T7 (ou T1) e centros em 1' e 7', descrevem-se arcos que interceptam s_1 em dois pontos da ciclóide.

6.º) Com raio T6 (ou T2) e centros em 2' e 7', descrevem-se arcos que determinam em s_2 mais dois pontos da ciclóide.

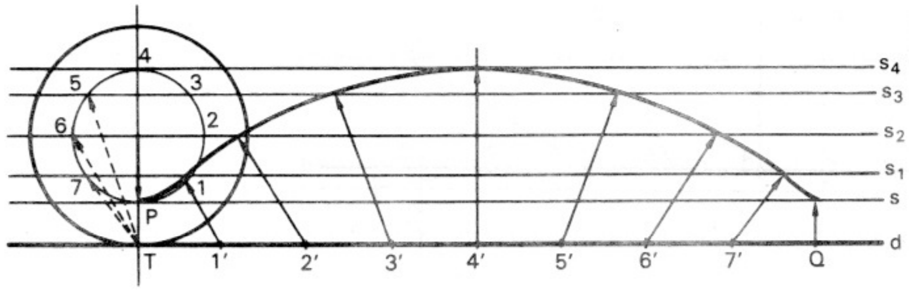
7.º) Com raio T5 (ou T3) e centros em 3' e 5', descrevem-se arcos que interceptam s_3 em outros dois pontos da ciclóide.



Resolva os exercícios de 68 a 70 do caderno de atividades.

8.º) Por fim, por 4' e Q traçam-se as perpendiculares à diretriz, determinando em s_4 e s, respectivamente, outros dois pontos da ciclóide.

Unindo-se os pontos determinados obtém-se a ciclóide encurtada.



Ciclóide

68 Construa a ciclóide encurtada, gerada pelo ponto P.

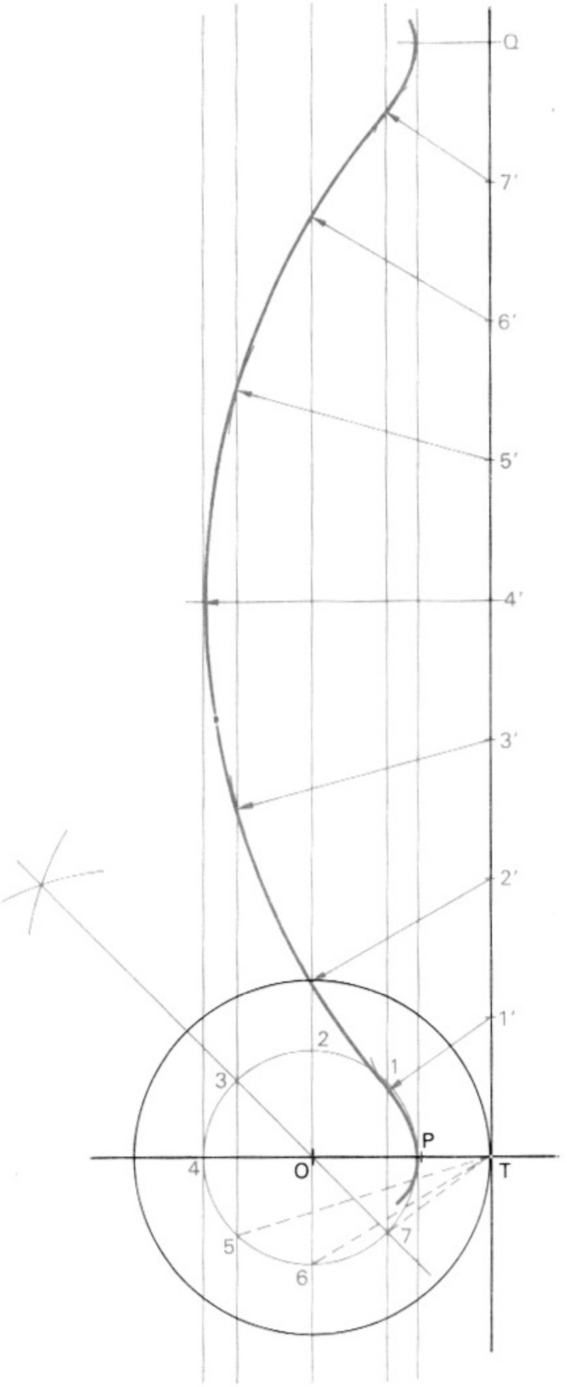


Figura auxiliar e anotações

Observação:
Insista que, sobre a diretriz, deve-se retificar a circunferência geradora e não aquela que passa por P.

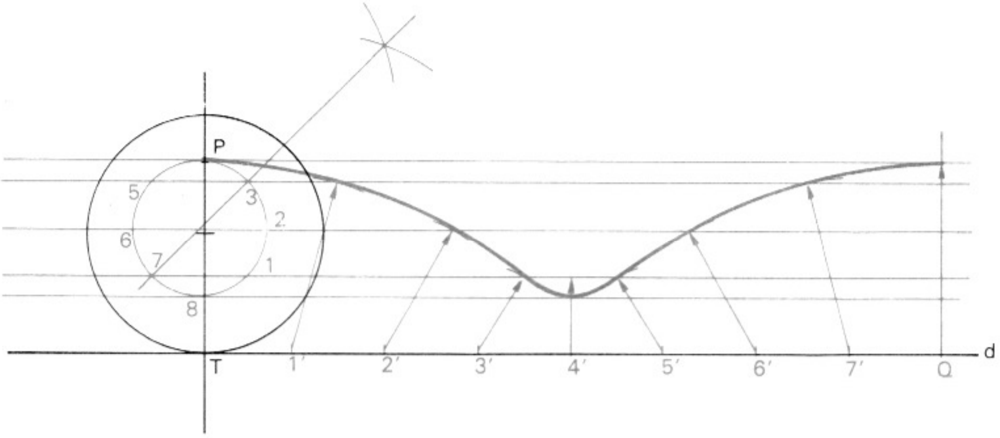
Ciclóide

Figura auxiliar e anotações

69 Construa a curva gerada pelo ponto P quando o círculo rola 360°, sem escorregamento, sobre a reta **d**.

Observação: Você terá de construir a ciclóide encurtada iniciando-a pelo ponto que, no exercício anterior, corresponde ao ponto médio da curva.

Sugestão:
Proponha exercício semelhante colocando P onde se encontra o ponto 5.

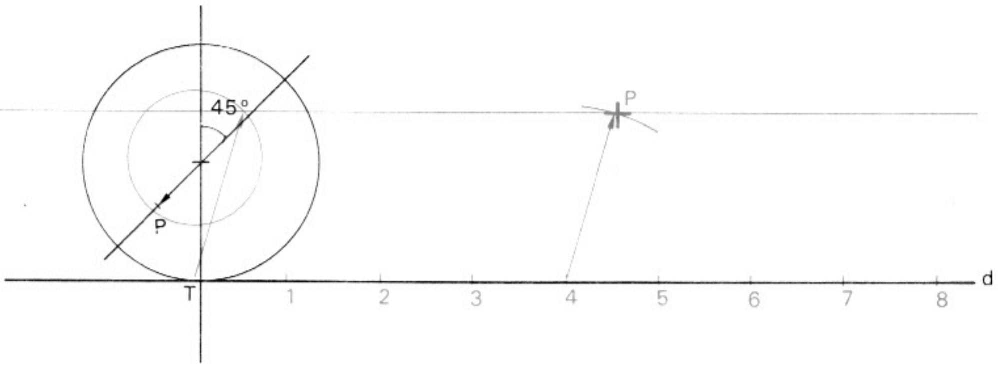


70 Determine a posição em que se encontrará o ponto P após o círculo rolar 180°, sem escorregamento, sobre a reta **d**.

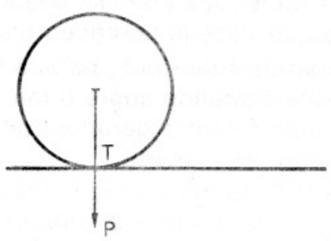
Observação: O círculo rola no sentido horário.

Observação:
Reforce que não é necessário construir a ciclóide para determinar a posição pedida para o ponto P.

Sugestão:
Proponha exercício semelhante, considerando que o círculo role 225°.



Construção da ciclóide alongada



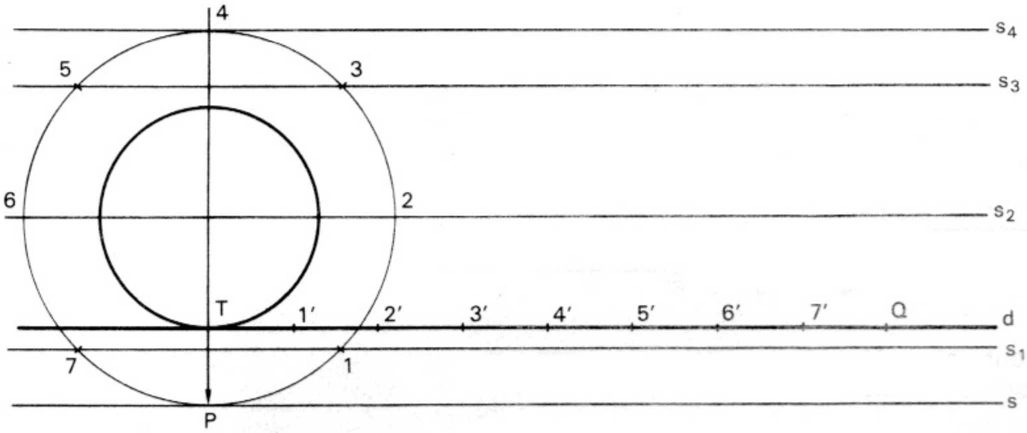
Para construir a ciclóide alongada, vamos supor que, na posição inicial, o ponto P que a descreve esteja situado no prolongamento do raio que tem extremidade no ponto T de tangência da circunferência geradora com a diretriz. Então, a construção é feita da seguinte maneira:

1.º) Determina-se Q sobre a diretriz de modo que $\overline{TQ}$ seja a retificação da circunferência geradora.

2.º) Com o mesmo centro da circunferência geradora, descreve-se a circunferência que passa por P.

3.º) Dividem-se $\overline{TQ}$ e essa segunda circunferência em um mesmo número de partes iguais. Como exemplo, vamos supor, novamente, oito partes.

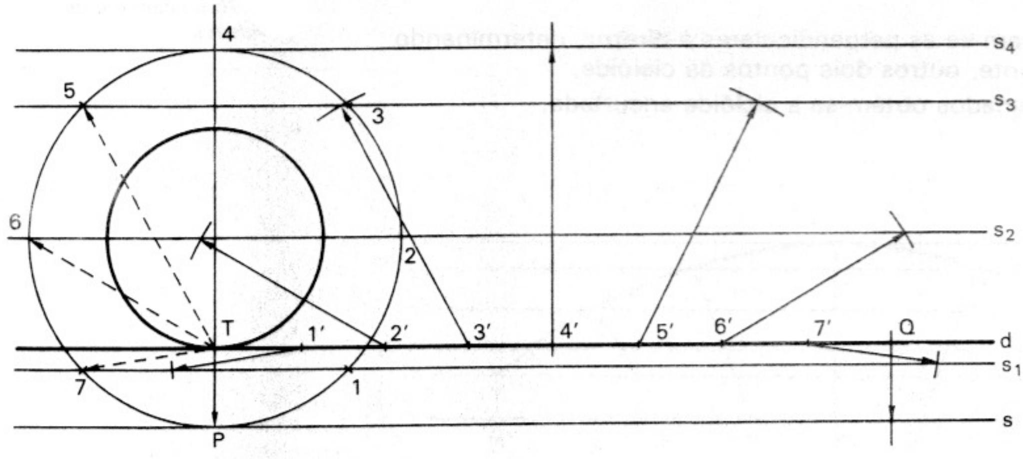
4.º) Pelos pontos de divisão da segunda circunferência, traçam-se as retas s, s_1, s_2, s_3 e s_4 paralelas à diretriz.



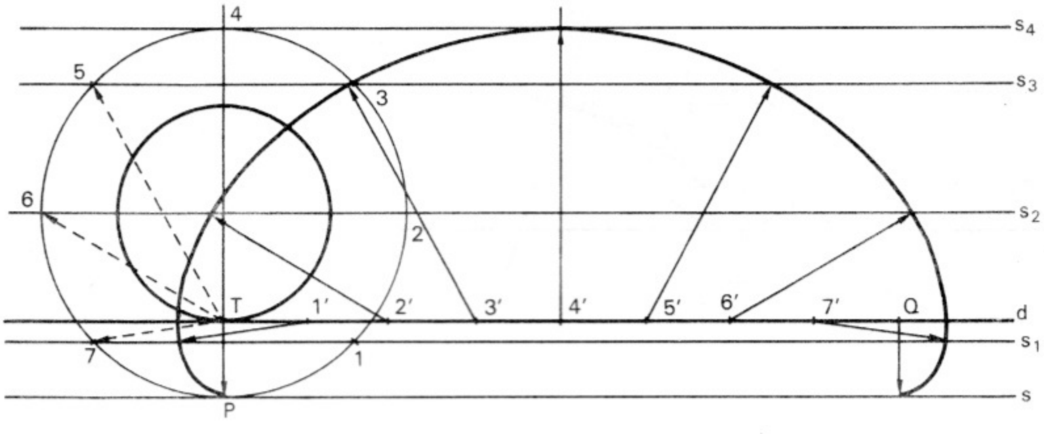
5.º) Com raio T7 (ou T1) e centros em 1' e 7' descrevem-se arcos que determinam em s_1 dois pontos da ciclóide.

6.º) Analogamente, com raios T6 e T5 e centros em 2' e 6', 3' e 5', respectivamente, descrevem-se arcos que determinam em s_2 e s_3 outros pontos da ciclóide.

7.º) Por fim, as perpendiculares à diretriz conduzidas por 4' e Q determinam em s_4 e s, respectivamente, mais dois pontos da ciclóide.



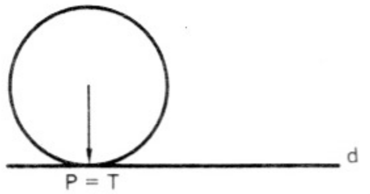
Então, basta unir os pontos já obtidos da ciclóide para construí-la.



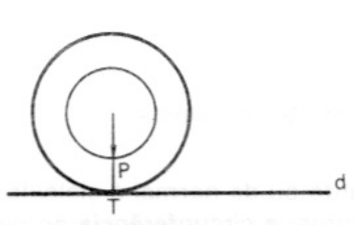
Resolva os exercícios de 71 a 73 do caderno de atividades.

Traçado de tangentes e normais às ciclóides

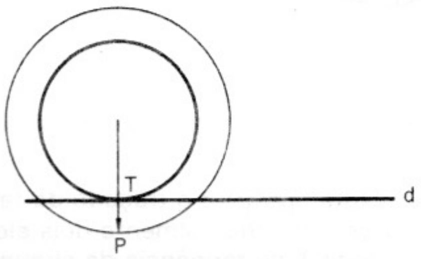
Na construção da ciclóide encurtada e também da ciclóide alongada, foi necessário traçar uma circunferência, com o mesmo centro da circunferência geradora, passando pelo ponto P gerador. Pois bem, essa segunda circunferência é denominada **circunferência do ponto gerador.** No caso da ciclóide simples, a circunferência do ponto gerador é a própria circunferência geradora.



Ciclóide simples



Ciclóide encurtada



Ciclóide alongada

Com essa nota, podemos passar ao traçado da tangente a uma ciclóide por um ponto da mesma. O estudo desse traçado será feito para os três tipos de ciclóides, simultaneamente, pois a construção é a mesma para os três casos.

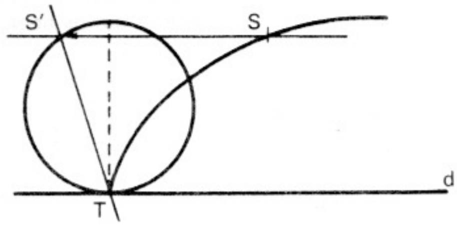
Seja S o ponto pelo qual se quer traçar a tangente.

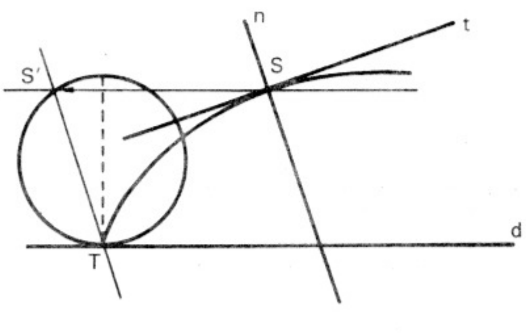
1.º) Por S traça-se uma paralela à diretriz determinando o ponto S′ na circunferência do ponto gerador.

2.º) Sendo T o ponto de tangência da circunferência geradora com a diretriz, traça-se por S a reta **n** paralela à reta S′T.

3.º) Por S traça-se a reta **t** perpendicular a **n**.

1.º caso: simples

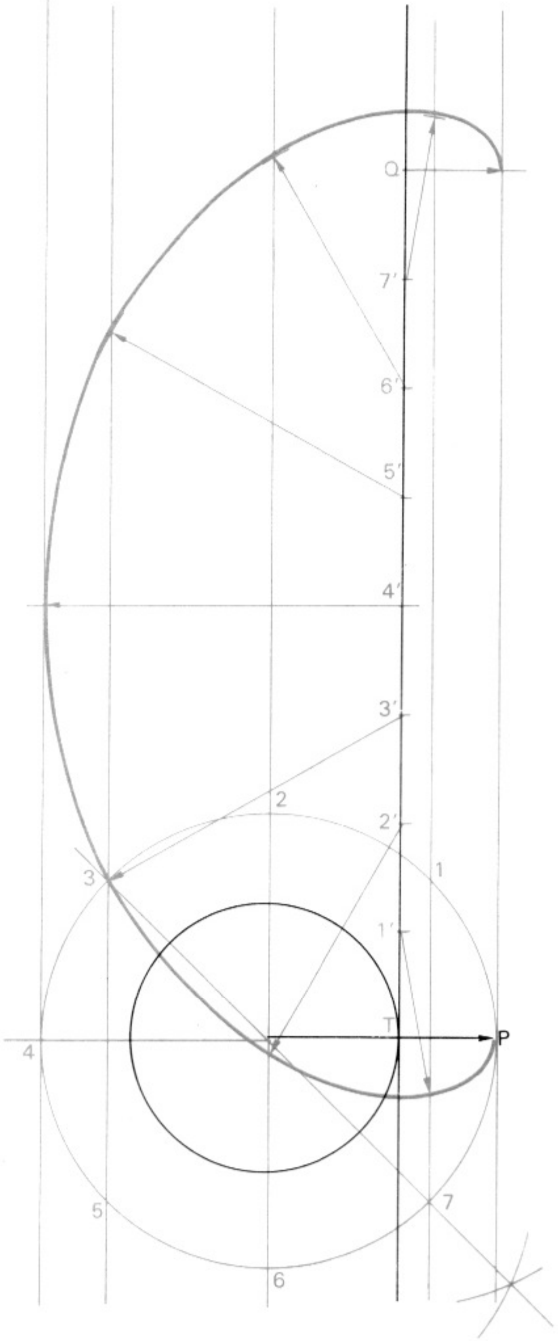




Ciclóide

Figura auxiliar e anotações

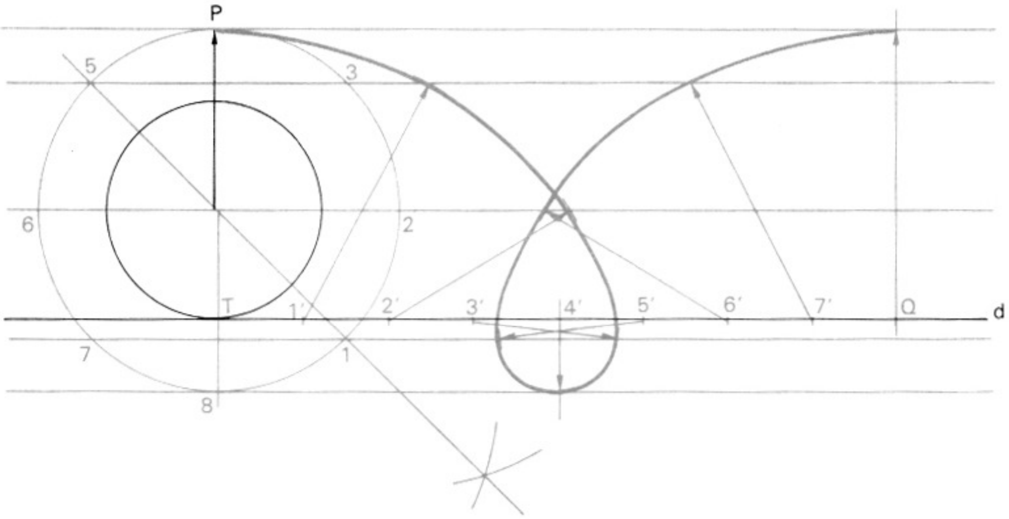
71 Construa a ciclóide alongada, descrita pelo ponto P.


Q
7′
6′
5′
4′
3′
2
2′
1
3
1′
T
P
4
7
5
6

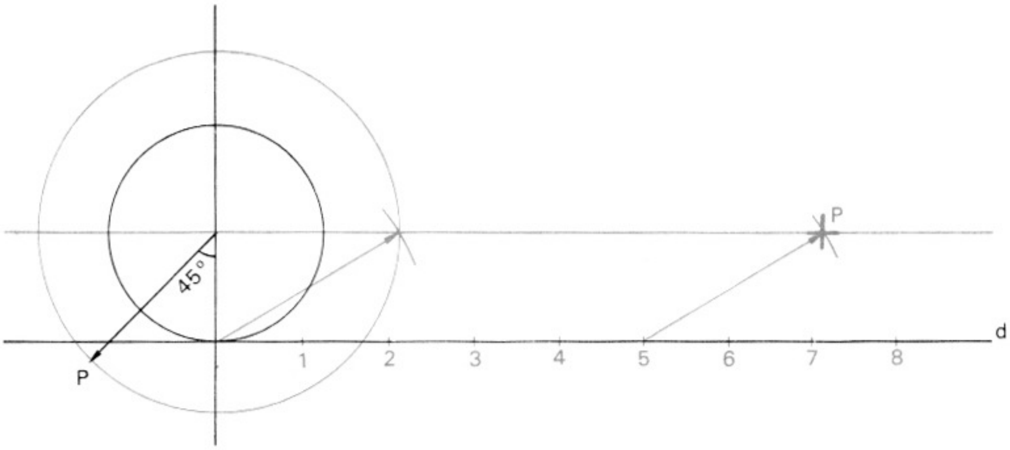
Ciclóide

Figura auxiliar e anotações

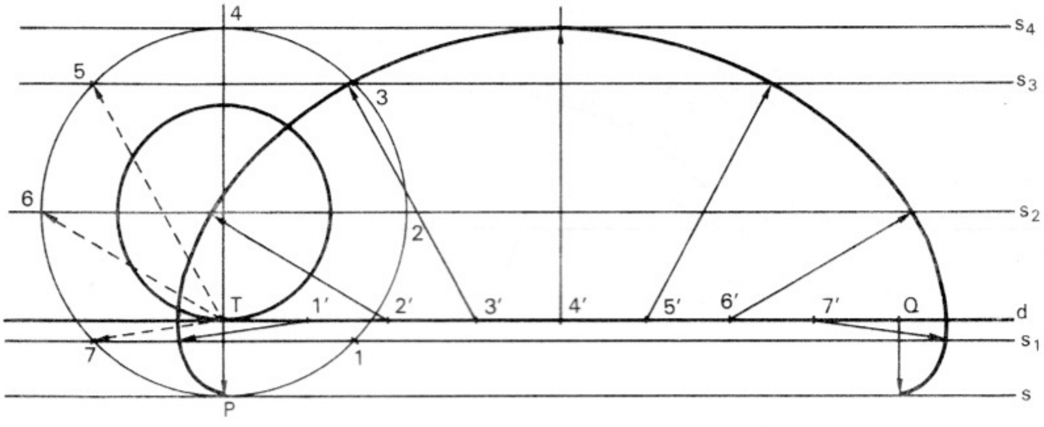
72 Construa a curva gerada pelo ponto P quando a circunferência rola 360°, sem escorregamento, sobre a reta **d**.


P
5
3
6
2
T
1'
2'
3'
4'
5'
6'
7'
Q
d
7
1
8

73 Determine a posição em que se encontrará o ponto P após a circunferência rolar 225°, no sentido horário e sem escorregamento, sobre a reta **d**.


P
45°
P
d
1
2
3
4
5
6
7
8

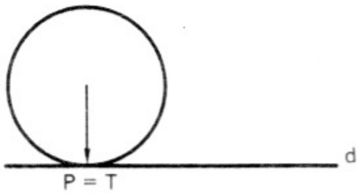
Então, basta unir os pontos já obtidos da ciclóide para construí-la.



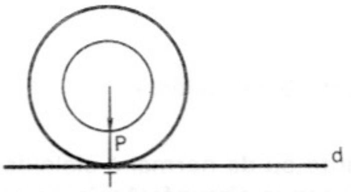
Resolva os exercícios de 71 a 73 do caderno de atividades.

Traçado de tangentes e normais às ciclóides

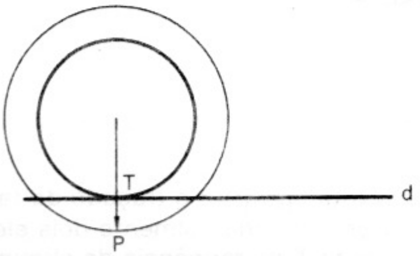
Na construção da ciclóide encurtada e também da ciclóide alongada, foi necessário traçar uma circunferência, com o mesmo centro da circunferência geradora, passando pelo ponto P gerador. Pois bem, essa segunda circunferência é denominada **circunferência do ponto gerador.** No caso da ciclóide simples, a circunferência do ponto gerador é a própria circunferência geradora.



Ciclóide simples



Ciclóide encurtada



Ciclóide alongada

Com essa nota, podemos passar ao traçado da tangente a uma ciclóide por um ponto da mesma. O estudo desse traçado será feito para os três tipos de ciclóides, simultaneamente, pois a construção é a mesma para os três casos.

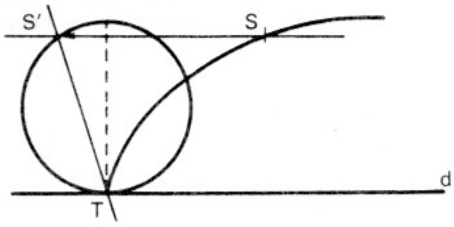
Seja S o ponto pelo qual se quer traçar a tangente.

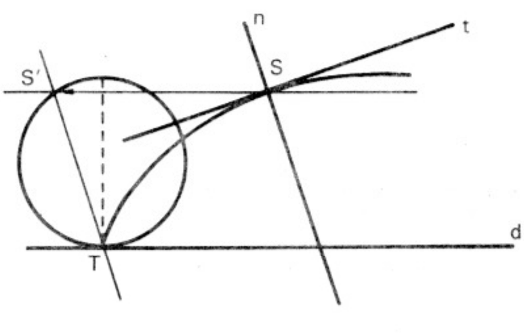
1.º) Por S traça-se uma paralela à diretriz determinando o ponto S′ na circunferência do ponto gerador.

2.º) Sendo T o ponto de tangência da circunferência geradora com a diretriz, traça-se por S a reta **n** paralela à reta S′T.

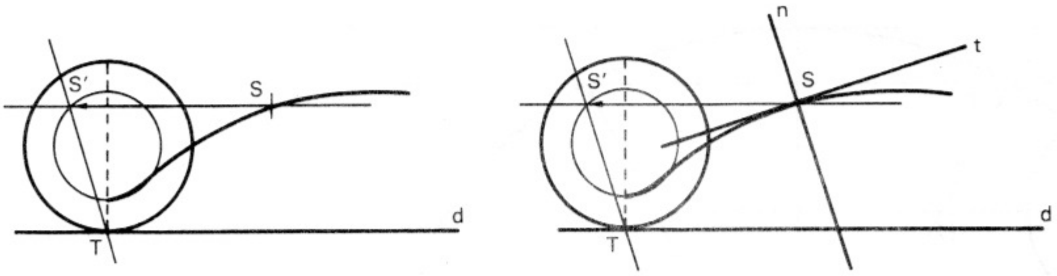
3.º) Por S traça-se a reta **t** perpendicular a **n**.

1.º caso: simples

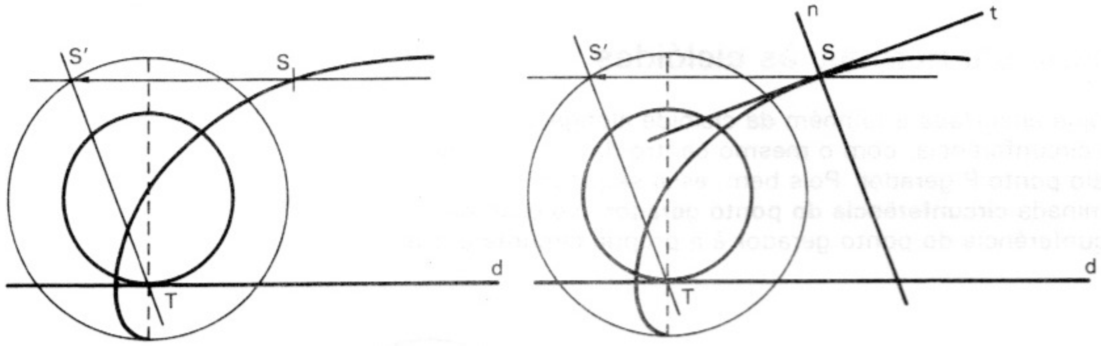




2.º caso: encurtada



3.º caso: alongada



As retas **t** e **n** são a tangente e a normal no ponto S da ciclóide, respectivamente.

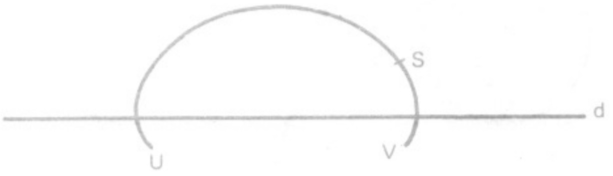
Observação: Note que para o traçado da tangente ou da normal à ciclóide, são necessários fundamentalmente dois elementos: **a circunferência do ponto gerador e o ponto T de tangência da circunferência geradora com a diretriz.** Caso esses elementos não tenham sido dados, é preciso construí-los.

Os exemplos seguintes serão úteis para você se familiarizar com a tangência de reta e ciclóide.

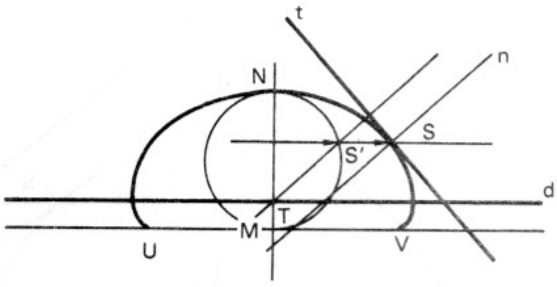
Exercícios

E6. **1** De uma ciclóide são dados: um ciclo de extremidades U e V, um ponto S pertencente a ela e a diretriz. Construa a tangente à ciclóide no ponto S.

Nesse problema a ciclóide apresentada é alongada, mas a resolução é análoga para os outros tipos de ciclóides.



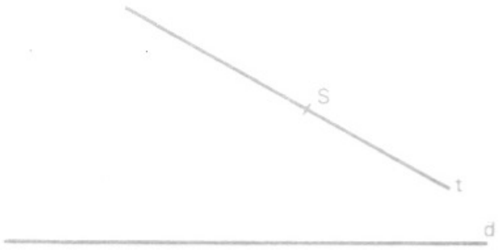
Resolução: Traçamos a mediatriz de $\overline{UV}$ determinando: o ponto N na ciclóide, o ponto T na diretriz e o ponto M em $\overline{UV}$. Então, a circunferência de diâmetro $\overline{MN}$ é a circunferência do ponto gerador, a qual, uma vez construída, permite o traçado da tangente.



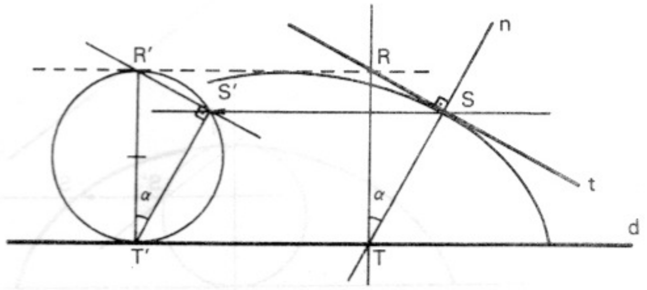
Note que, embora não tenha sido traçada a circunferência geradora, o ponto T em que ela tangencia a diretriz é conhecido.

A reta **t** é a tangente procurada.

E6.2 Determine o comprimento do diâmetro da circunferência geradora de uma ciclóide simples, dados: a diretriz, uma tangente t à curva e o ponto S de tangência.



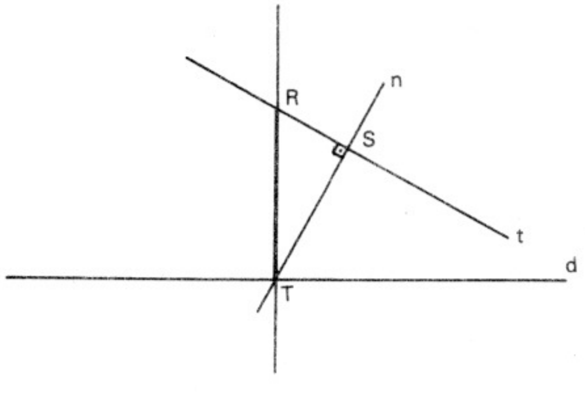
Suposto resolvido



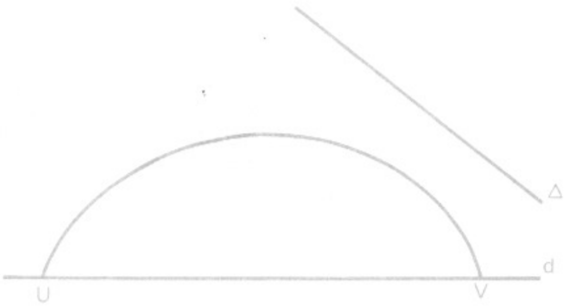
Resolução: Observe a figura onde o problema está suposto resolvido. É de imediata verificação que os triângulos RST e R'S'T' são congruentes, isto é, $\overline{RT}$ **tem o comprimento do diâmetro procurado.** Então, basta traçar a normal pelo ponto S determinando T na diretriz e, por T, traçar a perpendicular à diretriz, determinando R na tangente.

IMPORTANTE

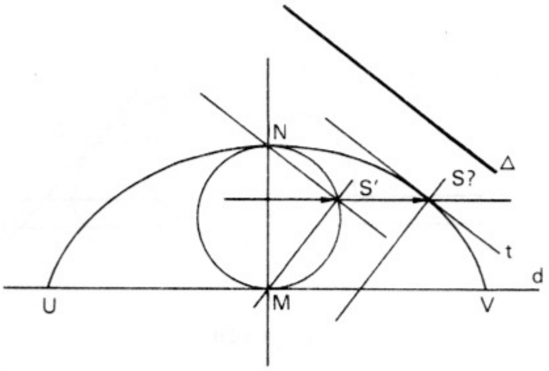
Note que $\overleftrightarrow{R'S'}$ tem a direção da tangente. Isso permitirá resolver o problema seguinte.



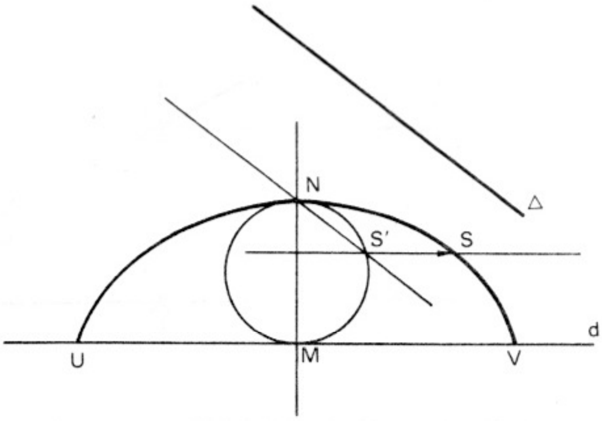
E6. **3** São dados um ciclo de extremidades U e V de uma ciclóide simples e a direção △ de uma reta **t** tangente. Determine o ponto S em que a reta **t** tangencia a ciclóide.



Suposto resolvido



Resolução: Traçamos a mediatriz de $\overline{UV}$ determinando o ponto N na ciclóide e M em $\overline{UV}$, e com diâmetro $\overline{MN}$ construímos a circunferência geradora. Em seguida, por N traçamos uma reta de direção △, a qual determina o ponto S' na circunferência geradora. Por fim, traçamos por S' a reta paralela à diretriz determinando o ponto S procurado na ciclóide.



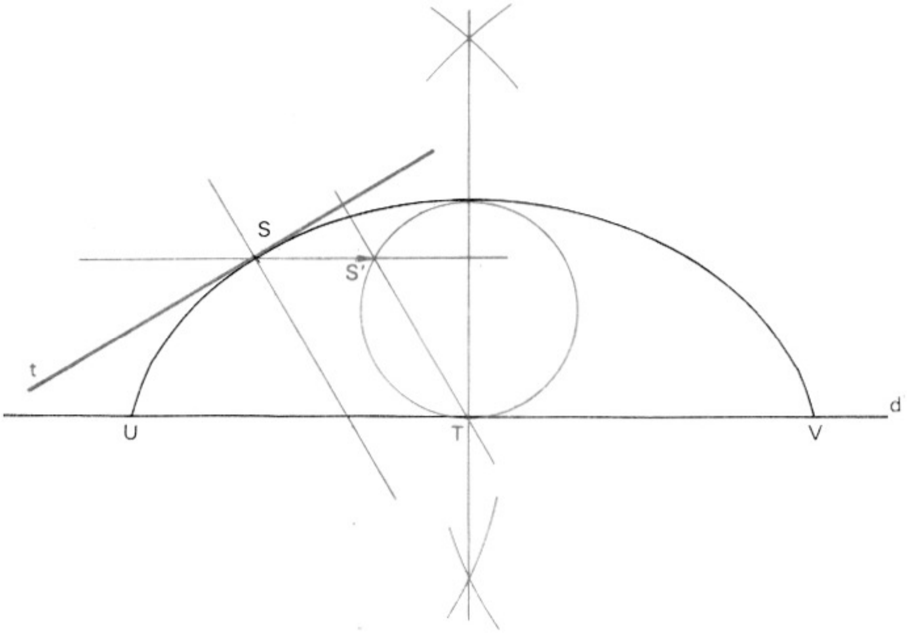
Resolva os exercícios de 74 a 78 do caderno de atividades.

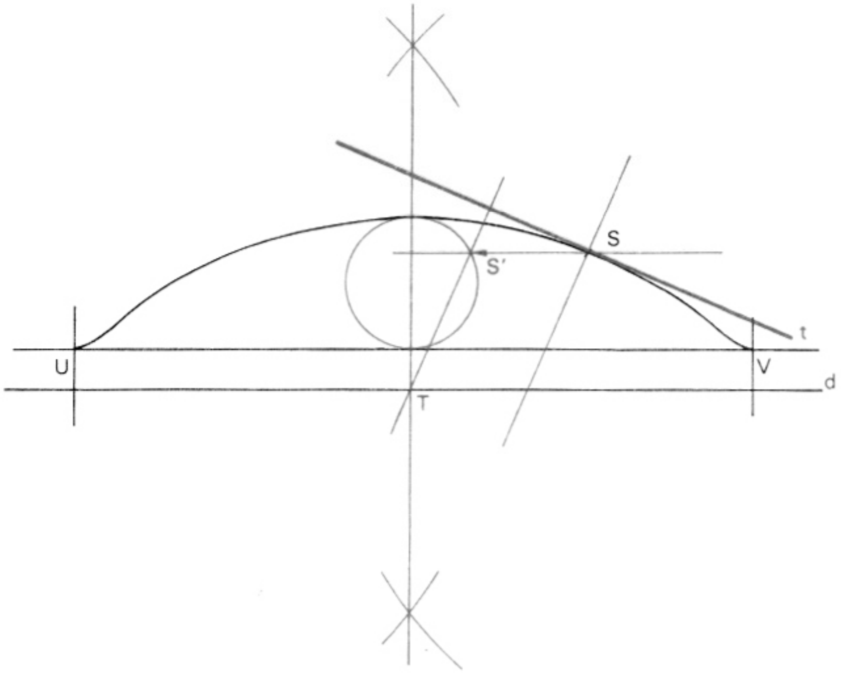
Figura auxiliar e anotações

74 Nas ciclóides seguintes, a reta **d** é a diretriz. Construa a reta tangente à ciclóide no ponto S, em cada um dos casos.

Sugestão: Veja o exercício E6.**1**.

Observação:
Insista que, para traçar a tangente à ciclóide, são necessários dois elementos: a circunferência do ponto gerador e o ponto T de tangência entre a circunferência geradora e a diretriz.

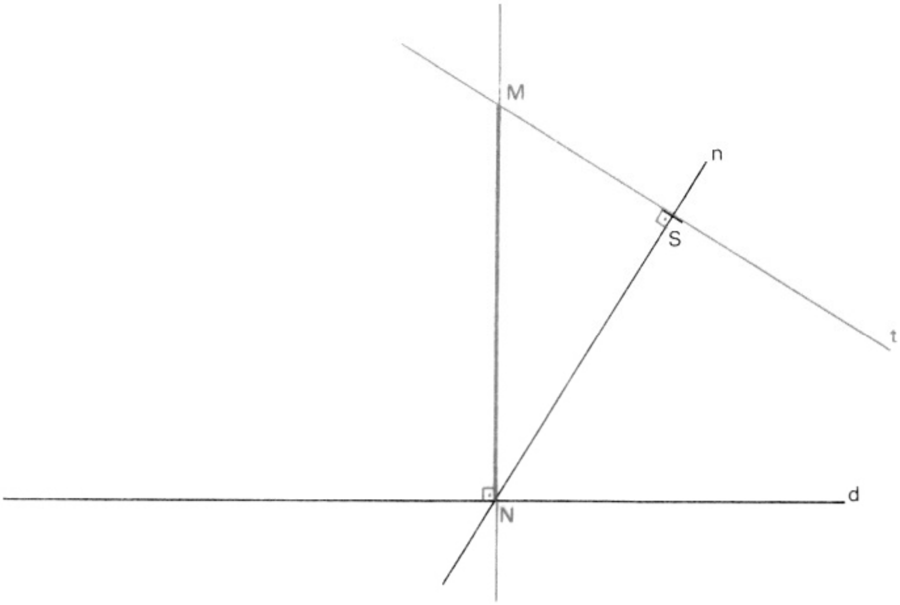




Ciclóide: tangente e normal

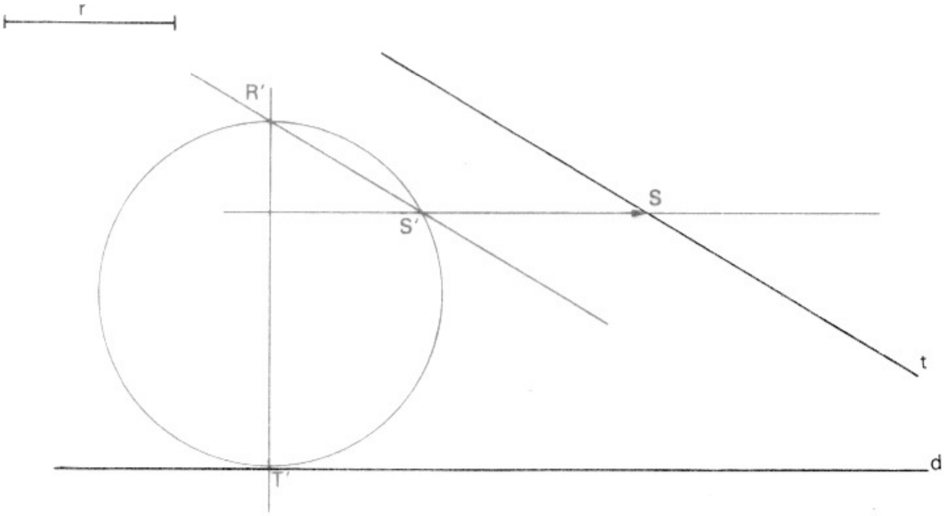
Figura auxiliar e anotações

75 Determine o diâmetro da circunferência geradora de uma ciclóide simples, dadas a diretriz **d** e a normal **n** num ponto S da curva.
Sugestão: Veja o exercício E6.**2**.



$\overline{MN}$ é o segmento procurado.

76 A reta **t** é uma tangente a uma ciclóide simples de diretriz **d**. Sendo **r** o raio da circunferência geradora, determine o ponto em que a reta **t** tangencia a curva.
Sugestão: Veja o exercício E6.**3**.

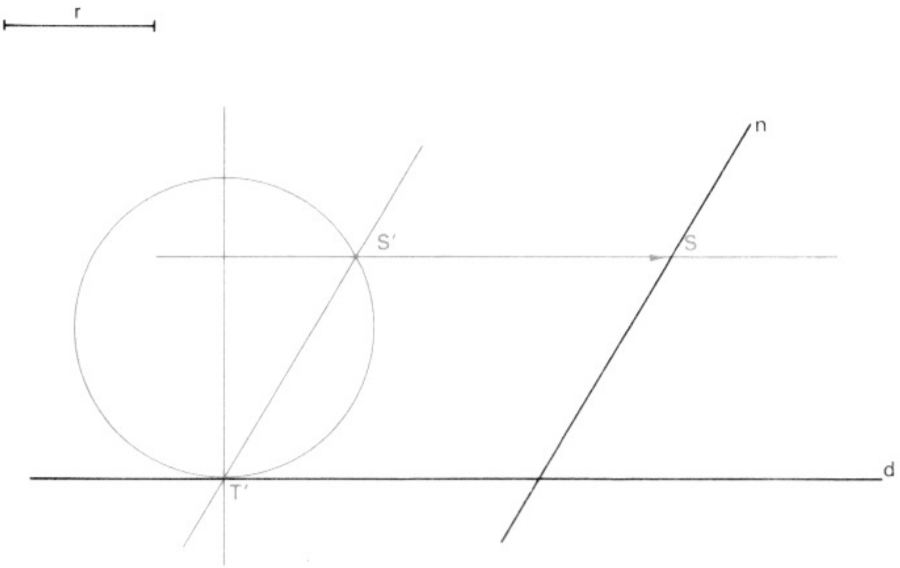


S é o ponto procurado.

Ciclóide: tangente e normal

Figura auxiliar e anotações

77 Determine o ponto em que a normal **n** intercepta a ciclóide simples de diretriz **d**, sendo dado o raio **r** da circunferência geradora.

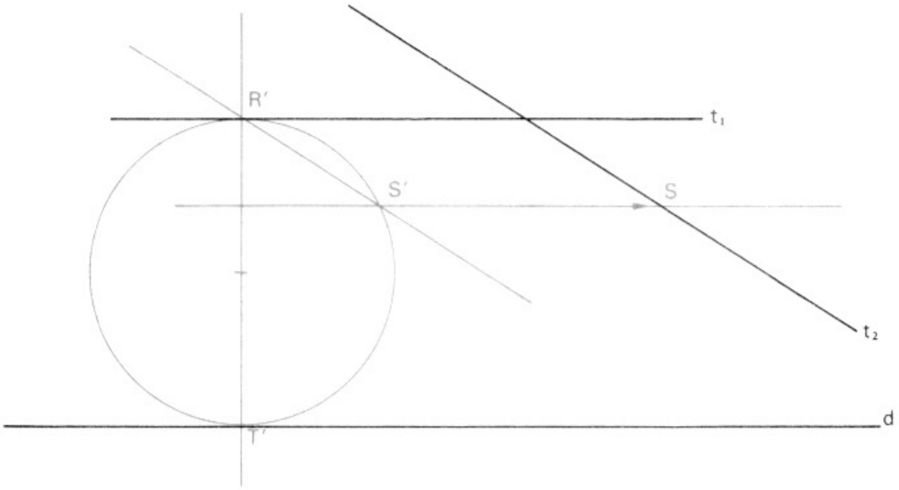


S é o ponto procurado.

78 As retas t_1 e t_2 são tangentes a uma ciclóide simples de diretriz **d**, sendo t_1 paralela a **d**. Determine o ponto em que t_2 tangencia a curva.

Sugestão: Com t_1 e **d**, é possível determinar a circunferência geradora. Então, o problema recai no exercício 76 deste caderno.

Observação:
Mostre ao aluno que é no ponto de altura máxima da ciclóide simples que a tangente se torna paralela à diretriz.



S é o ponto procurado.

7

Epiciclóides e hipociclóides

O conceito de epiciclóide

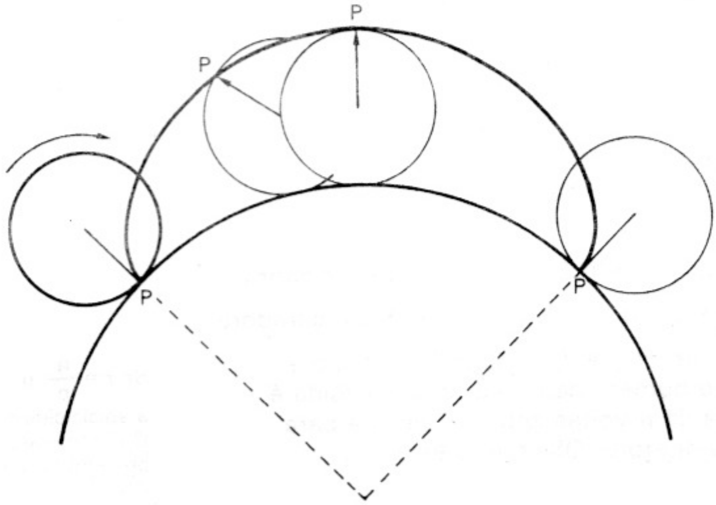
Definição

Chama-se **epiciclóide** a curva descrita por um ponto de um raio (ou do prolongamento de um raio) de uma circunferência que rola externamente, sem escorregamento, sobre outra circunferência fixa.

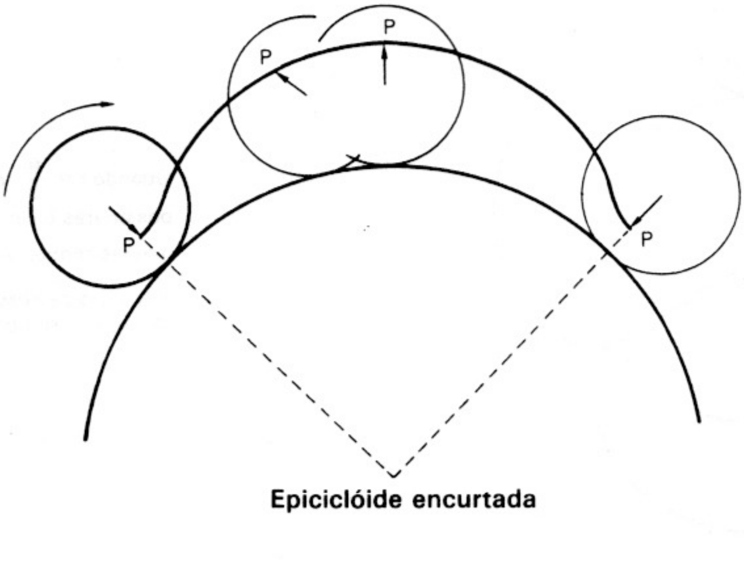
Como você percebe, as epiciclóides são análogas às ciclóides. Porém, a reta diretriz das ciclóides é substituída pela circunferência diretora nas epiciclóides.

Como nas ciclóides, a circunferência móvel é denominada **circunferência geradora**, o ponto que descreve a epiciclóide é chamado **ponto gerador** e a circunferência fixa é denominada **circunferência diretora.**

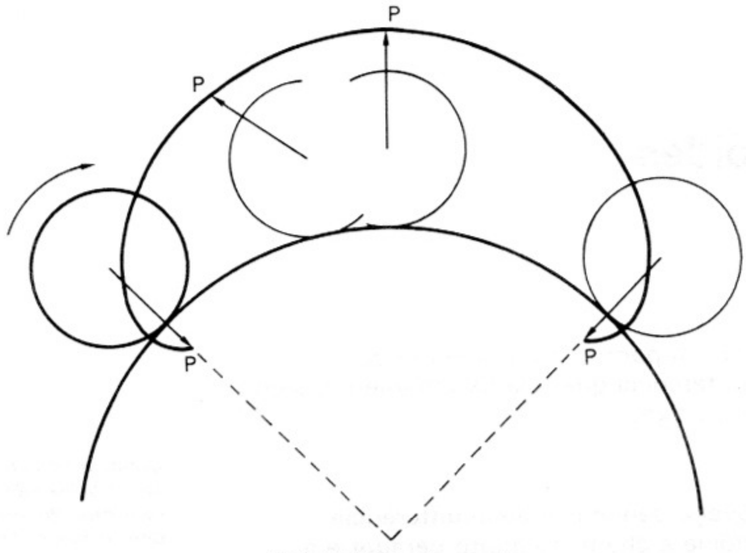
Conforme o ponto gerador **pertença à circunferência geradora,** esteja no seu **interior** ou no seu **exterior**, a epiciclóide é chamada, respectivamente, **simples, encurtada** ou **alongada.**



Epiciclóide simples



Epiciclóide encurtada



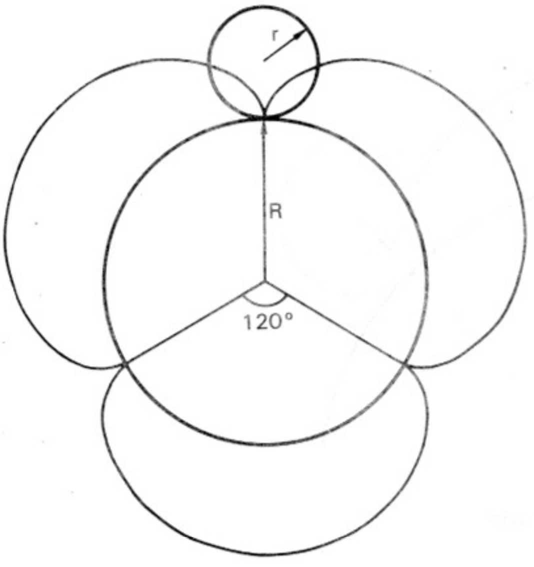
Epiciclóide alongada

Quando a circunferência geradora completa uma volta inteira, o ponto gerador descreve um ciclo da epiciclóide.

Epiciclóides notáveis

Sejam R e **r**, respectivamente, os raios das circunferências diretora e geradora de uma epiciclóide. Se $r = \frac{R}{n}$, n = 1, 2, 3, ..., quando a circunferência geradora percorre a volta inteira da circunferência diretora, a epiciclóide tem início e término num mesmo ponto. Nesse caso, o número de ciclos da epiciclóide é igual a **n**, isto é, a circunferência geradora dá **n** voltas sobre si mesma para então completar uma volta inteira sobre a diretora. Observe o exemplo seguinte, onde $r = \frac{R}{3}$.

Se $r = \frac{R}{n}$, n = 1, 2, 3,..., a epiciclóide possui **n** ciclos. O ponto onde se inicia o primeiro ciclo é o próprio ponto de término do último ciclo.



Quando $r = \frac{R}{3}$, a epiciclóide possui três ciclos. Da mesma forma, para $r = \frac{R}{4}$, a epiciclóide possui quatro ciclos, e assim por diante.

Essas epiciclóides particulares, em que $r = \frac{R}{r}$, **são denominadas notáveis** e, para os casos em que $n \geqslant 3$, a figura constituída pela reunião dos **n** ciclos é chamada **polígono epicicloidal**. Assim, no exemplo anterior, você vê um polígono epicicloidal de três ciclos.

É importante notar que a cada ciclo de uma epiciclóide notável de **n** ciclos corresponde um ângulo central de $\frac{360°}{n}$ na circunferência diretora. Por exemplo, no polígono epicicloidal de três ciclos da figura anterior, a cada ciclo corresponde um ângulo central de $\frac{360°}{3}$, isto é, 120°. O conhecimento desse ângulo é fundamental para se construir um ciclo de uma epiciclóide notável, ou um polígono epicicloidal.

Construção de uma epiciclóide notável

Como exemplo, vamos estudar a construção de um ciclo de uma epiciclóide simples em que $r = \frac{R}{4}$, isto é, um ciclo de um polígono epicicloidal de quatro ciclos.

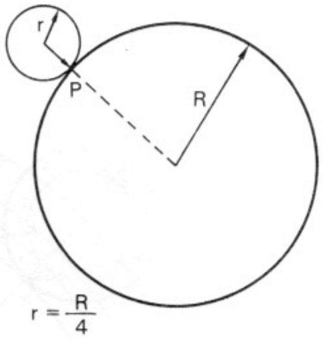
Para o início do desenvolvimento, vamos considerar o ponto P gerador como sendo o ponto de tangência entre as circunferências diretora e geradora. Então, realiza-se a construção da seguinte maneira:

1.º) Determina-se o arco PQ da circunferência geradora, que corresponde a um ciclo da epiciclóide. No caso, o arco PQ é de 90°, pois $\widehat{PQ} = \frac{360°}{4}$.

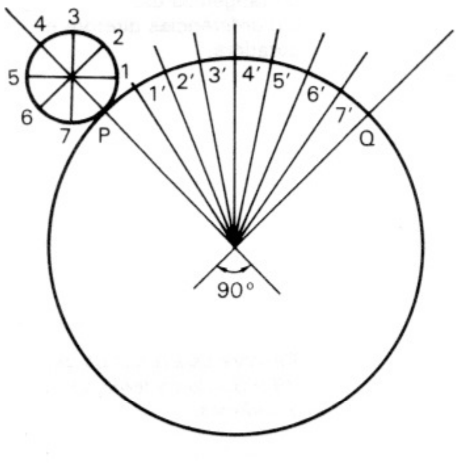
2.º) Dividem-se o arco PQ e a circunferência geradora em oito partes iguais.

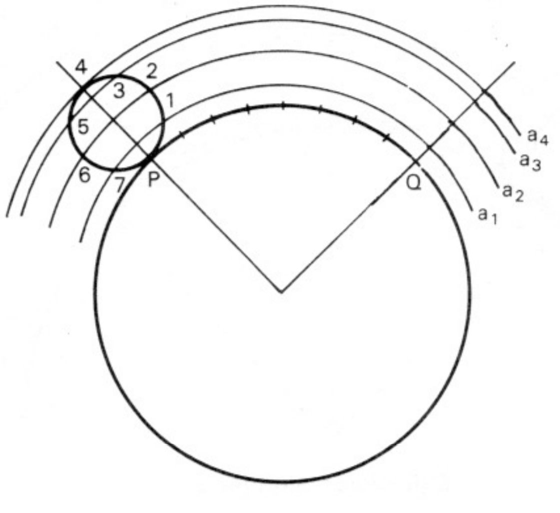
3.º) Com o mesmo centro da circunferência diretora, traçam-se os arcos a_1, a_2, a_3 e a_4, que passam pelos pontos de divisão da circunferência geradora.

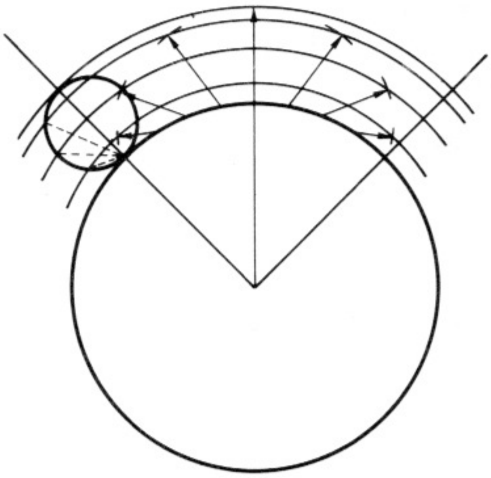
Daí em diante, a construção da epiciclóide se faz de forma inteiramente análoga à da ciclóide, apenas observando que, para a epiciclóide, a circunferência diretora e os arcos de circunferências concêntricos a ela substituem a diretriz e as retas paralelas à diretriz utilizadas na construção da ciclóide.

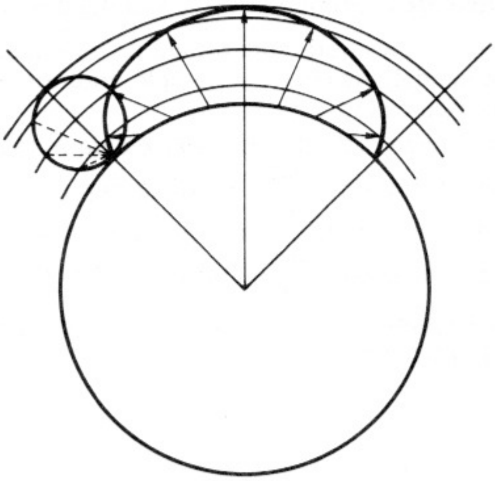


Divide-se o arco PQ em oito partes iguais por sucessivos traçados de bissetrizes.



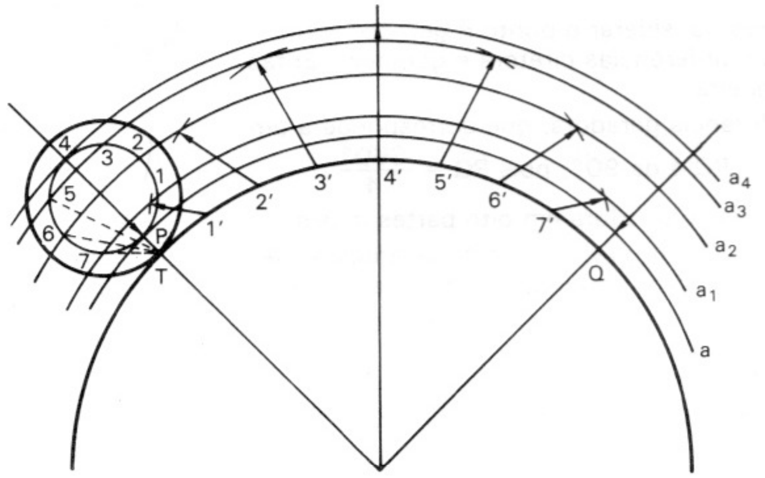






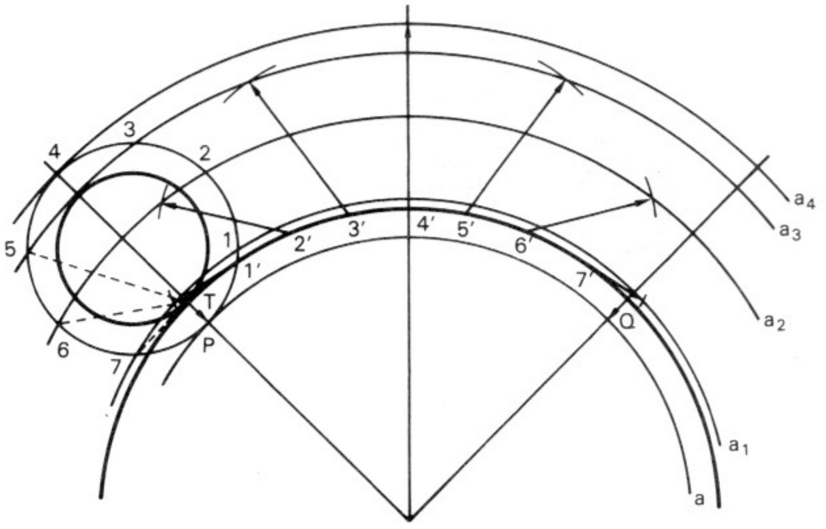
Observação: As construções de ciclos de polígonos epicicloidais encurtados e alongados são realizadas de forma análoga à que se acabou de apresentar para a epiciclóide simples. Porém, deve-se destacar que, nesses casos, é **a circunferência do ponto gerador que deve ser dividida em oito partes iguais** e os arcos a, a_1, a_2, a_3 e a_4 devem passar por esses pontos de divisão.

Lembre-se de que a circunferência do ponto gerador é aquela que passa pelo ponto gerador e tem o mesmo centro da circunferência geradora.



Epiciclóide encurtada

Tanto para a epiciclóide encurtada quanto para a alongada, os pares de raios com centros em 1' e 7', 2' e 6', 3' e 5' são respectivamente iguais a T7, T6 e T5, onde T é o ponto de tangência das circunferências diretora e geradora.



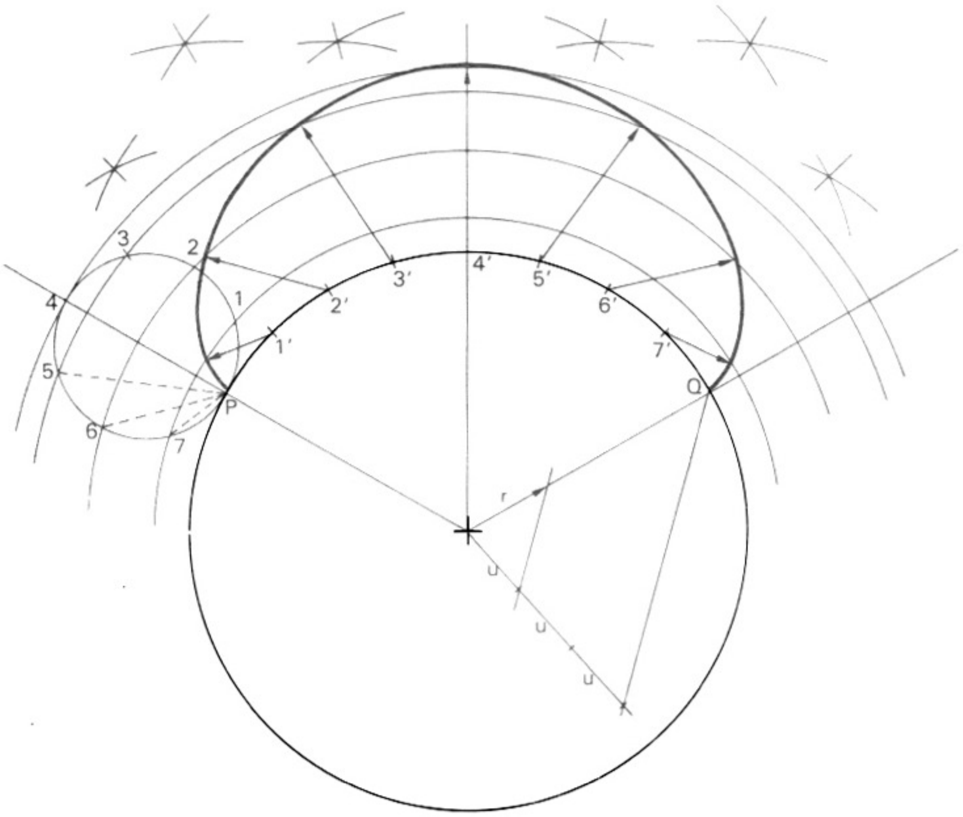
Epiciclóide alongada

Resolva os exercícios de 79 a 83 do caderno de atividades.

Epiciclóide

79 Construa um ciclo de um polígono epicicloidal simples de três ciclos, dada a circunferência diretora.

Sugestão: Um ciclo dessa epiciclóide corresponde a um ângulo central de 120°. Além disso,.o raio da circunferência geradora é a terça parte do raio da diretora.



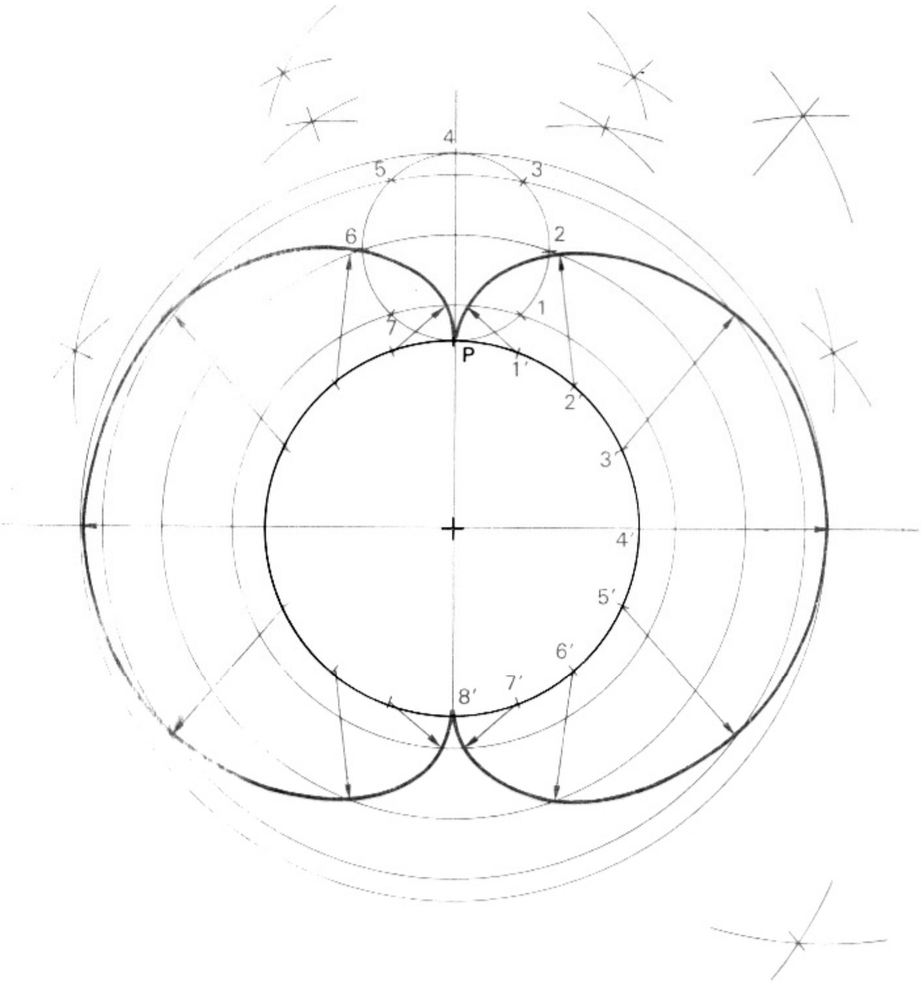
Os pares de raios com centros em 1' e 7', 2' e 6', 3' e 5', são respectivamente iguais a P7, P6 e P5.

Epiciclóide

Figura auxiliar e anotações

80 É dada a circunferência diretora de uma epiciclóide simples que possui dois ciclos. Sendo P o ponto de início do primeiro ciclo e de término do segundo, construa os dois ciclos dessa epiciclóide.

Sugestão: O raio da circunferência geradora é a metade do raio da diretora. Além disso, note que, quando a circunferência geradora tiver completado uma volta inteira, ela terá percorrido a metade da circunferência diretora.

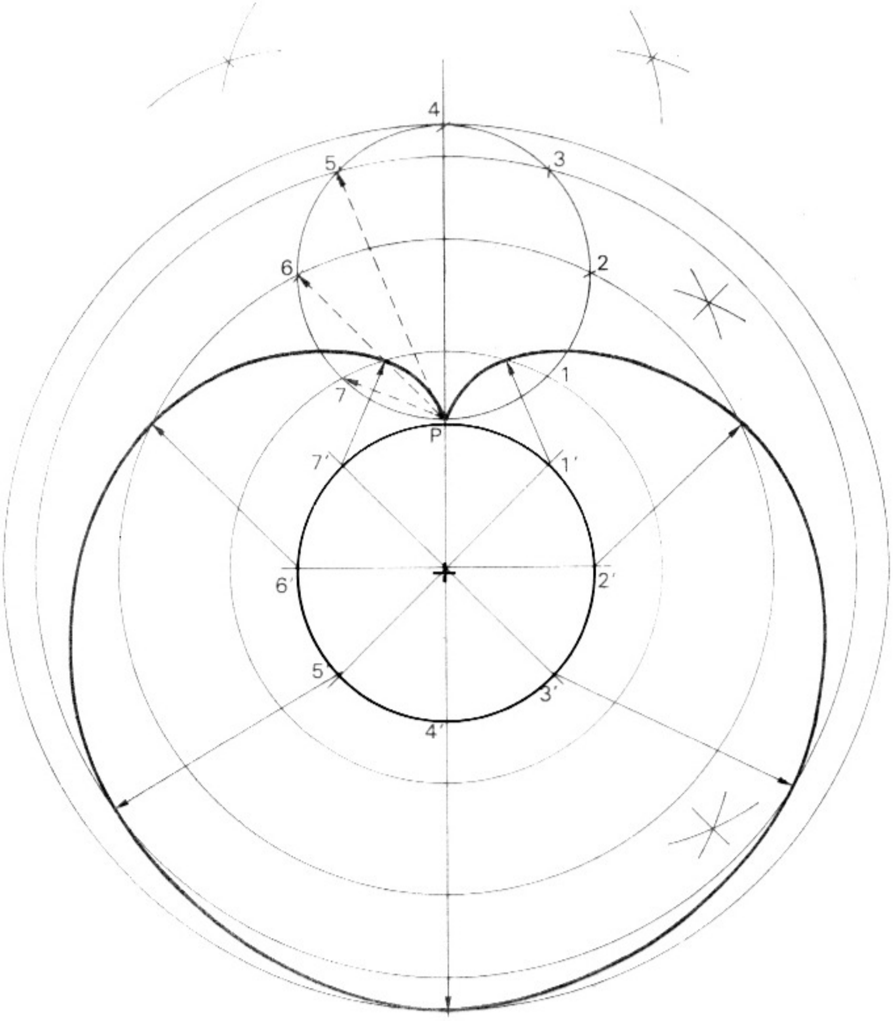


Epiciclóide

Figura auxiliar e anotações

81 Construa uma epiciclóide simples, sabendo que o raio da circunferência geradora é igual ao raio da circunferência diretora dada.

Observação: Note que, quando a circunferência geradora completar uma volta inteira, ela terá também percorrido a circunferência diretora na sua volta inteira. Assim, essa epiciclóide possui um único ciclo, que tem início e término num mesmo ponto.

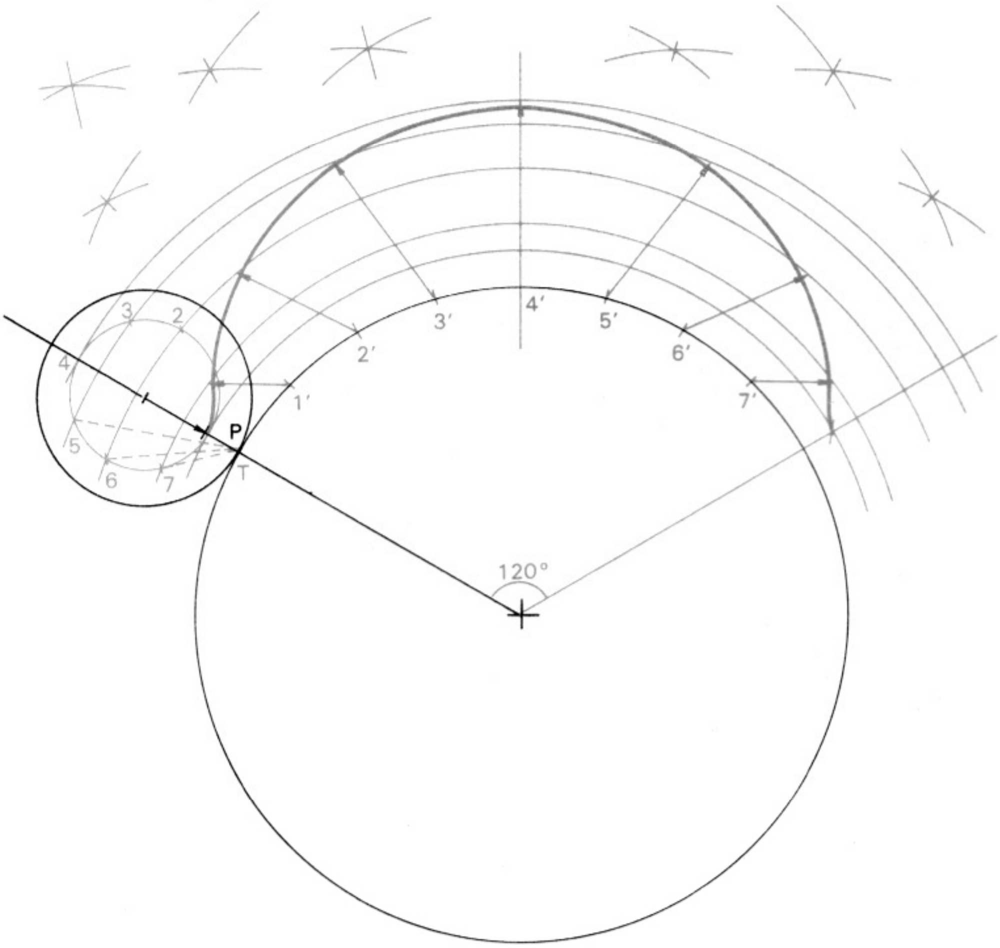


Os pares de raios indicados na figura, partindo dos pontos 1' e 7', 2' e 6', 3' e 5', são iguais a P7, P6 e P5, respectivamente.

Epiciclóide

Figura auxiliar e anotações

82 Construa um ciclo de uma epiciclóide alongada, dados a circunferência diretora e a geradora e o ponto P gerador, na sua posição inicial. Além disso, sabe-se que o raio da circunferência geradora é a terça parte do raio da diretora.

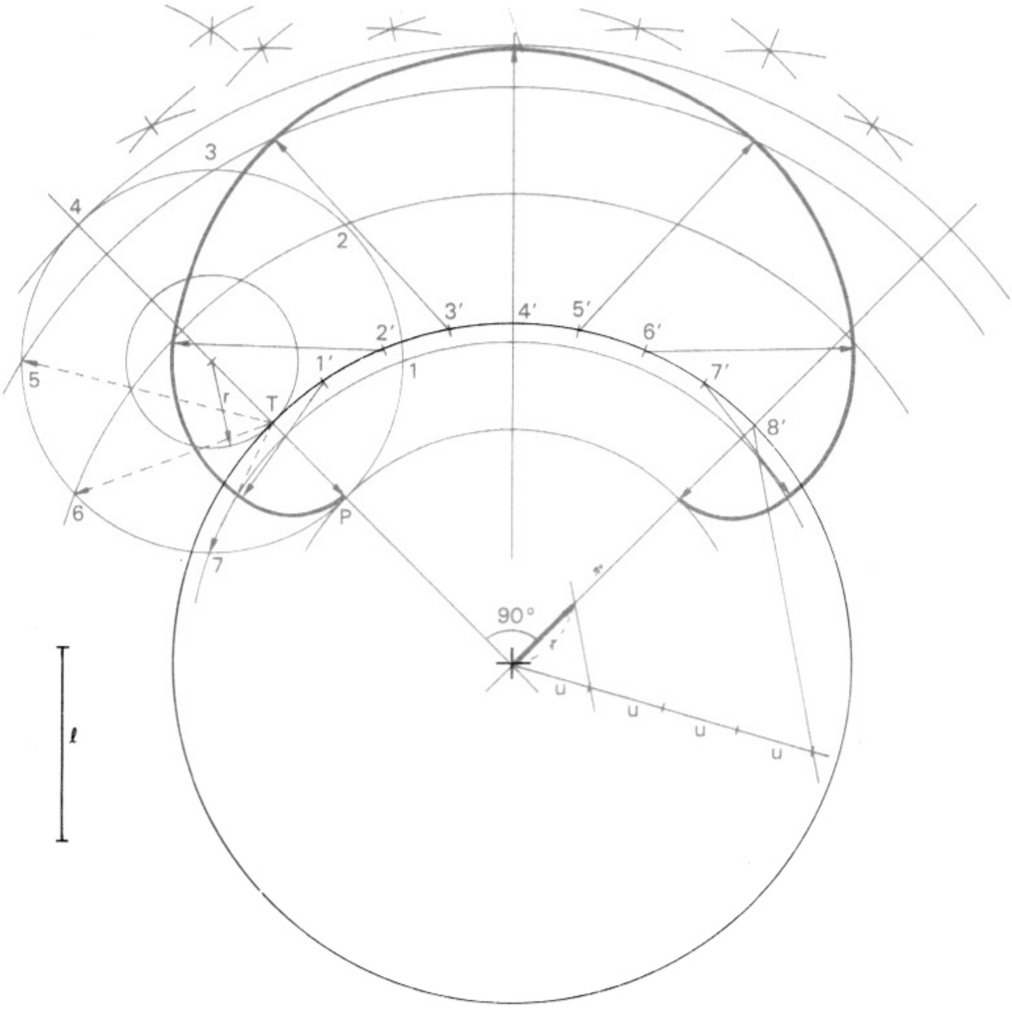


Os pares de raios com centros em 1′ e 7′, 2′ e 6′, 3′ e 5′ são, respectivamente, iguais a T7, T6 e T5.

Epiciclóide

83 Construa um ciclo de uma epiciclóide alongada, dados a circunferência diretora e o raio *ℓ* da **circunferência do ponto gerador**, e sabendo que o raio da circunferência geradora é a quarta parte do raio da diretora.

Observação: Lembre-se que a **circunferência do ponto gerador** é aquela que passa pelo ponto gerador e que tem o mesmo centro da circunferência geradora.



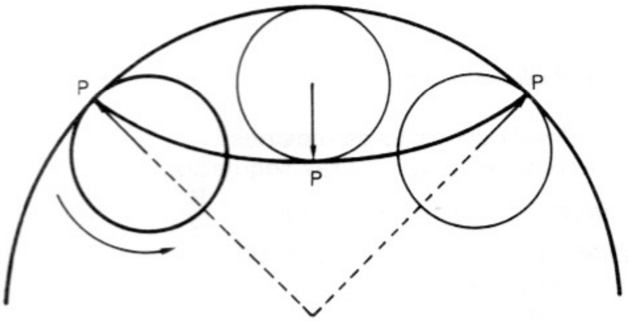
Os pares de raios com centros em 1' e 7', 2' e 6', 3' e 5', são, respectivamente, iguais a T7, T6 e T5.

O conceito de hipociclóide

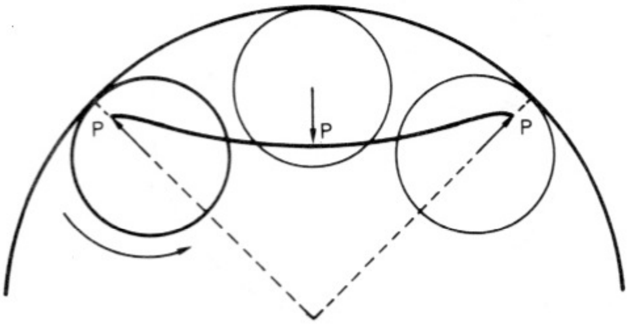
Definição

Chama-se **hipociclóide** a curva descrita por um ponto de um raio ou do prolongamento de um raio de uma circunferência que rola internamente sem escorregamento sobre outra circunferência fixa.

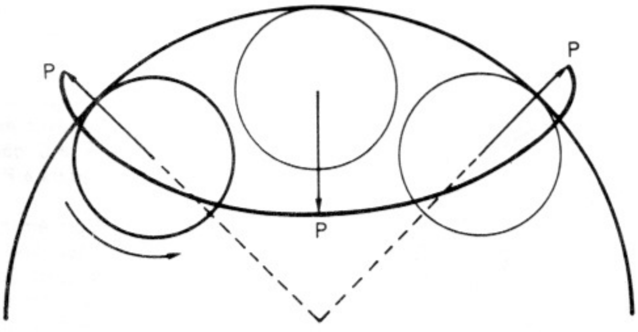
Os conceitos de circunferência geradora, circunferência diretora e ponto gerador são idênticos aos já estudados na epiciclóide. O mesmo ocorre com a classificação em hipociclóides simples, encurtadas e alongadas.



Hipociclóide simples



Hipociclóide encurtada



Hipociclóide alongada

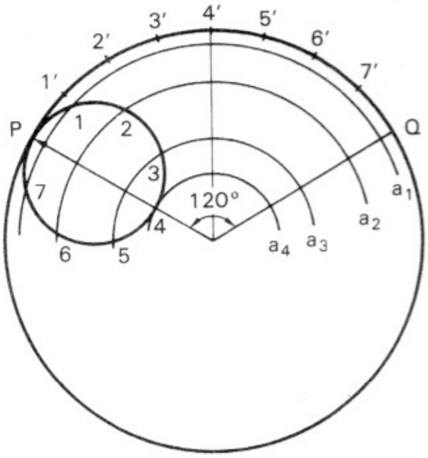
Hipociclóides notáveis

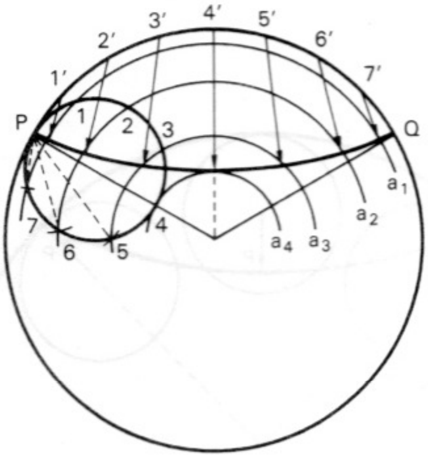
Sejam R e r, respectivamente, os raios das circunferências diretora e geradora de uma hipociclóide. A exemplo do que ocorre com a epiciclóide, se $r = \frac{R}{n}$, n = 2, 3, 4,..., a **hipociclóide** é chamada **notável**. Nesses casos particulares, a hipociclóide possui **n** ciclos, sendo que o ponto de início do primeiro ciclo e o ponto de término do último ciclo coincidem. Além disso, a cada ciclo corresponde um ângulo central de $\frac{360°}{n}$ na circunferência diretora. Como você pode notar, estas são as mesmas propriedades, já estudadas, das epiciclóides notáveis.

Note que para n = 1 tem-se r = R, isto é, a circunferência diretora coincide com a geradora. Nesse caso não se define a hipociclóide; aliás, para que ela esteja definida é necessário que se tenha $r < R$.

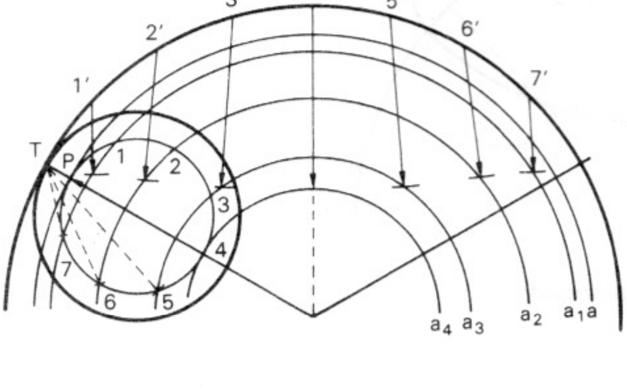
Construção de uma hipociclóide notável.

A construção de uma hipociclóide notável é realizada segundo os mesmos passos usados na construção da epiciclóide. Acompanhe nas figuras seguintes a evolução do traçado de um ciclo de uma hipociclóide simples em que $r = \frac{R}{3}$. Note que, nesse caso, um ciclo da hipociclóide corresponde a um arco PQ de 120° da circunferência diretora, pois $\widehat{PQ} = \frac{360°}{3}$.



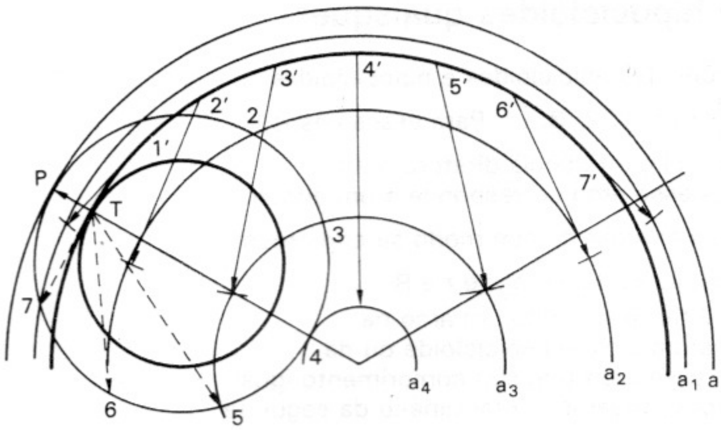


Observação: As construções de hipociclóides encurtadas e alongadas também são feitas como as epiciclóides destes tipos.



Os pares de raios com centros em 1' e 7', 2' e 6', 3' e 5' são respectivamente iguais a P7, P6 e P5.

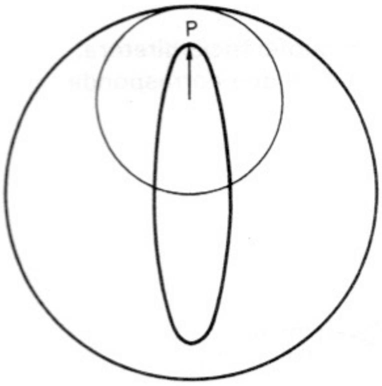
Convém destacar que, no caso das hipociclóides encurtadas e alongadas, é a circunferência do ponto gerador que deve ser dividida em seis partes iguais. Os arcos a, a_1, a_2, a_3 e a_4 passam por esses pontos de divisão.



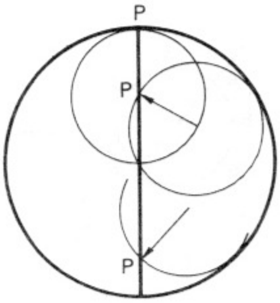
Note também que os pares de raios com centros em 1′ e 7′, 2′ e 6′, 3′ e 5′ são respectivamente iguais a T7, T6 e T5, onde T é o ponto de tangência das circunferências geradora e diretora.

Nota: Algumas hipociclóides notáveis merecem destaque especial. São as seguintes:

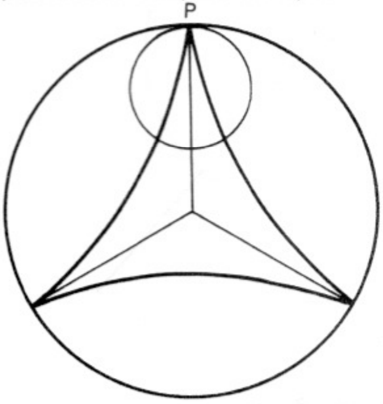
Elíptica: É qualquer hipociclóide encurtada ou alongada em que $r = \frac{R}{2}$.



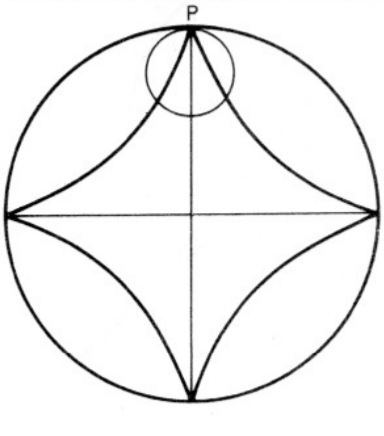
É interessante observar que, se $r = \frac{R}{2}$, a hipociclóide simples se reduz a um diâmetro da circunferência diretora. Por isso, a hipociclóide elíptica tem que ser encurtada ou alongada.



Tricúspide: É qualquer hipociclóide simples em que $r = \frac{R}{3}$.



Tetracúspide ou astróide: É qualquer hipociclóide simples em que $r = \frac{R}{4}$.

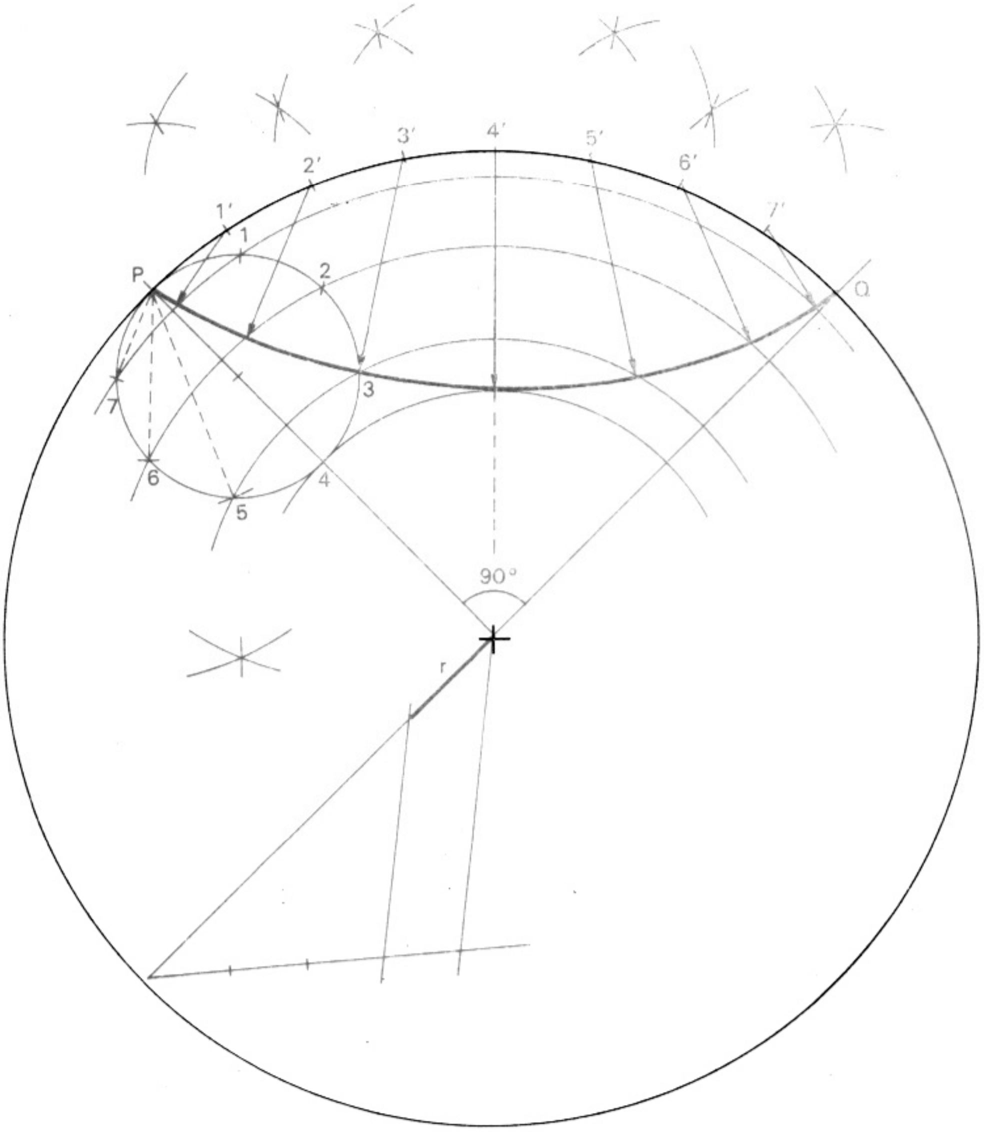


Resolva os exercícios de 84 a 87 do caderno de atividades.

Hipociclóide

Figura auxiliar e anotações

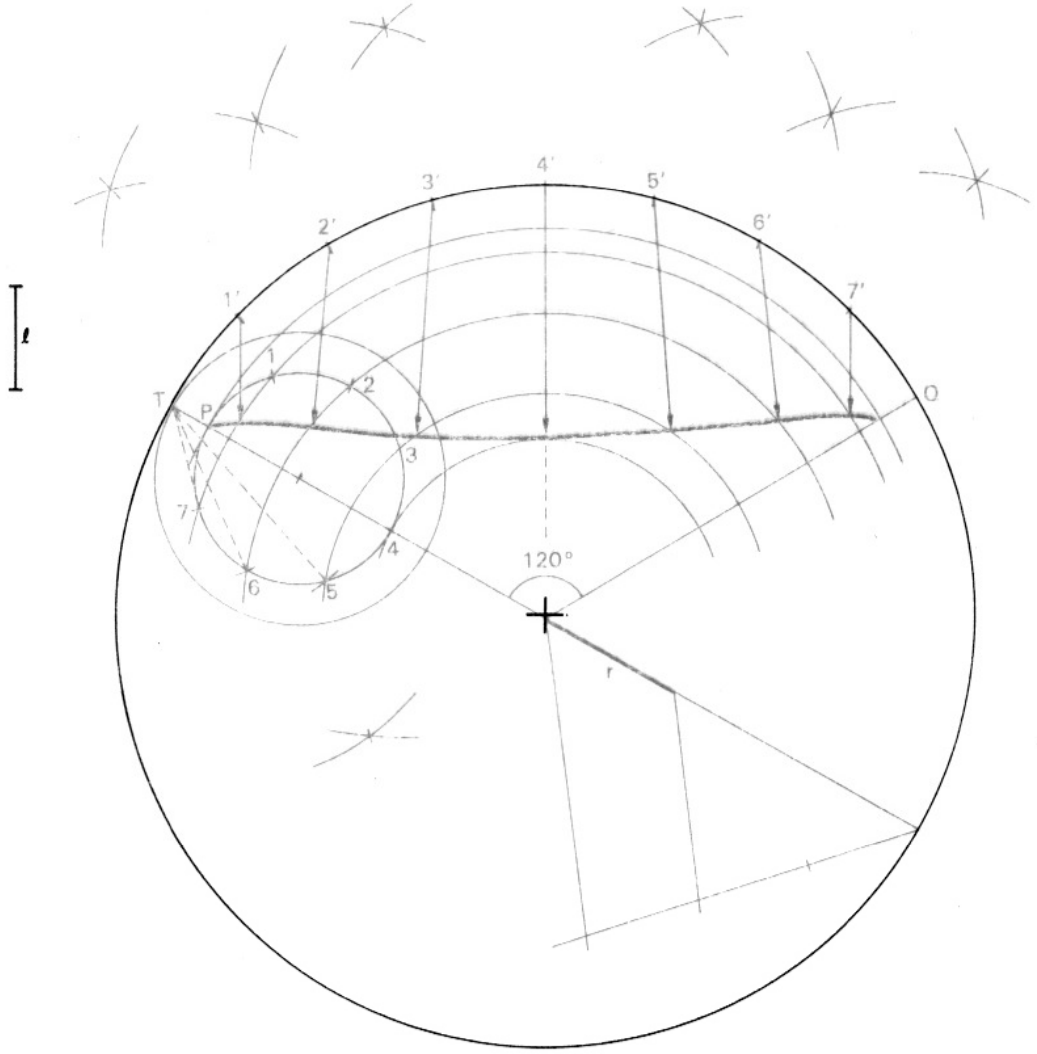
84 Construa um ciclo de uma hipociclóide simples, sabendo que o raio **r** da circunferência geradora é a quarta parte do raio R da circunferência diretora dada.



Os pares de raios com centros em 1' e 7', 2' e 6', 3' e 5', são, respectivamente, iguais a P7, P6 e P5.

Hipociclóide

85 Construa um ciclo de uma hipociclóide encurtada, sabendo que o raio **r** da circunferência geradora é a terça parte do raio R da diretora. São dados a circunferência diretora e o raio ℓ da **circunferência do ponto gerador**.

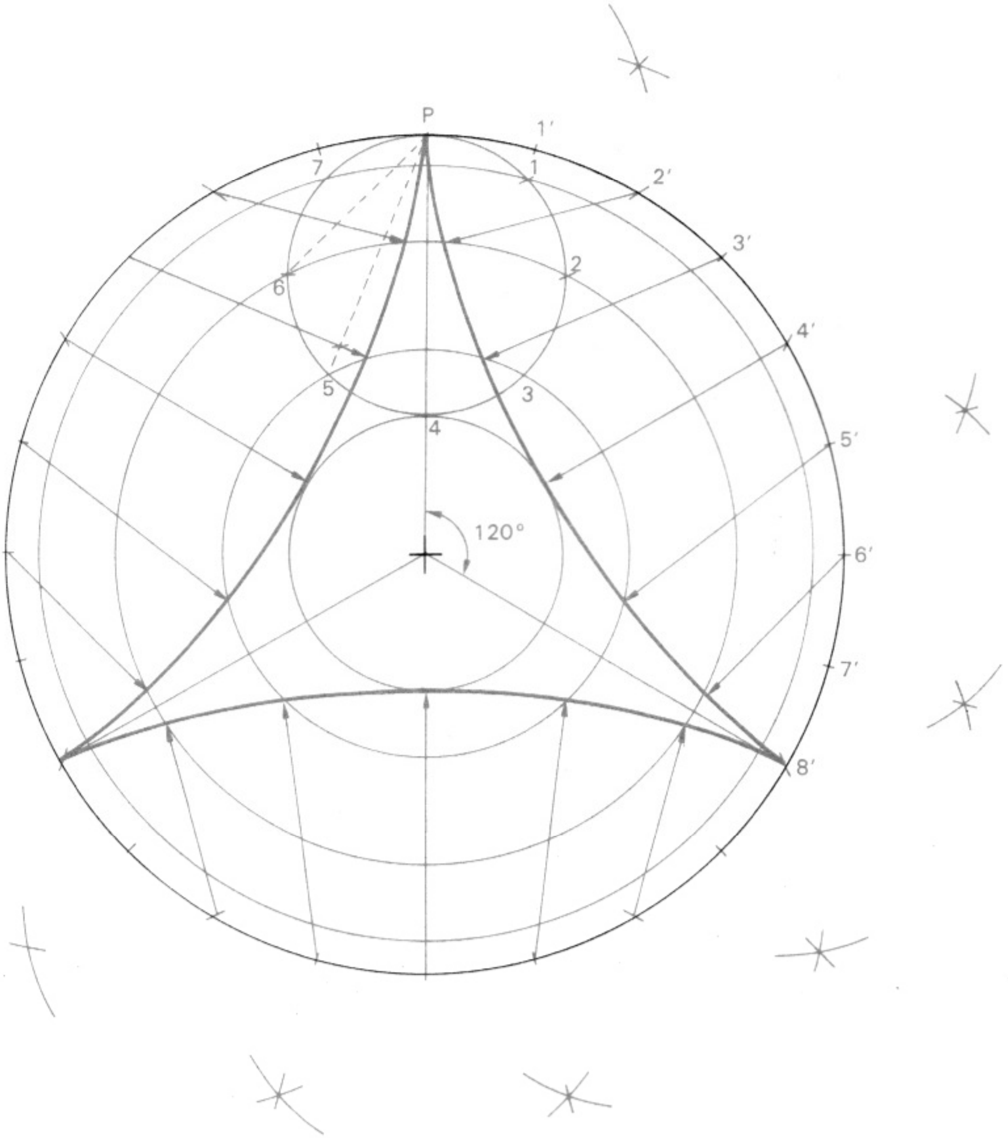


Hipociclóide

Figura auxiliar e anotações

86 Construa uma hipociclóide tricuspidal, dada a circunferência diretora.

Observação: Tricúspide é a hipociclóide simples em que $r = \frac{R}{3}$.

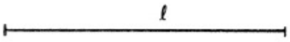

P
1'
1
7
2'
3'
2
6
4'
5
3
4
5'
120°
6'
7'
8'

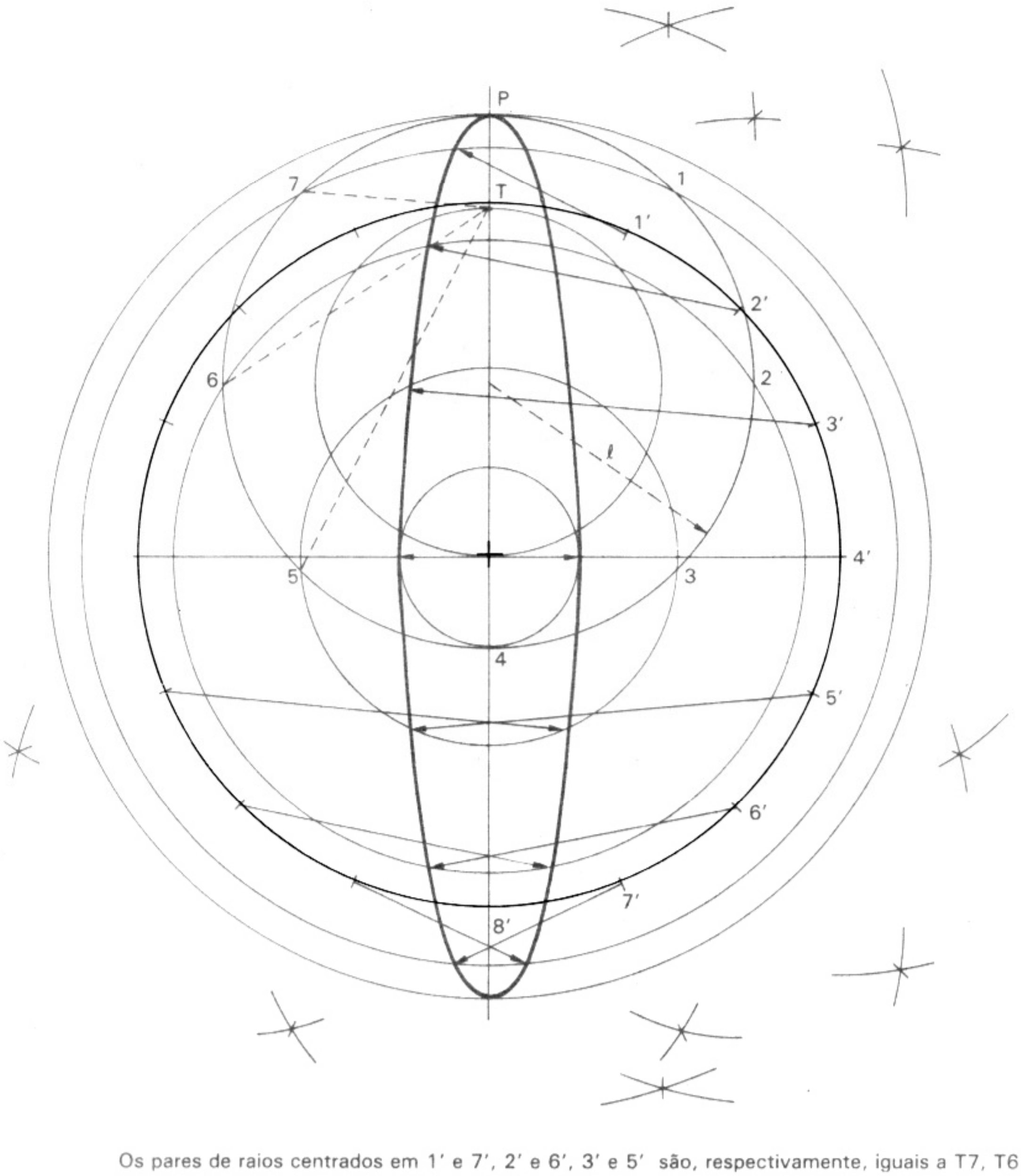
Hipociclóide

Figura auxiliar e anotações

87 Construa um ciclo de uma hipociclóide elíptica alongada, dados a circunferência diretora e o raio ℓ da **circunferência do ponto gerador**.

Observação: Lembre-se que, na hipociclóide elíptica, o raio da circunferência geradora é a metade do raio da diretora.





Os pares de raios centrados em 1' e 7', 2' e 6', 3' e 5' são, respectivamente, iguais a T7, T6 e T5.

Construção de epiciclóides e hipociclóides quaisquer

Até aqui estudamos apenas as construções das epiciclóides e hipociclóides notáveis, isto é, daquelas em que $r = \frac{R}{n}$ (n = 1, 2, 3,...). Para esses casos, como você notou, fica fácil determinar na circunferência diretora o arco correspondente a um ciclo da curva, pois esse arco corresponde a um ângulo central de $\frac{360°}{n}$. Pois bem, agora vamos estudar de que modo se constroem essas curvas quando não se conhece qualquer relação entre **r** e R.

Na realidade, o problema se restringe à determinação de um arco na circunferência diretora que corresponda a um ciclo da epiciclóide ou da hipociclóide a ser construída. Ora, como esse arco tem seu comprimento igual ao comprimento da circunferência geradora, podemos determiná-lo da seguinte maneira:

Seja P o ponto de tangência das circunferências diretora e geradora.

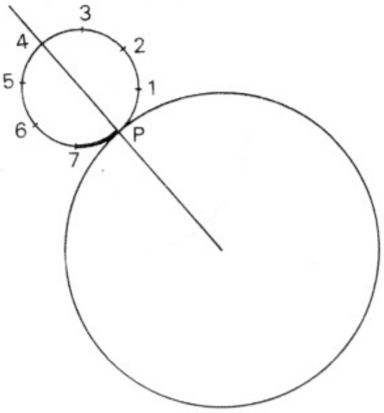
1.º) Divide-se a **circunferência geradora** em oito partes iguais e seja $\widehat{P7}$ um dos arcos obtidos.

2.º) Retifica-se o arco P7 e, em seguida, deve-se desretificá-lo sobre a circunferência diretora obtendo o arco α.

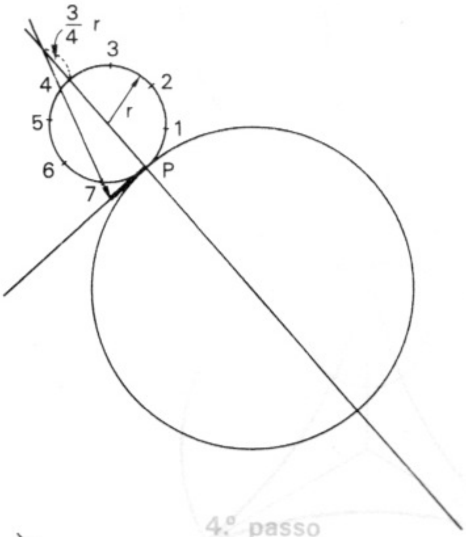
3.º) A partir de P, aplica-se oito vezes o arco α sobre a circunferência diretora. Seja 8′ a extremidade do último arco. Então, $\widehat{P8'}$ é o arco que corresponde a um ciclo da curva a ser construída.

◁ **Atenção!**
É a circunferência geradora que deve ser dividida em partes iguais, não importando se a epiciclóide ou hipociclóide a ser construída seja simples, encurtada ou alongada.

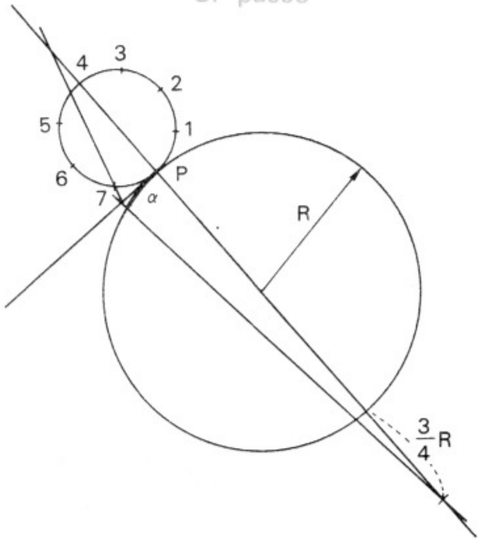
1.º passo



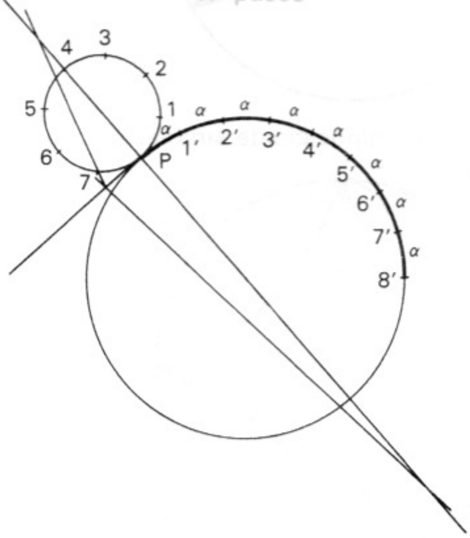
2.º passo



3.º passo



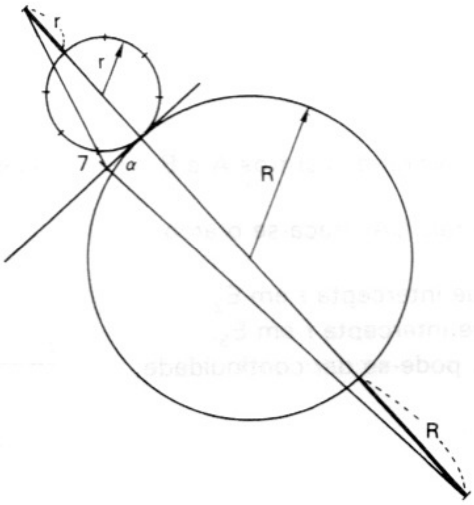
4.º passo



Uma vez obtido o arco P8′, realiza-se a construção da epiciclóide, ou da hipociclóide, do mesmo modo que se faz quando ela é notável.

Observação: Nas operações de retificação e desretificação do arco P7 podem-se utilizar **r** e R no lugar de $\frac{3}{4}$ r e $\frac{3}{4}$ R. Pelo fato de o arco P7 ser pequeno ($\widehat{P7} = 22^\circ 30'$), tal procedimento é possível e, sem dúvida, muito mais prático.

Caso seja necessário, consulte o volume 2 desta coleção para relembrar como se executam a retificação e a desretificação de um arco.

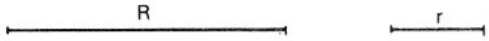


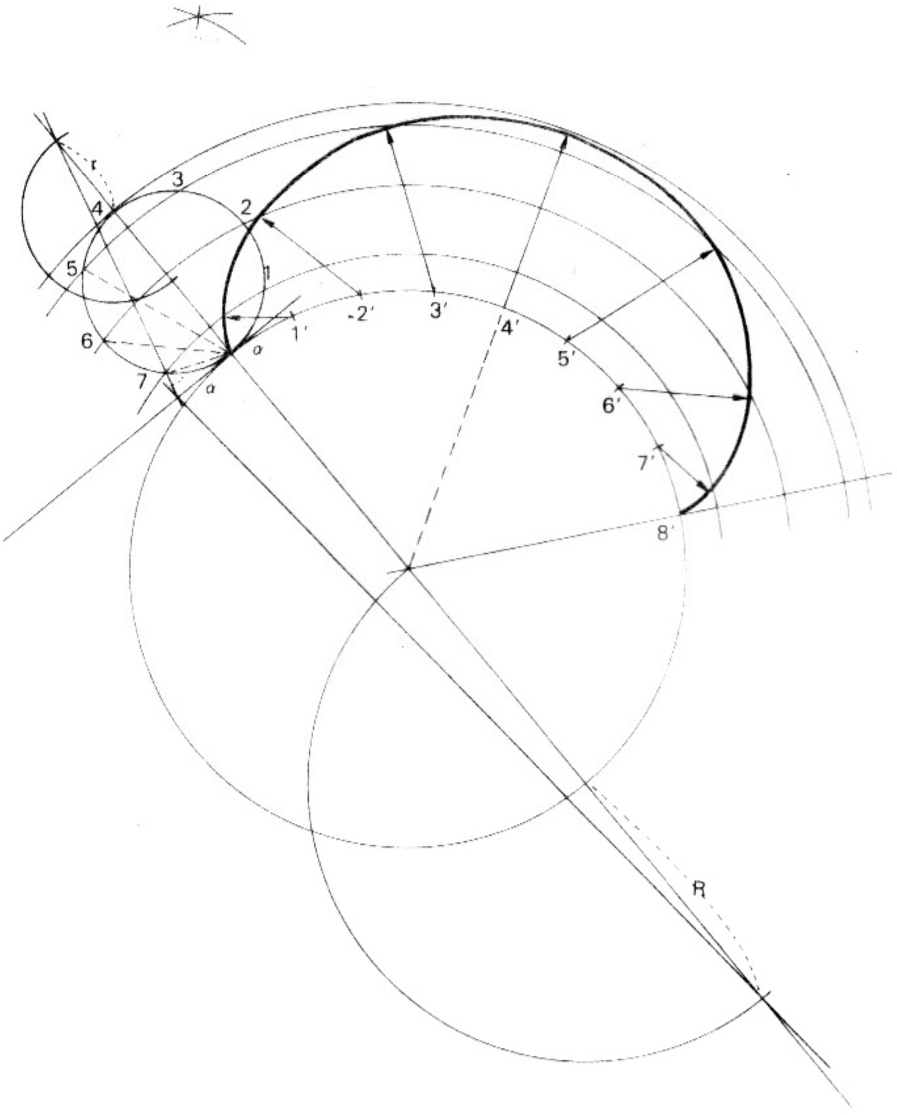
Resolva os exercícios 88 e 89 do caderno de atividades.

Epiciclóide qualquer

Figura auxiliar e anotações

88 Construa um ciclo de uma **epiciclóide** simples, dados os raios R e **r** das circunferências diretora e geradora, respectivamente.

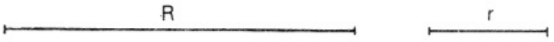


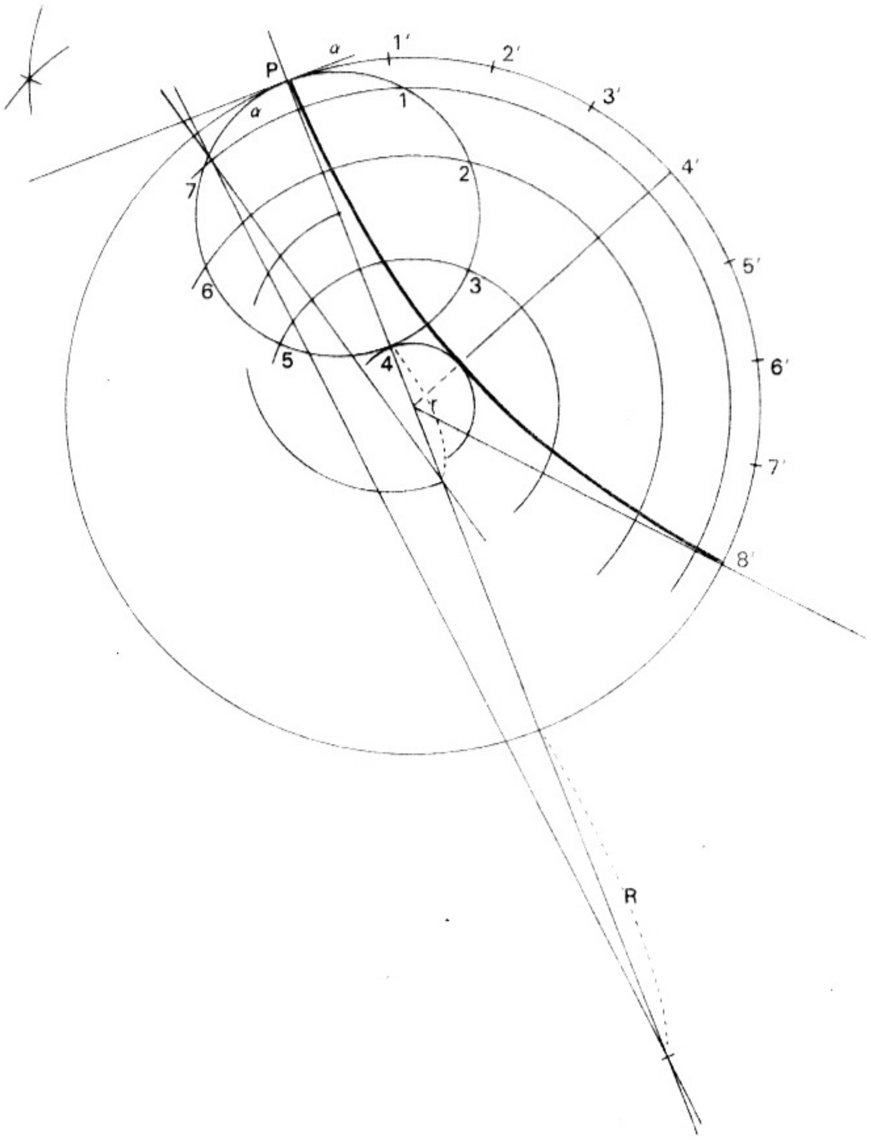

r
3
4
2
5
1
6
7
α
α
1'
2'
3'
4'
5'
6'
7'
8'
R

Hipociclóide qualquer

Figura auxiliar e anotações

89 Construa um ciclo de uma **hipociclóide** simples, dados os raios R e **r** das circunferências diretora e geradora, respectivamente.




P
α
α
1′
2′
3′
4′
5′
6′
7′
8′
1
2
3
4
5
6
7
r
R

8

Espirais

Espirais policêntricas

Construção da espiral de dois centros

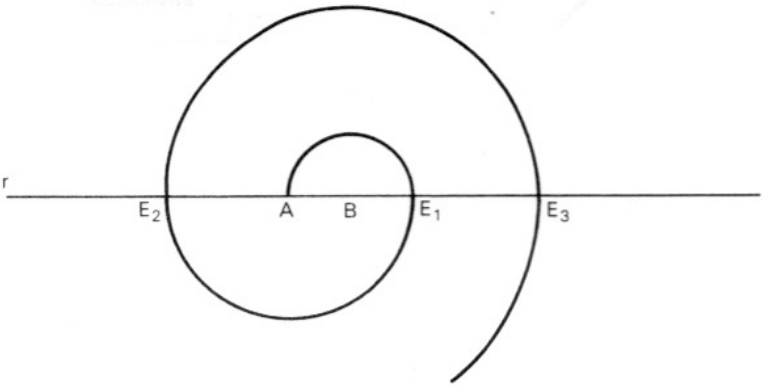
Sejam dados dois pontos A e B. Para construir uma espiral de centros A e B fazemos o seguinte:

1.º) Traça-se a reta **r** por A e B. Com centro em B e raio BA, traça-se o arco que intercepta **r** em E_1.

2.º) Com centro em A e raio AE_1, traça-se o arco que intercepta **r** em E_2.

3.º) Com centro em B e raio BE_2, traça-se o arco que intercepta **r** em E_3.

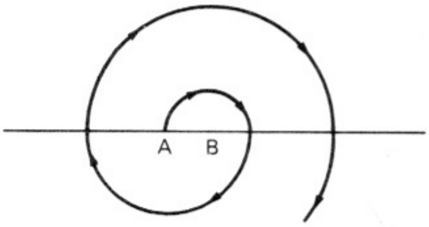
4.º) E assim por diante. Alterando os centros A e B, pode-se dar continuidade ao traçado da espiral.



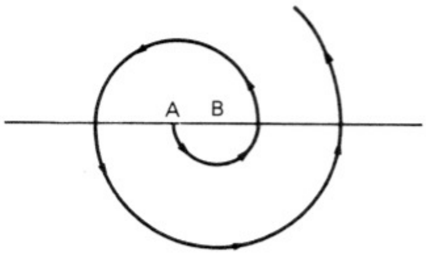
Observação: Iniciando-se o traçado da espiral com centro em B, há duas maneiras diferentes para construí-la, pois o seu desenvolvimento pode seguir dois sentidos: horário ou anti-horário.

Toda espiral que se desenvolve no sentido horário é chamada **direita** ou **dextrorsa** e toda espiral que se desenvolve no sentido anti-horário é chamada **esquerda** ou **sinistrorsa.**

Direita ou dextrorsa



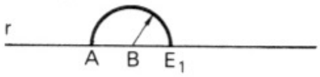
Esquerda ou sinistrorsa



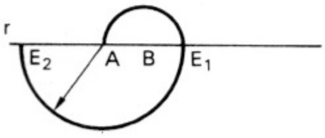
Assim, para que uma espiral de dois centros, A e B, possa ser construída de forma única, é necessário definir se ela é direita ou se é esquerda e, além disso, é preciso definir qual dos dois pontos A e B é o primeiro centro.

Evolução do traçado

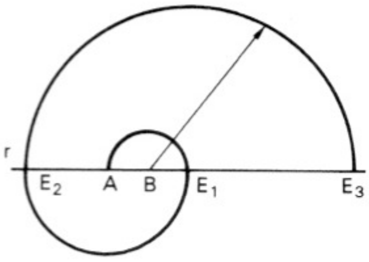
1.º passo



2.º passo



3.º passo

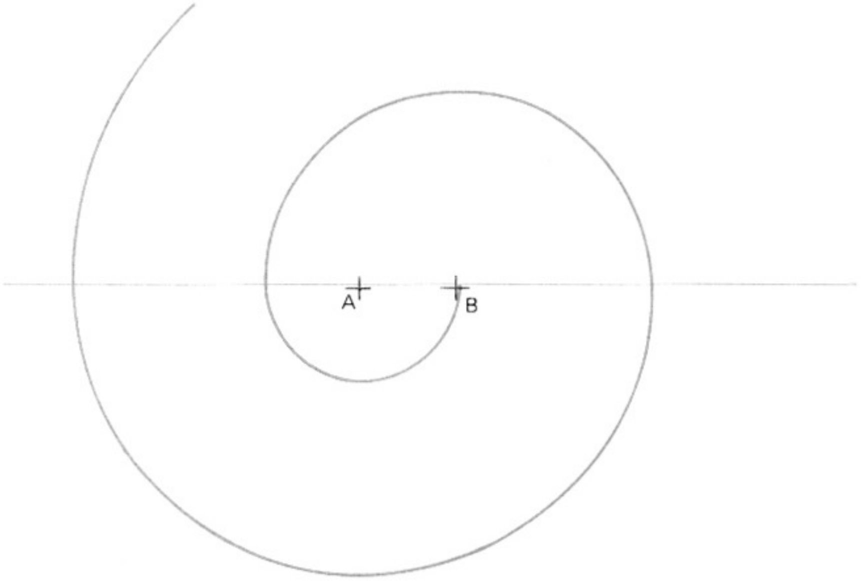


Resolva os exercícios 90 e 91 do caderno de atividades.

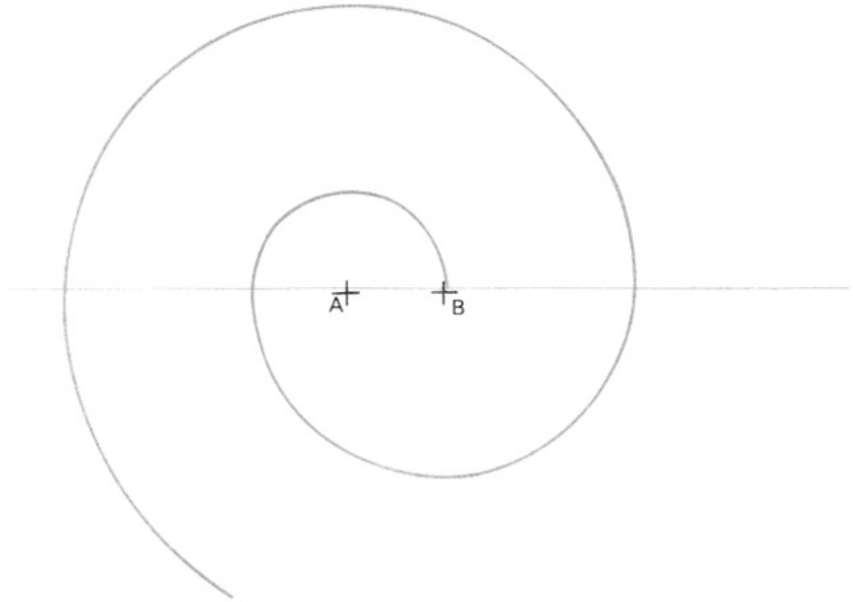
Espiral

Figura auxiliar e anotações

90 Construa uma espiral direita de dois centros, A e B, sabendo que A é o primeiro centro.



91 Construa uma espiral esquerda de dois centros, A e B, sabendo que A é o primeiro centro.



Construção da espiral de três centros

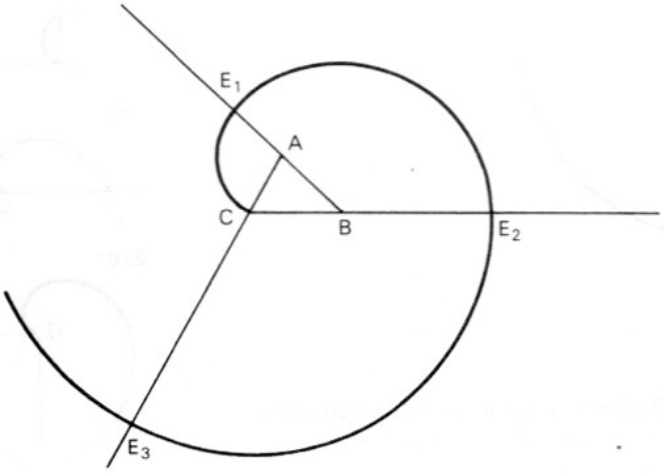
Sejam A, B e C os centros da espiral a ser construída. Então, executa-se a construção da seguinte maneira:

1.º) Traçam-se as semi-retas $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Com centro em A e raio AC, traça-se o arco que intercepta $\overrightarrow{BA}$ em E_1.

2.º) Com centro em B e raio BE_1, traça-se o arco que intercepta $\overrightarrow{CB}$ em E_2.

3.º) Com centro em C e raio CE_2, traça-se o arco que intercepta $\overrightarrow{AC}$ em E_3.

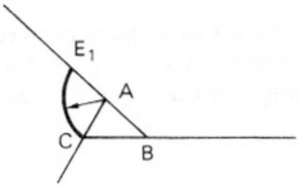
4.º) Alternando os centros na seqüência A, B e C, pode-se continuar o traçado da espiral.



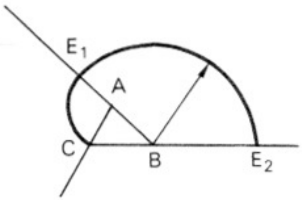
Observação: Também uma espiral de três centros pode ser construída de maneira única quando se especifica se ela é direita ou se é esquerda e se define qual é o primeiro centro.

Evolução do traçado

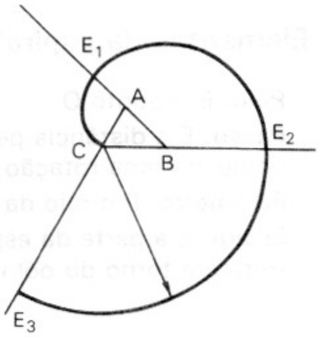
1.º passo



2.º passo



3.º passo



Resolva os exercícios 92 e 93 do caderno de atividades.

Construção da espiral de quatro centros

Sejam A, B, C e D os centros da espiral a ser construída.

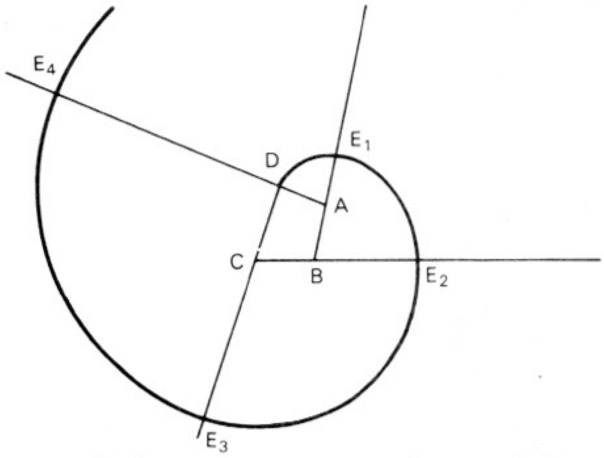
1.º) Traçam-se as semi-retas $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{BA}$. Com centro em A e raio AD, traça-se o arco que intercepta $\overrightarrow{BA}$ em E_1.

2.º) Com centro em B e raio BE_1, traça-se o arco que intercepta $\overrightarrow{CB}$ em E_2.

3.º) Com centro em C e raio CE_2, traça-se o arco que intercepta $\overrightarrow{DC}$ em E_3.

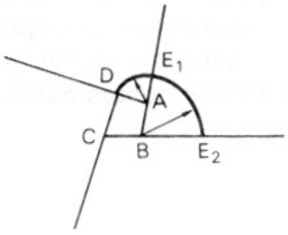
4.º) Com centro em D e raio DE_3, traça-se o arco que intercepta $\overrightarrow{AD}$ em E_4.

5.º) Alternando os centros na seqüência A, B, C e D, pode-se continuar o traçado da espiral.

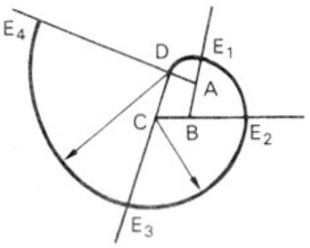


Observação: A exemplo do que acontece nas duas espirais estudadas anteriormente, a espiral de quatro centros pode ser construída de maneira única quando se define se ela é direita ou se é esquerda e se informa qual é o primeiro centro.

1.º e 2.º passos

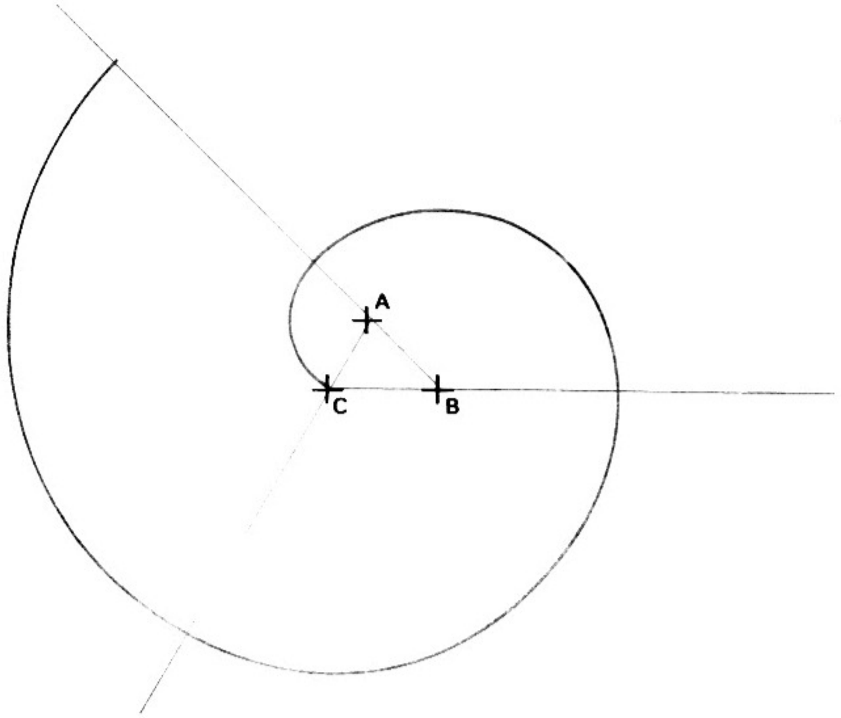


3.º e 4.º passos

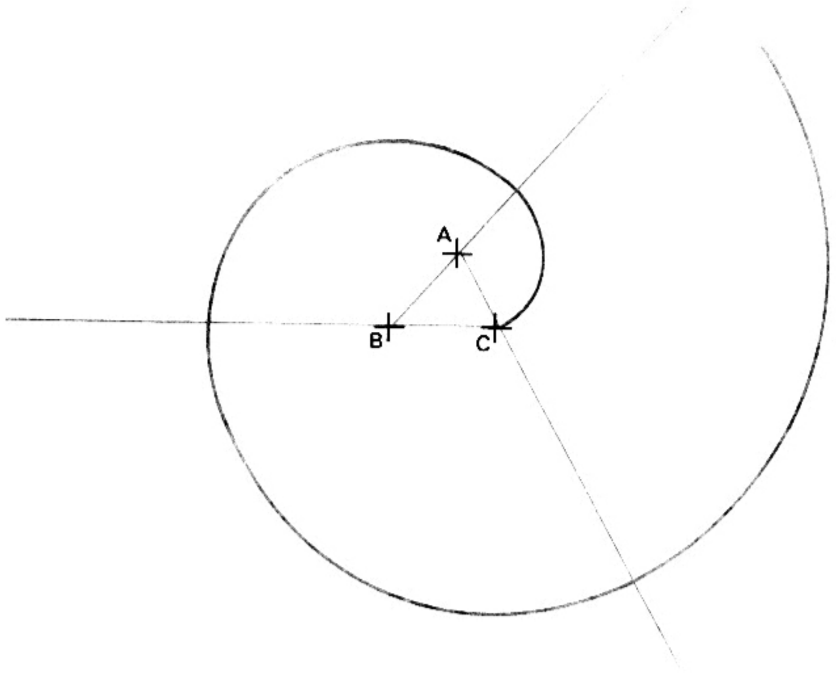


Resolva os exercícios 94 e 95 do caderno de atividades.

92 Construa uma espiral direita de três centros, A, B e C, sabendo que A é o primeiro centro.



93 Construa uma espiral esquerda de três centros, A, B e C, sabendo que A é o primeiro centro.



Construção da espiral de três centros

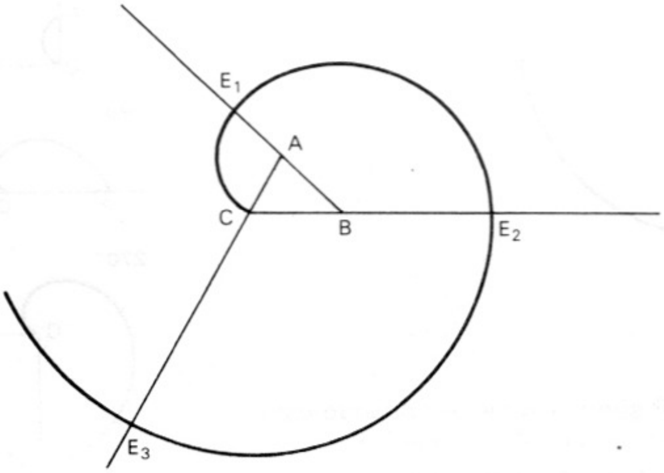
Sejam A, B e C os centros da espiral a ser construída. Então, executa-se a construção da seguinte maneira:

1.º) Traçam-se as semi-retas $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Com centro em A e raio AC, traça-se o arco que intercepta $\overrightarrow{BA}$ em E_1.

2.º) Com centro em B e raio BE_1, traça-se o arco que intercepta $\overrightarrow{CB}$ em E_2.

3.º) Com centro em C e raio CE_2, traça-se o arco que intercepta $\overrightarrow{AC}$ em E_3.

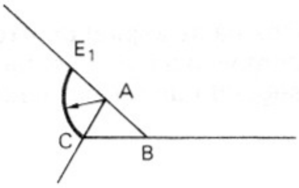
4.º) Alternando os centros na seqüência A, B e C, pode-se continuar o traçado da espiral.



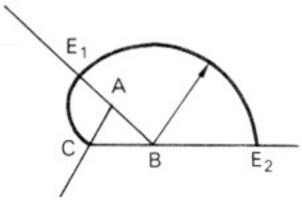
Observação: Também uma espiral de três centros pode ser construída de maneira única quando se especifica se ela é direita ou se é esquerda e se define qual é o primeiro centro.

Evolução do traçado

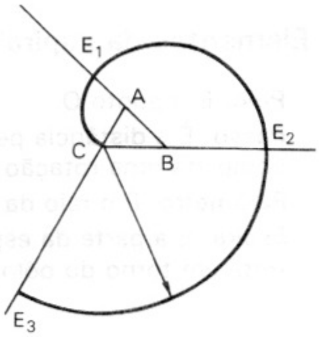
1.º passo



2.º passo



3.º passo



Resolva os exercícios 92 e 93 do caderno de atividades.

Construção da espiral de quatro centros

Sejam A, B, C e D os centros da espiral a ser construída.

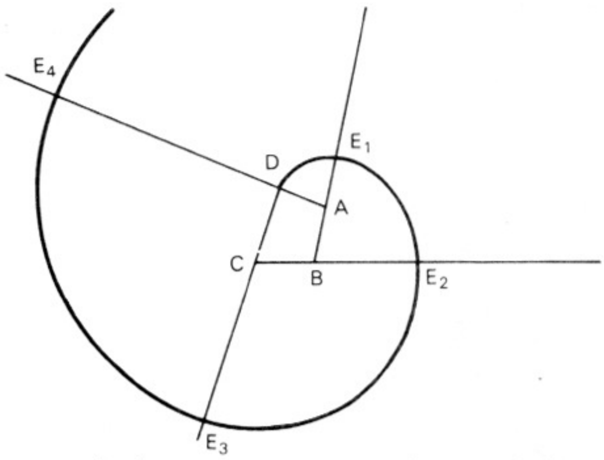
1.º) Traçam-se as semi-retas $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$ e $\overrightarrow{BA}$. Com centro em A e raio AD, traça-se o arco que intercepta $\overrightarrow{BA}$ em E_1.

2.º) Com centro em B e raio BE_1, traça-se o arco que intercepta $\overrightarrow{CB}$ em E_2.

3.º) Com centro em C e raio CE_2, traça-se o arco que intercepta $\overrightarrow{DC}$ em E_3.

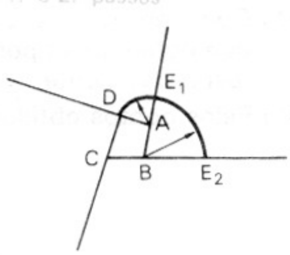
4.º) Com centro em D e raio DE_3, traça-se o arco que intercepta $\overrightarrow{AD}$ em E_4.

5.º) Alternando os centros na seqüência A, B, C e D, pode-se continuar o traçado da espiral.

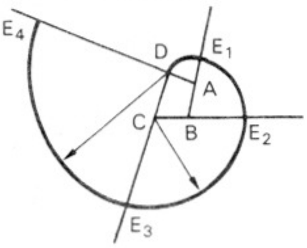


Observação: A exemplo do que acontece nas duas espirais estudadas anteriormente, a espiral de quatro centros pode ser construída de maneira única quando se define se ela é direita ou se é esquerda e se informa qual é o primeiro centro.

1.º e 2.º passos



3.º e 4.º passos

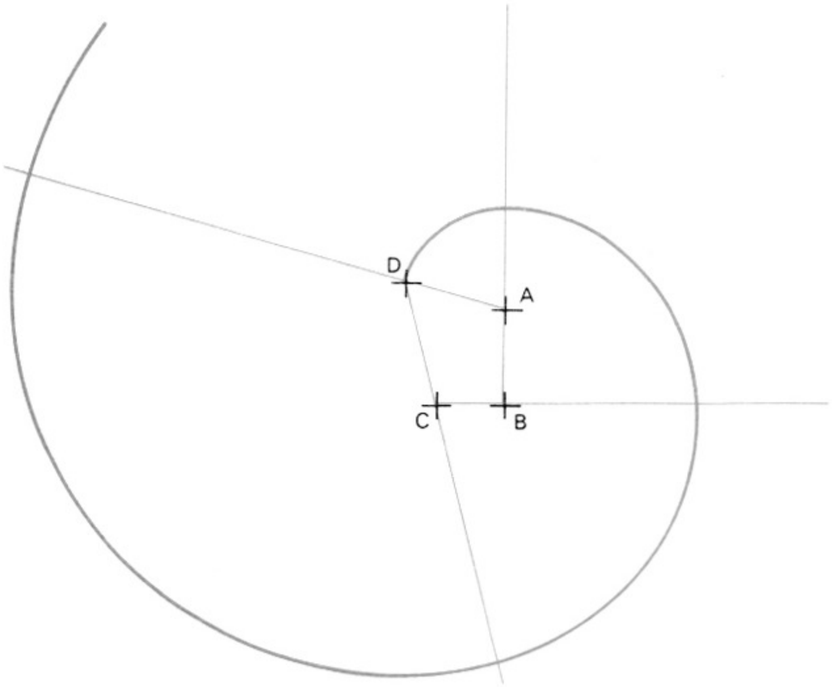


Resolva os exercícios 94 e 95 do caderno de atividades.

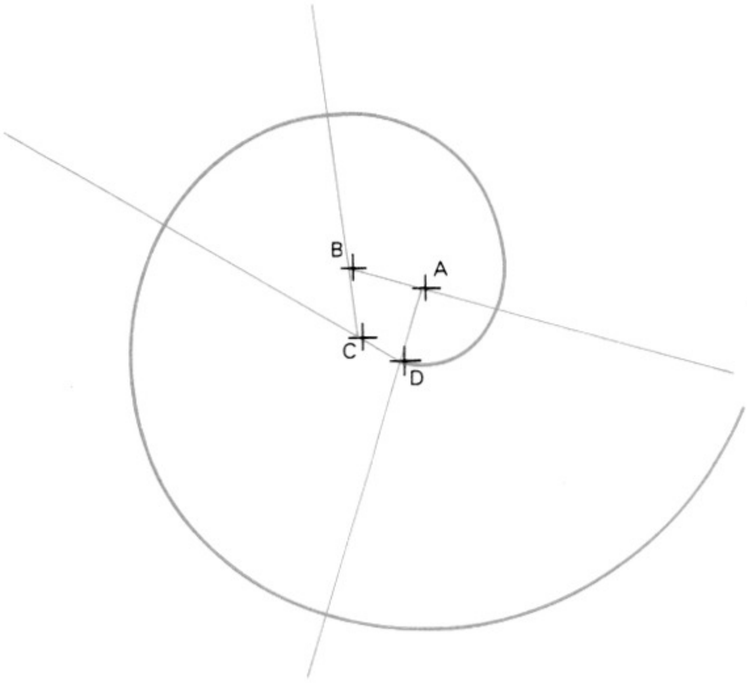
Espiral

Figura auxiliar e anotações

94 Construa uma espiral direita de quatro centros, A, B, C e D, sabendo que A é o primeiro centro.



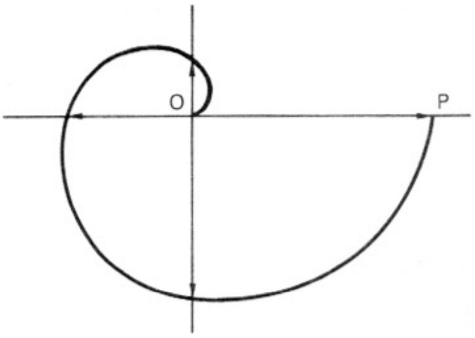
95 Construa uma espiral esquerda de quatro centros, A, B, C e D, sabendo que A é o primeiro centro.



Espiral de Arquimedes

Definição

Chama-se **espiral de Arquimedes** a curva gerada por um ponto P que se desloca com velocidade constante sobre uma semi-reta de origem O, a qual gira segundo uma velocidade angular constante em torno de O.



Elementos da espiral de Arquimedes

- **Pólo:** É o ponto O.
- **Passo:** É a distância percorrida pelo ponto P sobre a semi-reta quando esta completa uma rotação de 360°. (Na figura anterior, OP é o passo.)
- **Parâmetro:** É o raio da circunferência cuja retificação é igual ao passo.
- **Espira:** É a parte da espiral correspondente a uma rotação de 360° da semi-reta em torno do pólo. (A figura anterior representa uma espira da espiral.)

Construção da espiral de Arquimedes

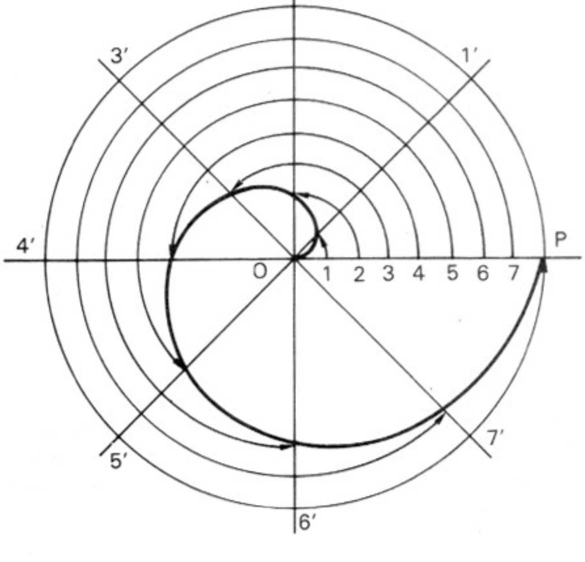
Vamos supor que seja dado o passo OP da espiral a ser construída.

1.º) Divide-se $\overline{OP}$ em um mesmo número de partes iguais: oito partes, por exemplo, obtendo os pontos 1, 2, 3,..., 7 da figura.

2.º) Traça-se a circunferência de centro O e raio OP e divide-se essa circunferência no mesmo número de partes em que foi dividido o passo. Obtêm-se os pontos 1′, 2′, 3′, ..., 7′ da figura.

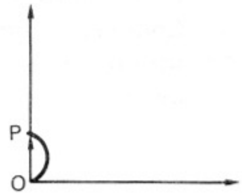
3.º) Com centro em O e raios iguais a O1, O2, O3,..., O7, traçam-se os arcos que determinam pontos da espiral em O1′, O2′, O3′,..., O7′, respectivamente.

4.º) Pelos pontos obtidos, traça-se uma espira da curva.

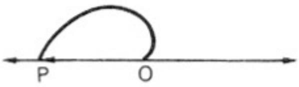


Observe as figuras. Enquanto a semi-reta gira com velocidade angular constante, o ponto P se desloca com velocidade constante sobre ela, afastando-se de O.

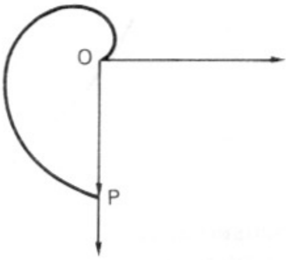
90°



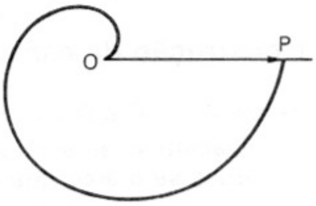
180°



270°

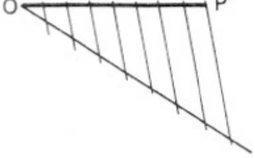


360°

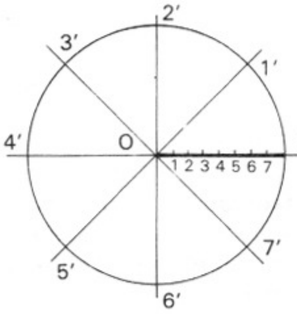


Evolução do traçado

1.º passo

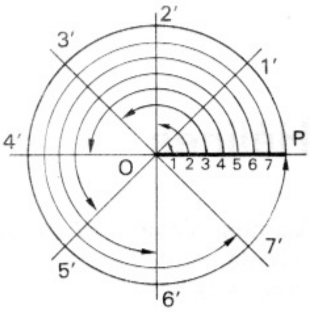


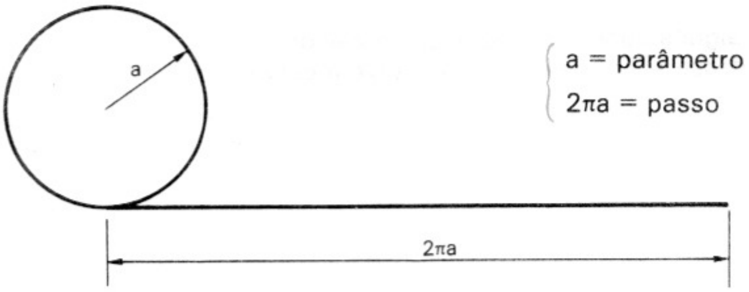
2.º passo



Observação: É importante notar que a construção da espiral de Arquimedes depende exclusivamente de se conhecer o passo. Assim, se o passo não for explicitamente dado, é necessário obtê-lo. Suponha, por exemplo, que se queira construir uma espiral de Arquimedes da qual é conhecido o parâmetro **a**. Ora, basta lembrar que o passo tem comprimento igual ao comprimento da circunferência de raio **a**. Então, para obter o passo, temos que retificar uma circunferência de raio **a**.

3.º passo





a = parâmetro
2πa = passo

Resolva os exercícios de 96 a 98 do caderno de atividades.

Tangente e normal à espiral de Arquimedes

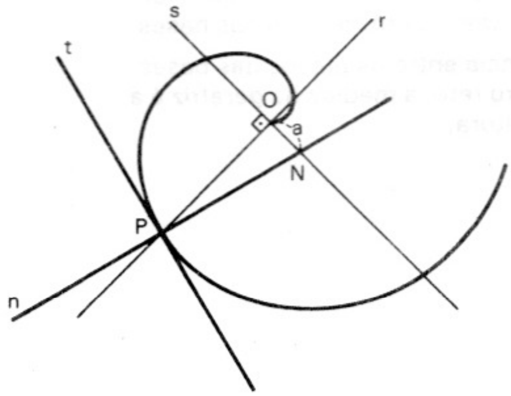
Seja P um ponto de uma espiral de Arquimedes pelo qual se deseja traçar a normal e a tangente à curva.

1.º) Traça-se a reta **r** passando por P e pelo pólo O.

2.º) Traça-se a reta **s** perpendicular a **r** no ponto O.

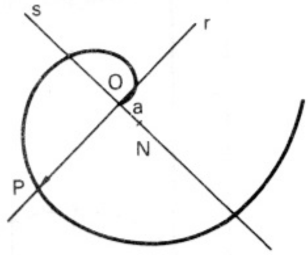
3.º) Sobre **s** toma-se ON igual ao parâmetro **a**.

Então, a reta **n** conduzida por N e P é a normal e a reta **t** perpendicular a **n** em P é a tangente.



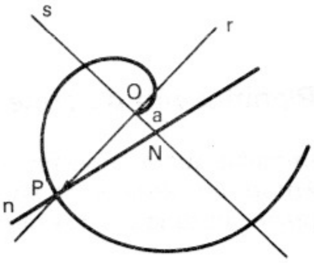
Evolução do traçado

1.º, 2.º e 3.º passos



a é o parâmetro.

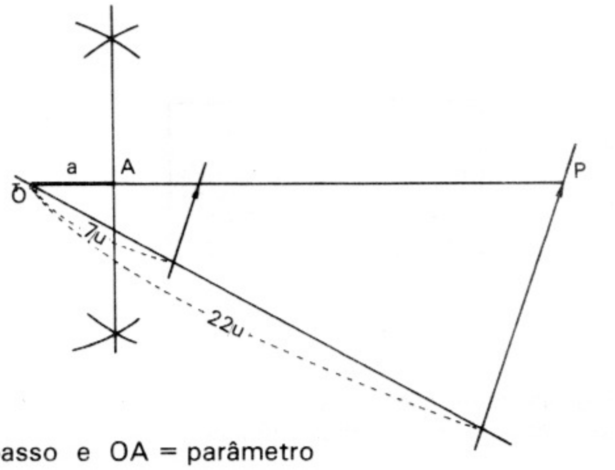
4.º passo



A reta **n** é a normal.

Se necessário, consulte o volume 2 desta coleção para relembrar como se faz a desretificação de uma circunferência.

Observação: Convém insistir que o passo da espiral de Arquimedes é igual à retificação da circunferência de raio igual ao parâmetro. Assim, quando o passo é conhecido, basta desretificá-lo para obter o parâmetro.



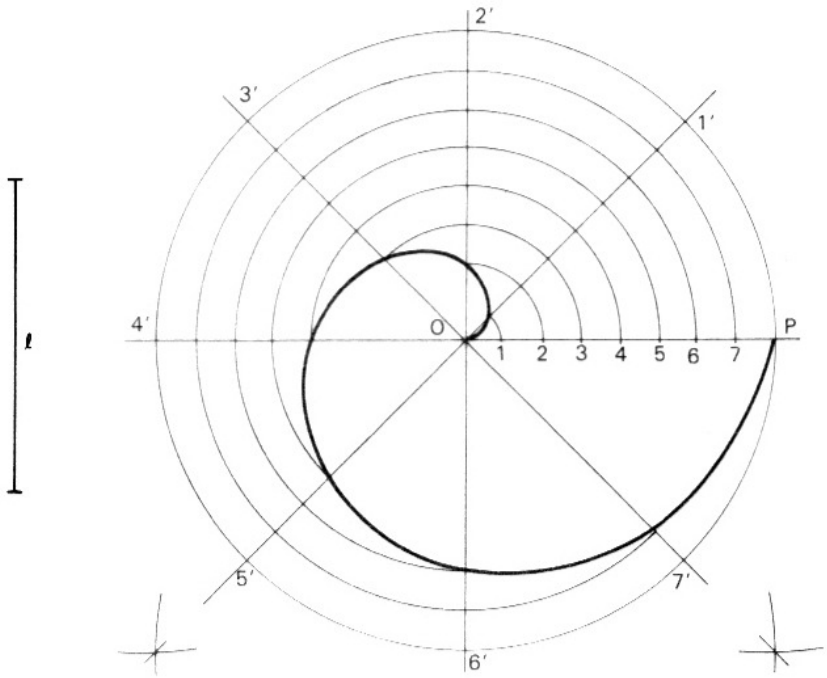
OP = passo e OA = parâmetro

Resolva os exercícios 99 e 100 do caderno de atividades.

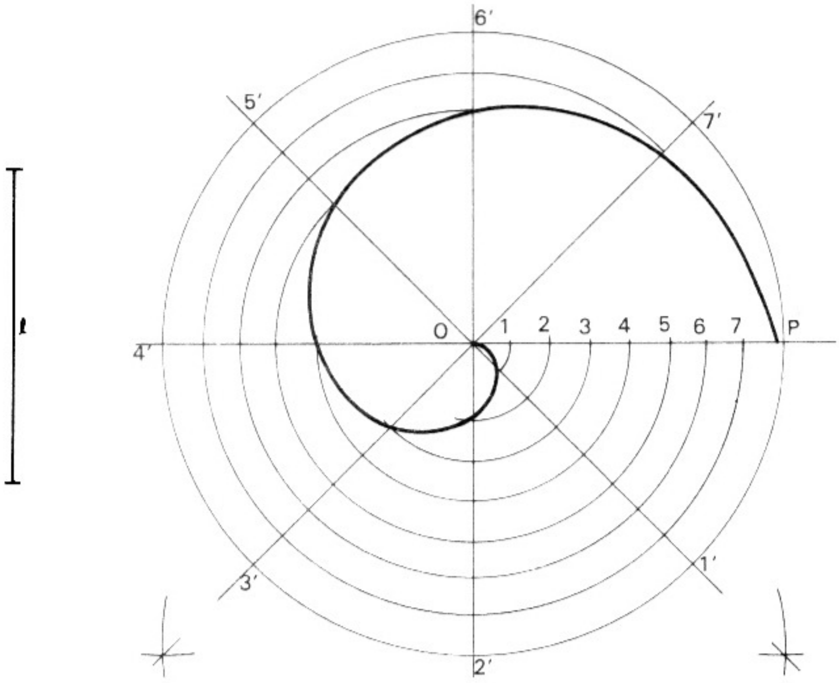
Espiral de Arquimedes

Figura auxiliar e anotações

96 Construa uma espiral de Arquimedes sinistrorsa, dado o passo ℓ.


2'
3'
1'
ℓ
4'
O
P
1
2
3
4
5
6
7
5'
7'
6'

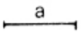
97 Construa uma espiral de Arquimedes dextrorsa, dado o passo ℓ.

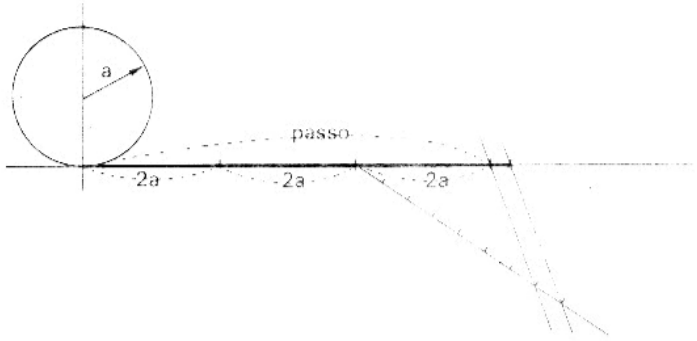

6'
5'
7'
ℓ
4'
O
1
2
3
4
5
6
7
P
3'
1'
2'

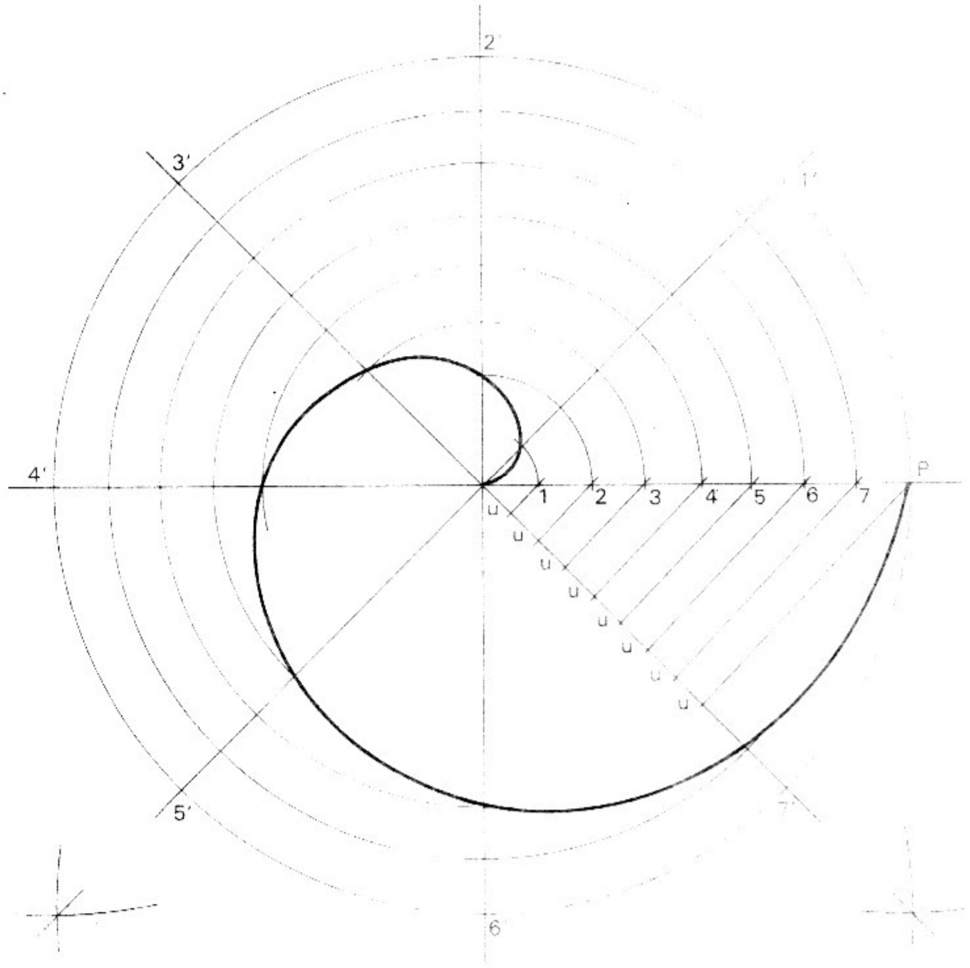
Espiral de Arquimedes

Figura auxiliar e anotações

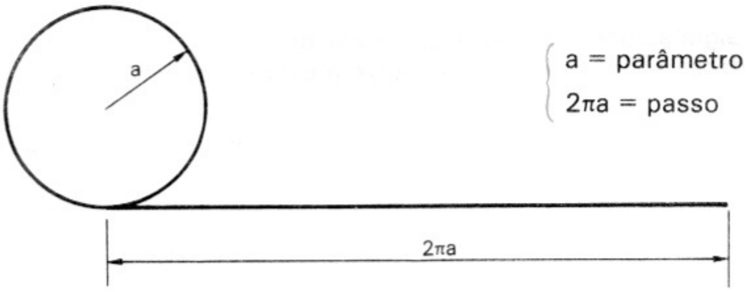
98 Construa uma espiral de Arquimedes sinistrorsa, dado o parâmetro **a**.
Sugestão: Veja a observação feita, no livro-texto, após a construção da espiral de Arquimedes.




a
passo
2a
2a
2a


2'
3'
1'
4'
1
2
3
4
5
6
7
P
u
u
u
u
u
u
u
u
5'
7'
6

Observação: É importante notar que a construção da espiral de Arquimedes depende exclusivamente de se conhecer o passo. Assim, se o passo não for explicitamente dado, é necessário obtê-lo. Suponha, por exemplo, que se queira construir uma espiral de Arquimedes da qual é conhecido o parâmetro **a**. Ora, basta lembrar que o passo tem comprimento igual ao comprimento da circunferência de raio **a**. Então, para obter o passo, temos que retificar uma circunferência de raio **a**.



a = parâmetro
2πa = passo

Tangente e normal à espiral de Arquimedes

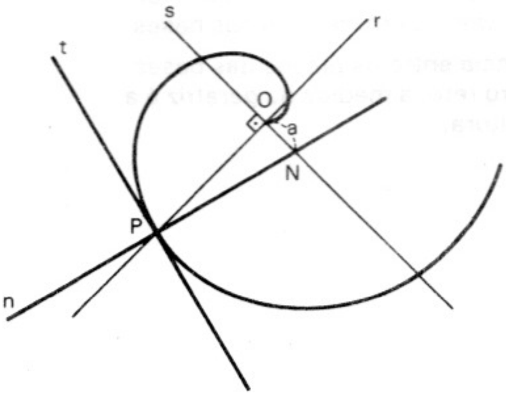
Seja P um ponto de uma espiral de Arquimedes pelo qual se deseja traçar a normal e a tangente à curva.

1.º) Traça-se a reta **r** passando por P e pelo pólo O.

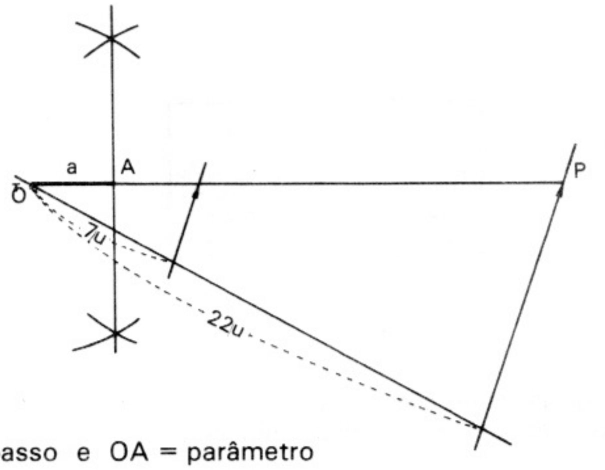
2.º) Traça-se a reta **s** perpendicular a **r** no ponto O.

3.º) Sobre **s** toma-se ON igual ao parâmetro **a**.

Então, a reta **n** conduzida por N e P é a normal e a reta **t** perpendicular a **n** em P é a tangente.

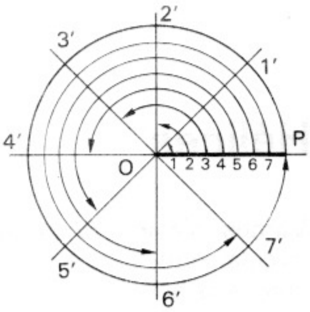


Observação: Convém insistir que o passo da espiral de Arquimedes é igual à retificação da circunferência de raio igual ao parâmetro. Assim, quando o passo é conhecido, basta desretificá-lo para obter o parâmetro.



OP = passo e OA = parâmetro

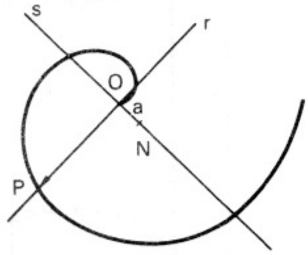
3.º passo



Resolva os exercícios de 96 a 98 do caderno de atividades.

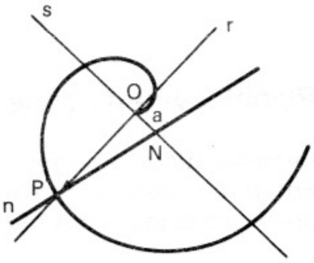
Evolução do traçado

1.º, 2.º e 3.º passos



a é o parâmetro.

4.º passo



A reta **n** é a normal.

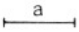
Se necessário, consulte o volume 2 desta coleção para relembrar como se faz a desretificação de uma circunferência.

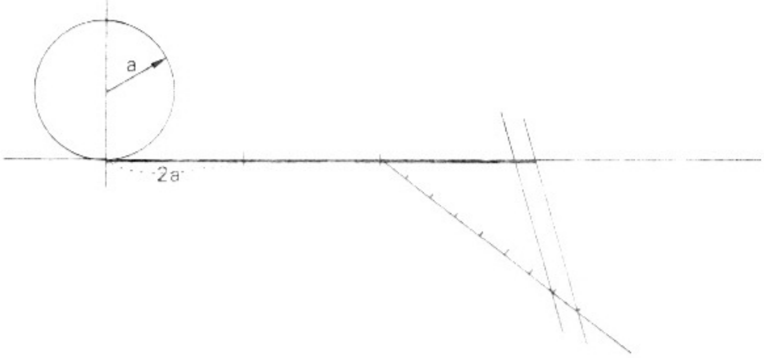
Resolva os exercícios 99 e 100 do caderno de atividades.

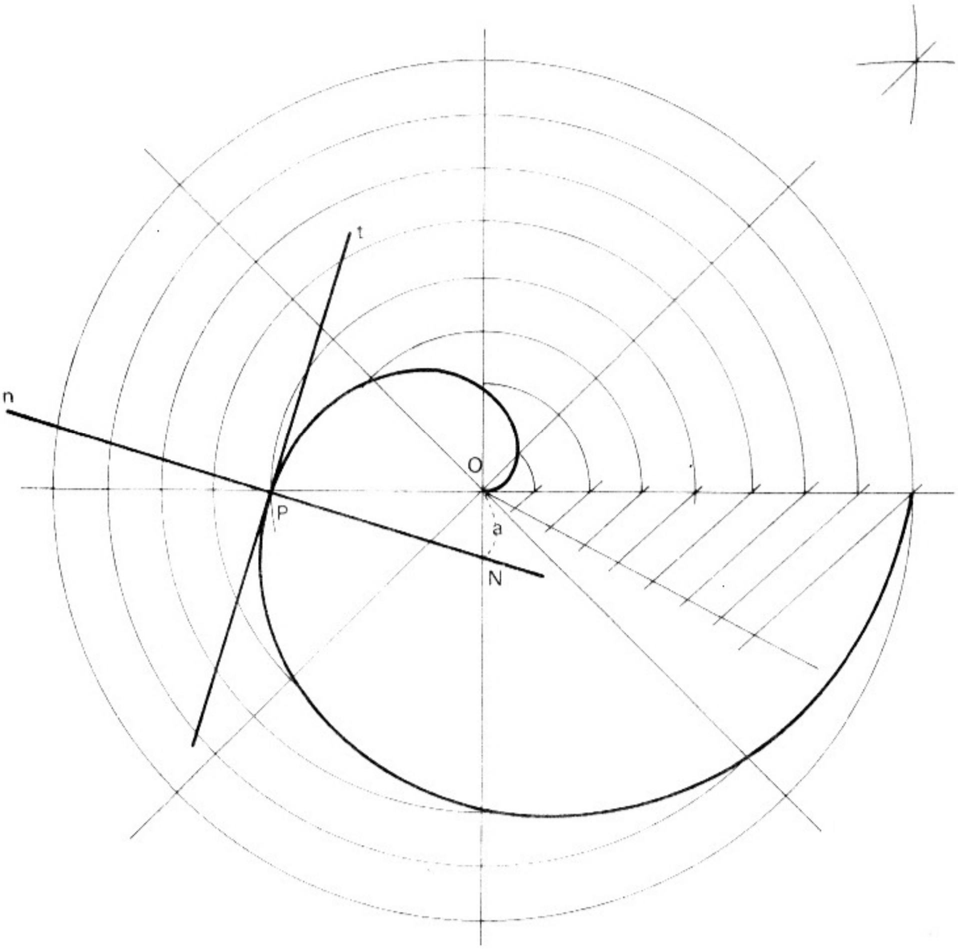
Espiral de Arquimedes: tangente e normal

Figura auxiliar e anotações

99 Construa uma espiral de Arquimedes de parâmetro **a** e trace a normal e a tangente no ponto P, correspondente a uma rotação de 180° no desenvolvimento da espiral.



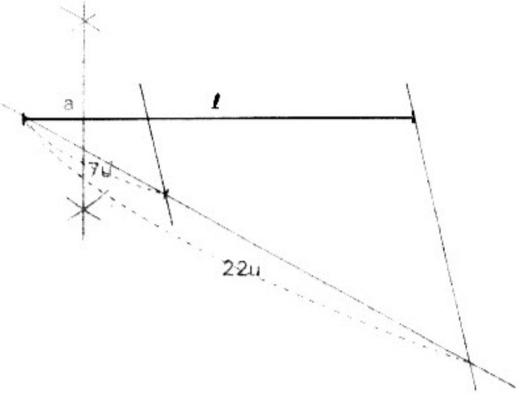


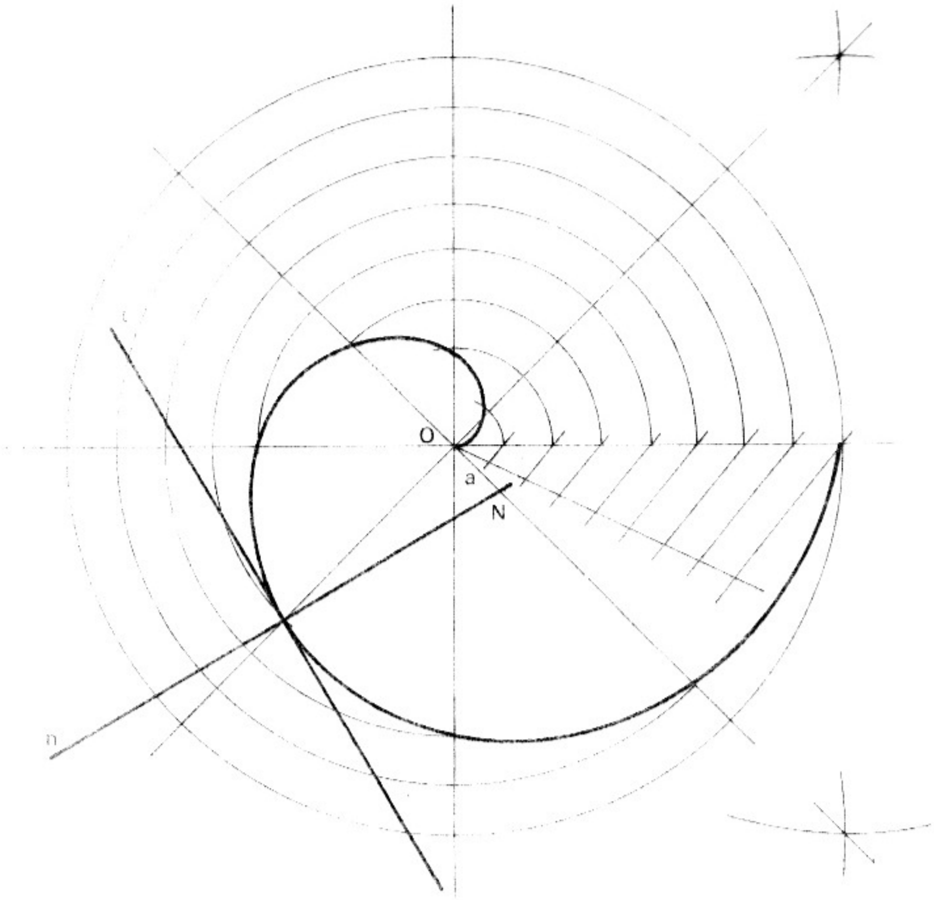


Espiral de Arquimedes: tangente e normal

Figura auxiliar e anotações

100 Dado o passo ℓ de uma espiral de Arquimedes, construa a espiral e trace a normal e a tangente no ponto P, correspondente a uma rotação de 225° do desenvolvimento da curva.





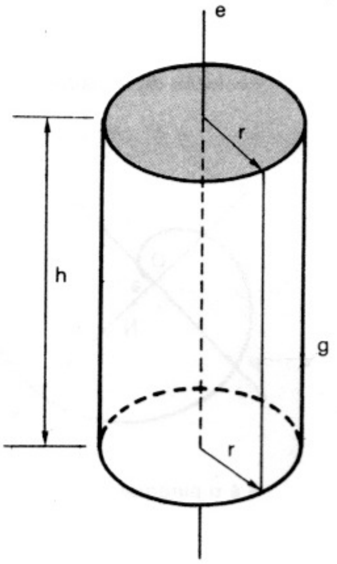
9

Hélices

Vamos iniciar este capítulo relembrando alguns conceitos relativos ao cilindro circular reto, pois é na superfície lateral desse sólido que se desenvolve a curva chamada hélice.

Cilindro circular reto

Resumindo



Bases: São os dois círculos de raios iguais a **r**. As bases estão contidas em planos paralelos.

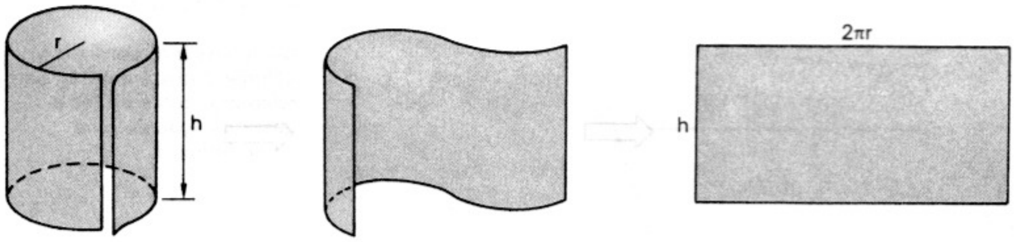
Eixo: É a reta **e**, que passa pelos centros das bases. No cilindro reto, o eixo é perpendicular aos planos das bases.

Geratriz: É qualquer segmento paralelo ao eixo e que tem suas extremidades em pontos das circunferências das bases.

Altura: É a distância entre os planos das bases. No cilindro reto, a medida da geratriz é a própria altura.

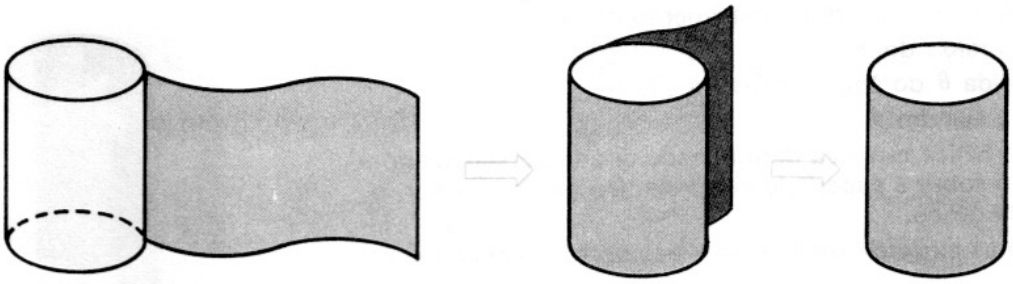
Planificação da superfície lateral

Imagine que a superfície lateral de um cilindro circular reto seja feita de papel. Então, cortando essa superfície segundo uma geratriz, podemos abri-la sobre o plano, obtendo um retângulo, conforme indicam as figuras seguintes.



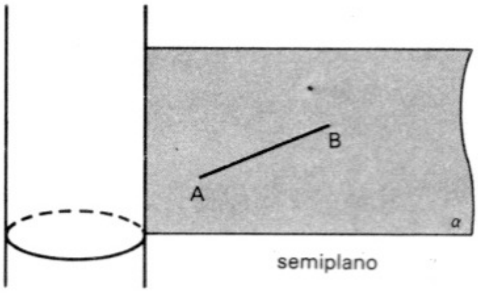
O retângulo obtido é a planificação da superfície lateral do cilindro. É importante observar que a base do retângulo é a retificação da circunferência da base do cilindro, isto é, seu comprimento é igual a $2\pi r$.

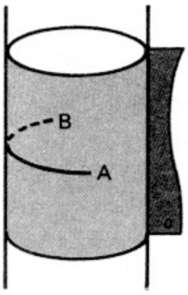
Inversamente, podemos imaginar o retângulo de papel enrolando-se em torno da superfície lateral do cilindro.



Essa idéia pode ser estendida para um semiplano que se enrola continuamente em torno da superfície lateral de um cilindro circular reto **ilimitado.** Note que o processo não precisa terminar quando se completa uma volta em torno do cilindro; podemos imaginá-lo completando voltas inteiras indefinidamente.

É interessante observar que, nesse processo de desplanificação, uma linha reta qualquer do semiplano transforma-se numa linha curva na superfície do cilindro.





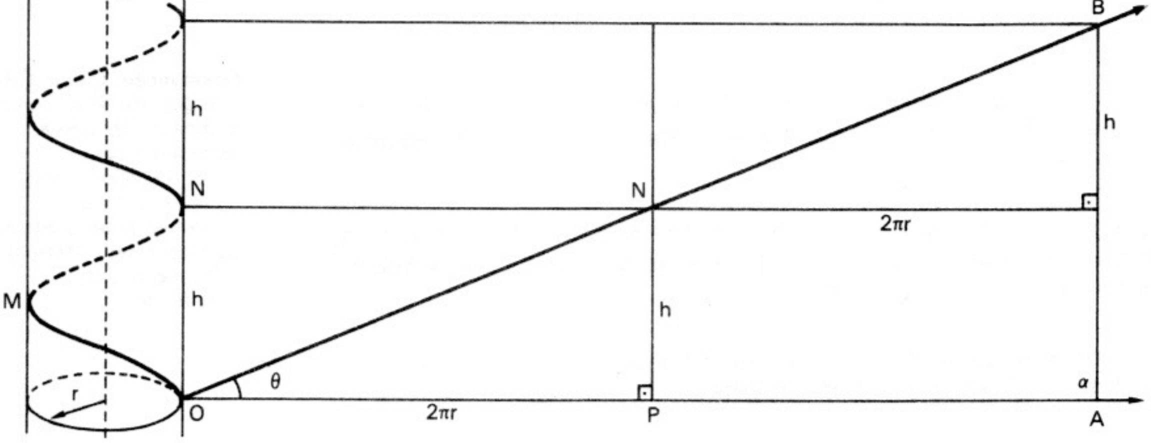
Agora, podemos conceituar a curva chamada hélice.

O conceito de hélice

Consideremos um semiplano α que tem sua origem numa geratriz **g** de um cilindro circular reto ilimitado, de modo que α só tenha os pontos de **g** em comum com o cilindro. Consideremos, agora, um ângulo $A\hat{O}B$ em α com o vértice O em **g** e o lado $\overrightarrow{OA}$ perpendicular a **g.**

Definição

Chama-se **hélice** a curva determinada pela semi-reta OB sobre a superfície lateral do cilindro, conforme o semiplano α se enrola sobre essa superfície.



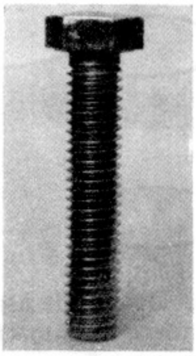
Observação: Note que a semi-reta OA enrola-se sobre si mesma, definindo uma circunferência na superfície cilíndrica.

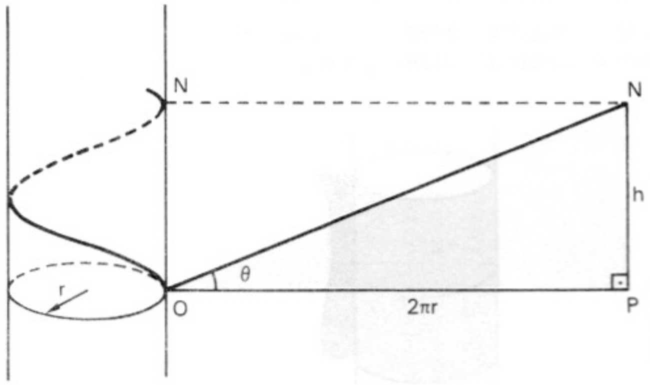
Elementos da hélice

- **Origem:** É o ponto O, onde se inicia o desenvolvimento da hélice.
- **Raio da hélice:** É o próprio raio **r** do cilindro.
- **Ângulo da hélice:** É a medida θ do ângulo AÔB.
- **Eixo:** É o próprio eixo **e** do cilindro.
- **Espira:** É qualquer arco da hélice que fica determinado quando o semiplano α completa uma volta inteira sobre a superfície cilíndrica. Na figura anterior, o arco OMN é uma espira da hélice.
- **Passo:** É a distância entre as extremidades de uma espira. Na figura anterior, **h** é o passo da hélice.

Observação: A maioria dos problemas sobre a hélice são resolvidos com a simples construção do triângulo retângulo OPN indicado na figura seguinte.

Um exemplo de hélice é o fio da rosca de um parafuso.





No triângulo retângulo OPN, tem-se:

- $\overline{OP}$: retificação da circunferência de raio igual ao raio da hélice.
- θ: ângulo da hélice.
- PN = h: passo da hélice.
- $\overline{ON}$: retificação de uma espira da hélice.

Assim, quando o problema fornece dois elementos de uma hélice, basta construir o triângulo OPN para determinar graficamente um possível elemento pedido para a resposta.

Exercícios

E9.1 Considere uma hélice cujo raio é r = 20mm e cujo ângulo é $\theta = 22°$. Determine graficamente o passo **h** e o comprimento ℓ de uma espira dessa hélice.

Observação: O lado $\overline{OP}$ do triângulo deve ser construído graficamente, isto é, retificando uma circunferência de raio r = 20mm, mas, evidentemente, o ângulo de 22° deve ser construído com o auxílio do transferidor.

E9.2 O comprimento de uma espira de uma hélice é igual a 126mm e o seu raio é igual a 17mm. Determine graficamente os valores aproximados do passo e do ângulo dessa hélice.

E9.3 Qual é, aproximadamente, o raio de uma hélice de passo h = 65mm e ângulo $\theta = 25°$? (Resolver graficamente.)

E9.4 O fio da rosca de um parafuso é uma hélice de raio r = 15mm e ângulo $\theta = 15°$. Determine graficamente o avanço, por volta, desse parafuso.

Observação: O avanço do parafuso, por volta, é o passo da hélice.

Projeção da hélice

Vamos estudar como se realiza a projeção de uma hélice sobre um plano que contém o seu eixo.

1.º) Traça-se uma circunferência de raio igual ao raio da hélice e traçam-se as retas **a** e **b** paralelas e tangentes a essa circunferência.

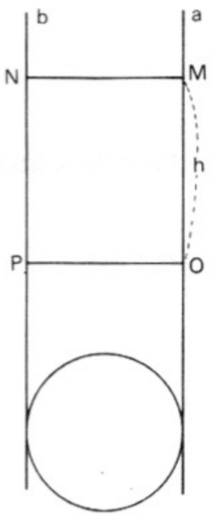
2.º) Constrói-se o retângulo OMNP, com $\overline{OM}$ e $\overline{NP}$ contidos em **a** e **b**, de modo que OM seja igual ao passo da hélice.

3.º) Dividem-se $\overline{OM}$ e a circunferência em 8 partes iguais.

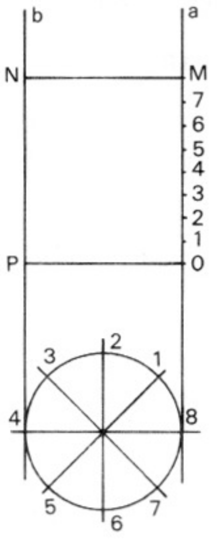
4.º) Pelos pontos de divisão de $\overline{OM}$ traçam-se segmentos paralelos a $\overline{OP}$.

5.º) Traçam-se as retas que passam pelos pontos de divisão da circunferência e que são paralelas às retas **a** e **b**, determinando, nos segmentos paralelos a $\overline{OP}$, pontos que pertencem à projeção da hélice.

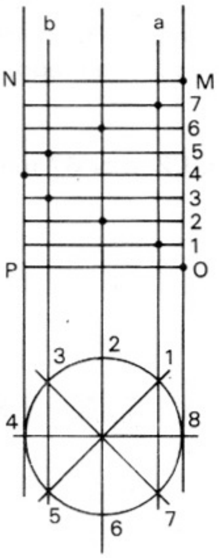
1.º e 2.º passos

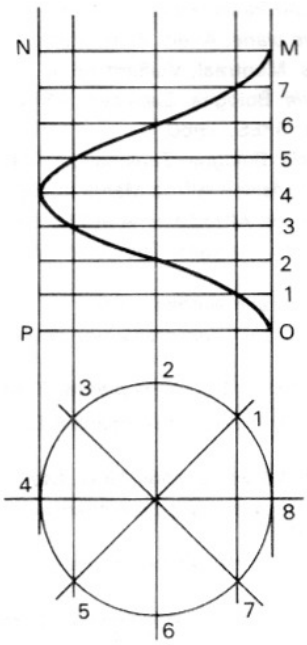


3.º passo



4.º e 5.º passos





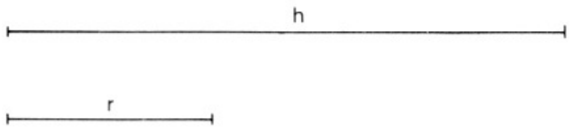
Observação: A projeção da hélice é a representação plana do desenvolvimento dessa curva. Assim, nas figuras das hélices representadas neste livro, foram feitas, na realidade, as projeções das hélices.

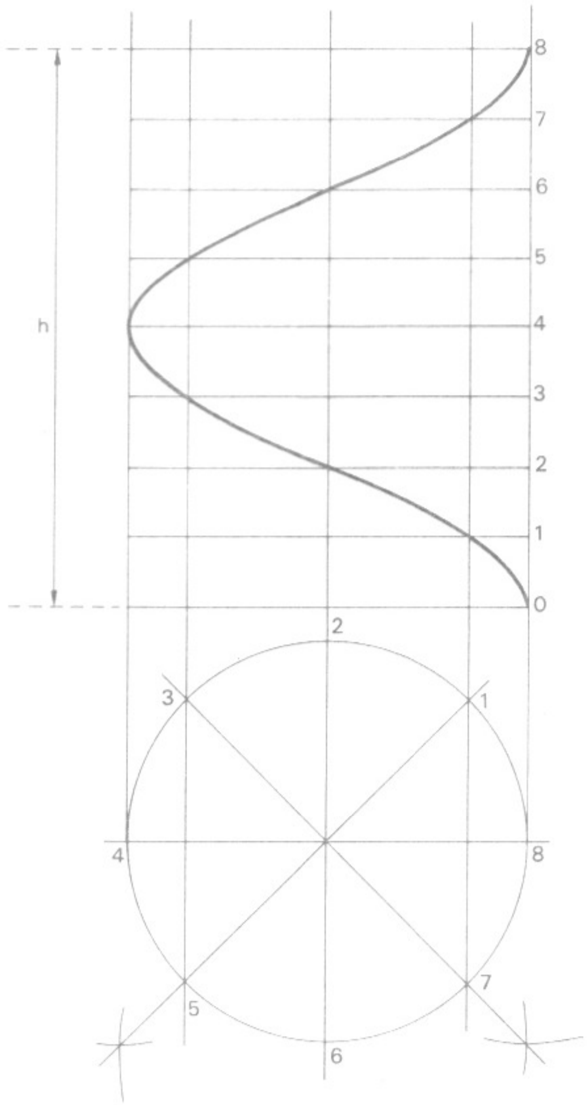
Resolva os exercícios 101 e 102 do caderno de atividades.

Hélice

Figura auxiliar e anotações

101 Construa a projeção de uma hélice, dados o raio **r** e o passo **h**.

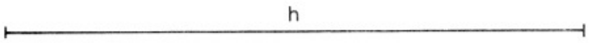


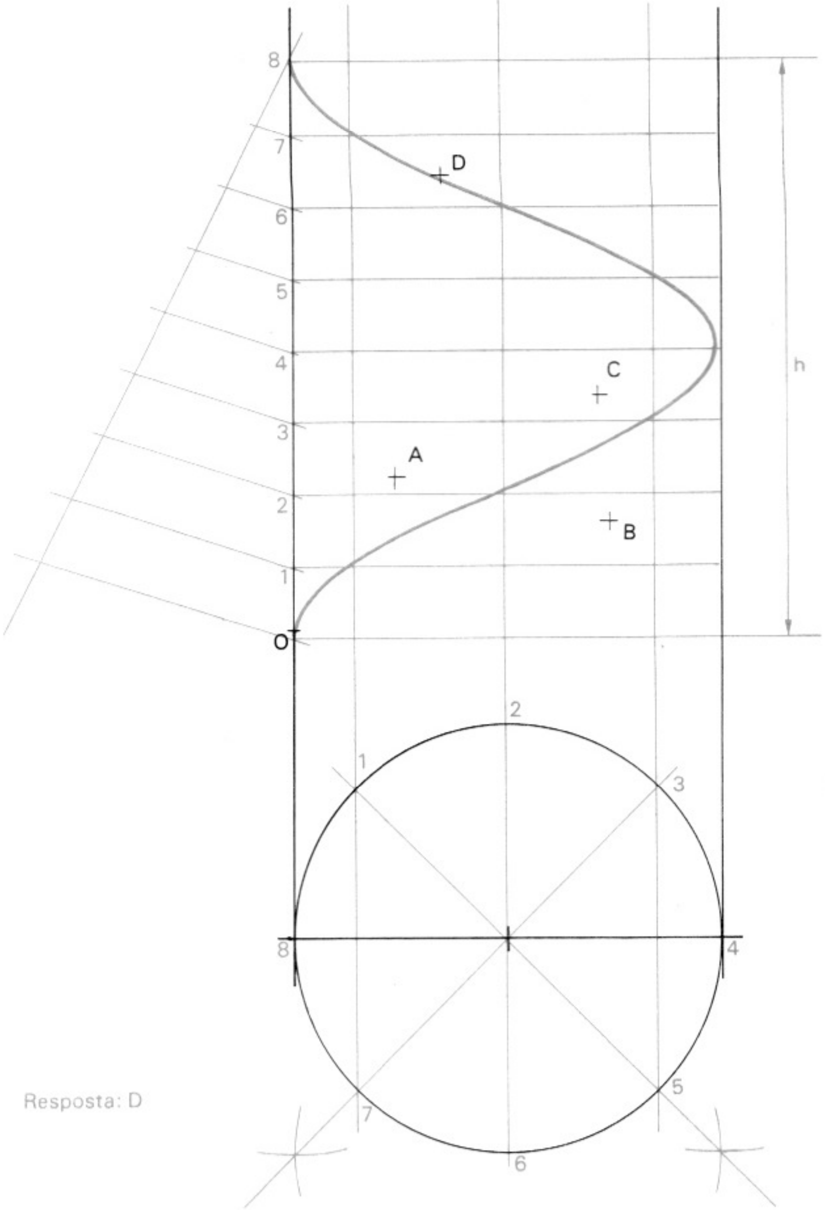

h
8
7
6
5
4
3
2
1
0
2
3
1
4
8
5
7
6

Hélice

Figura auxiliar e anotações

102 É dada a circunferência da base de uma superfície cilíndrica. Se uma hélice de passo **h** é traçada nessa superfície a partir do ponto de origem O, qual dentre os pontos A, B, C ou D pertence a ela?




8
7
D
6
5
4
C
h
3
A
2
B
1
O
2
1
3
8
4
7
5
6

Resposta: D

Respostas dos exercícios

Para os exercícios de construção geométrica, as medidas aqui apresentadas como respostas servem para conferir o acerto e a exatidão das construções.

8 O método dos lugares geométricos

E8.2 a) Duas soluções. b) Uma solução. c) Nenhuma solução.
E8.4 $\hat{A} = 90^\circ$
E8.5 Acutângulo.
E8.13 ≃ 3,5 cm (entre 3,4 cm e 3,5 cm)
E8.14 É o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.
E8.15 ≃ 3,6 km (entre 3,5 km e 3,6 km)
E8.17 Duas soluções.
E8.18 13 cm.
E8.22 ≃ 42 mm (entre 42 mm e 43 mm)
E8.27 É o centro da circunferência inscrita no triângulo.
E8.28 ≃ 20 mm
E8.29 2 cm

9 Operações e construções com ângulos

E9.6 ≃ 46 mm
E9.7 ≃ 77 mm
E9.8 ≃ 158 mm

10 Ângulos na circunferência

E10.1 a) $x = 45^\circ$ b) $x = 110^\circ$ c) $x = 90^\circ$ d) $x = 40^\circ$
E10.2 a) $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$ e $\hat{C} = 75^\circ$ b) $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 70^\circ$ e $\hat{C} = 20^\circ$ c) $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$
E10.4 30°, 75° e 75°
E10.5 $x = 45^\circ$
E10.7 a) $x = 25^\circ$ b) $x = 30^\circ$
E10.8 $A\hat{B}C = 90^\circ$ e $A\hat{B}D = 90^\circ$. Logo, $C\hat{B}D = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Portanto, C, B e D estão alinhados.
E10.9 a) $x = 60^\circ$ b) $x = 100^\circ$ c) $x = 30^\circ$ d) $x = 75^\circ$

11 Arcos como lugares geométricos

E11.3 ≃ 115 mm
E11.4 ≃ 150 mm
E11.5 ≃ 107 mm
E11.7 60 mm

12 Razão e proporção

E12.1 a) Sim. b) Sim. c) Sim.
E12.2 a) Sim. $k = \frac{2}{3}$ b) Não. c) Sim. $k = \frac{5}{3}$
E12.3 Sim. $k = \frac{2}{3}$
E12.4 $a = 12$ cm, $b = 24$ cm e $c = 30$ cm
E12.5 10 cm, 12 cm e 16 cm
E12.6 40°, 60° e 80°
E12.7 60°, 80°, 100° e 120°
E12.8 a) $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ b) $\frac{d}{a} = \frac{q}{m}$ c) $\frac{n}{p} = \frac{b}{c}$ d) $\frac{p}{m} = \frac{c}{a}$ e) $\frac{a + b}{d} = \frac{m + n}{q}$
E12.10 a) $x = 15$ b) $x = 6$ c) $x = 18$
E12.11 $EC = 8$
E12.12 $a = 12$, $b = 18$ e $c = 24$
E12.13 $a = 14$, $b = 10$ e $c = 16$

13 Divisão gráfica de segmentos

E13.8 a) $x = 56$ mm b) $x \simeq 23$ mm c) $x \simeq 22$ mm
E13.9 a) $x \simeq 53$ mm b) $x \simeq 36$ mm c) $x \simeq 16$ mm
E13.10 a) $\frac{p}{m} = \frac{n}{x}$ b) $\frac{\ell}{s} = \frac{k}{x}$ c) $\frac{t}{u} = \frac{v}{x}$ d) $\frac{m}{\ell} = \frac{\ell}{x}$ e) $\frac{b}{a} = \frac{a}{x}$ f) $\frac{t}{k} = \frac{k}{x}$
E13.11 $c \simeq 54$ mm

14 Semelhança

E14.2 a) A e L, D e R, C e N, B e P, E e M
b) $\measuredangle \hat{A}$ e $\measuredangle \hat{L}$, $\measuredangle \hat{D}$ e $\measuredangle \hat{R}$, $\measuredangle \hat{C}$ e $\measuredangle \hat{N}$, $\measuredangle \hat{B}$ e $\measuredangle \hat{P}$, $\measuredangle \hat{E}$ e $\measuredangle \hat{M}$
c) $\overline{AD}$ e $\overline{LR}$, $\overline{DC}$ e $\overline{RN}$, $\overline{CB}$ e $\overline{NP}$, $\overline{BE}$ e $\overline{PM}$, $\overline{AE}$ e $\overline{LM}$.
E14.3 a) $k = \frac{5}{6}$ b) $c = 20$ e $p = 18$
E14.4 a) $k = \frac{5}{2}$ b) $u = 12{,}5$; $v = 7{,}5$; $x = 4$; $y = 2$
E14.6 $a = 15$ e $b = 20$
E14.7 $AE = 6$
E14.9 a) $x = 18$ e $y = 15$ b) $x = 16$ e $y = 14$
E14.10 a) $x = 10$ e $y = 14$ b) $x = 4$ e $y = 15$
E14.11 a) $k^2 = u^2 + v^2$; $u^2 = k \cdot t$; $v^2 = k \cdot \ell$; $s^2 = t \cdot \ell$
b) $u^2 = p^2 + v^2$; $v^2 = u \cdot r$; $p^2 = u \cdot s$; $t^2 = r \cdot s$
c) $p^2 = s^2 + t^2$; $s^2 = p \cdot u$; $t^2 = p \cdot v$; $r^2 = u \cdot v$
E14.13 a) 5 b) 1 e 4 c) 2
E14.14 a) 25 b) 12 c) 15 e 20
E14.15 a) 3 cm e 6 cm b) $3\sqrt{2}$ cm c) $3\sqrt{3}$ cm e $3\sqrt{6}$ cm
E14.17 $x = \ell\sqrt{5}$
E14.18 $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
E14.19 $r = 6{,}5$
E14.20 $PC = 7$

15 Construções com segmentos

E15.2 $\simeq 4{,}5$
E15.4 $\simeq 4{,}8$ (entre 4,8 e 4,9)
E15.6 a) 78 b) 60
E15.8 $\simeq 46$ (entre 46 e 47)
E15.9 a) $x^2 = 16a^2 + a^2 = (4a)^2 + a^2$
b) $x^2 = 9a^2 + a^2 = (3a)^2 + a^2$
c) $x^2 = 16a^2 - 4a^2 = (4a)^2 - (2a)^2$
d) $x^2 = 25a^2 - 3a^2 = (5a)^2 - (a\sqrt{3})^2$
E15.10 a) $\simeq 43$ mm b) $\simeq 66$ mm c) $\simeq 97$ mm
E15.13 $\simeq 38$ mm
E15.14 $\simeq 114$ mm

16 Triângulos

E16.2 $\simeq$ 30 mm
E16.4 $\simeq$ 115 mm
E16.6 $\simeq$ 75 mm
E16.11 $\simeq$ 116 mm e $\sim$ 137 mm
E16.12 $\simeq$ 59 mm
E16.14 $\simeq$ 93 mm
E16.16 $\simeq$ 133 mm
E16.19 $\simeq$ 58 mm
E16.22 $\simeq$ 58 mm
E16.25 $\simeq$ 47 mm
E16.27 120 mm
E16.28 $\simeq$ 60 mm

17 Quadriláteros

E17.1 a) $\hat{B} = 130^\circ$ e $\hat{D} = 90^\circ$ b) $\hat{A} = 110^\circ$ e $\hat{C} = 65^\circ$ c) $\hat{B} = 105^\circ$, $\hat{C} = 75^\circ$ e $\hat{D} = 75^\circ$
E17.2 São suplementares.
E17.3 45° e 135°
E17.4 $\hat{A} = 144^\circ$
E17.6 54° e 126°
E17.7 a) $A\hat{M}B = 120^\circ$ b) Eqüilátero.
E17.9 30°, 75° e 75°
E17.10 $\frac{1}{2}$
E17.12 3 cm
E17.13 6 cm
E17.15 13 cm
E17.16 $d = \ell\sqrt{2}$
E17.17 20 cm
E17.19 $\simeq$ 55 mm
E17.20 $\simeq$ 35 mm
E17.22 $\simeq$ 137 mm
E17.23 $\simeq$ 77 mm
E17.24 48 mm
E17.25 $\simeq$ 55 mm
E17.26 $\simeq$ 43 mm

Respostas dos exercícios

1 Translação

E1.3 $\simeq$ 47 mm E1.4 $\simeq$ 144 mm E1.10 60 mm E1.11 42 mm

2 Simetria

E2.1 a) **um eixo**: mediatriz da base b) **três eixos**: mediatrizes dos lados
c) **um eixo**: reta pelos pontos médios das bases d) **dois eixos**: retas que contêm as diagonais
e) **quatro eixos**: retas pelos pontos médios dos lados opostos e retas que contêm as diagonais

E2.6 $\simeq$ 89 mm

3 Homotetia

E3.2 mais próximo no **a** e no **f**, e mais afastado no **b**, **c**, **d** e **e** E3.3 **H** é o ponto médio de $\overline{AA'}$
E3.11 $\simeq$ 35 mm E3.12 $\simeq$ 26 mm

4 Processos aproximativos

E4.3 d $\simeq$ 34 mm E4.4 $\simeq$ 201 mm E4.6 $\simeq$ 24 mm E4.7 $\simeq$ 46 mm E4.8 $\simeq$ 63 mm
E4.10 b) $\simeq$ 266 cm E4.11 $\simeq$ 488 cm E4.13 $\simeq$ 76° E4.14 $\simeq$ 138° E4.15 $\simeq$ 57°
E4.18 $\simeq$ 31 mm

5 Divisão da circunferência

E5.1 a) $\ell_8 \simeq 38$ mm b) $\ell_{12} \simeq 29$ mm c) $\ell_{10} \simeq 31$ mm d) $\ell_5 \simeq 59$ mm E5.3 $\simeq$ 42 mm
E5.4 $\simeq$ 39 mm E5.5 $\simeq$ 65 mm E5.6 $\simeq$ 46 mm E5.7 $\simeq$ 34 mm E5.8 $\simeq$ 54 mm

6 Áreas das principais figuras geométricas

E6.1 a) 60 cm^2 b) 12 m^2 c) 12 cm^2 E6.3 24 cm^2 E6.4 24 cm^2 E6.5 $10a^2$ E6.6 32 m^2
E6.8 14,4 E6.9 84 cm^2 E6.11 60 cm^2 E6.12 $24\sqrt{3}$ E6.13 $10\sqrt{2}$ cm E6.14 26 cm^2
E6.15 128 cm^2 E6.16 630 E6.18 a) $25\pi \text{m}^2$ b) $\frac{25\pi}{6}\,\text{m}^2$, $\frac{25\pi}{4}\,\text{m}^2$ e $\frac{25\pi}{3}\,\text{m}^2$ E6.20 $a^2(4-\pi)$

E6.21 $\ell^2(9-\pi)$ E6.22 $(9\sqrt{3}-2\pi)\,\text{cm}^2$ E6.23 $r^2\left(2-\frac{\pi}{2}\right)$ E6.24 24π

7 Equivalência

E7.2 $\simeq$ 32 mm E7.3 $\simeq$ 34 mm E7.5 $\simeq$ 33 mm E7.6 $\simeq$ 42 mm E7.7 $\simeq$ 46 mm E7.9 $\simeq$ 42 mm
E7.10 $\simeq$ 53 mm E7.11 $\simeq$ 47 mm E7.13 $\simeq$ 46 mm E7.14 $\simeq$ 42 mm E7.15 $\simeq$ 37 mm
E7.17 $\simeq$ 33 mm E7.21 $\simeq$ 62 mm E7.22 $\simeq$ 170 mm E7.23 $\simeq$ 64 mm
E7.25 c) $\simeq$ 42 mm d) $\simeq$ 1764 m^2
E7.26 O lado do quadrado mede aproximadamente 51 mm. A área é aproximadamente igual a 2 601 km^2.
E7.28 $\frac{4}{9}$ E7.30 $\ell\sqrt{2}$ E7.31 $a\sqrt{5}$ E7.32 $4\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ cm e $6\sqrt{2}$ cm E7.34 $x = \frac{h\sqrt{3}}{3}$

E7.35 $x = \frac{h\sqrt{10}}{5}$ E7.36 $x = \frac{h\sqrt{3}}{3}$ e $y = \frac{h\sqrt{6}}{3}$ E7.37 $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ E7.38 $\simeq$ 58 mm E7.40 $\simeq$ 46 mm

E7.41 $\simeq$ 66 mm E7.42 $\simeq$ 46 mm e $\simeq$ 59 mm E7.43 $\simeq$ 62 mm E7.44 $\simeq$ 146 mm
E7.45 $\simeq$ 132 mm E7.49 $\simeq$ 54 mm E7.50 $\simeq$ 25 mm E7.51 $\simeq$ 62 mm E7.52 $\simeq$ 22 mm
E7.53 $\simeq$ 72 mm E7.54 $\simeq$ 17 mm

8 Potência de um ponto em relação a uma circunferência

E8.2 a) $x = 9$ b) $x = 4$ c) $x = 6$ d) $x = 3\sqrt{2}$ e) $x = \sqrt{7}$ f) $x = 2$ E8.3 PC = 4 e PD = 3
E8.5 $r = 5$ E8.6 PB = 4 E8.7 $x = 8$ e $y = 6$

10 Elipse

E10.2 60 mm E10.3 30 mm E10.4 87 mm E10.6 ≃ 47 mm E10.7 ≃ 35 mm E10.10 ≃ 47 mm
E10.12 ≃ 25 mm

11 Hipérbole

E11.2 72 mm E11.3 87 mm E11.4 75 mm E11.6 ≃ 36 mm E11.7 ≃ 123 mm E11.9 ≃ 82mm
E11.11 ≃ 214 mm E11.13 ≃ 102° E11.14 ≃ 45 mm

12 Parábola

E12.3 ≃ 50 mm E12.4 ≃ 63 mm E12.6 ≃ 74° E12.8 ≃ 27 mm

Respostas dos exercícios

E1.3 ≃ 169 mm E1.4 ≃ 148 mm E1.6 a) 45 mm b) 18 mm E1.7 75 mm E1.12 ≃ 129 mm
E1.13 ≃ 141 mm E1.14 ≃ 49 mm E1.15 ≃ 70°

E2.2 ≃ 94 mm E2.4 ≃ 48 mm E2.6 ≃ 42 mm E2.8 ≃ 27 mm E2.10 ≃ 68 mm

E3.2 a, b, d, e E3.3 a) $x = 55°$ b) $x = 25°$ c) $x = 36°$ d) $x = 17°$ E3.6 ≃ 144 mm
E3.8 ≃ 70 mm E3.9 ≃ 52 mm

E4.2 ≃ 160 mm E4.3 ≃ 62 mm E4.9 ≃ 178 mm E4.11 ≃ 52° E4.14 ≃ 96 mm
E4.17 ≃ 55 mm E4.18 ≃ 25 mm

E5.1 Sim, **a** e **c** E5.2 a) homólogos: A e C; B e D; I e K; J e L
anti-homólogos: A e D; B e C; I e L; J e K b) idêntico ao item **a**

E5.4 Como (A, D) e (B, C) são pares de pontos anti-homólogos, deduz-se que:

$$HA \times HD = HB \times HC$$

Assim, o quadrilátero ABCD é inscritível; logo, $\alpha + \beta = 180°$.

E5.5 $r \simeq 18$ mm E5.6 $r \simeq 40$ mm

E9.1 $h \simeq 56$ mm e $\ell \simeq 135$ mm E9.2 $h \simeq 67$ mm e $\theta \simeq 32°$ E9.3 $r \simeq 22$ mm E9.4 $h \simeq 25$ mm

BIBLIOGRAFIA

(1) ALTSHILER-COURT, Nathan. *College geometry*. 2. ed. New York, Barnes & Noble, 1952.

(2) ANTAR NETO, Aref & outros. *Noções de matemática*. São Paulo, Moderna, 1982.

(3) ARDURA, D. Manuel Garcia. *Problemas gráficos y numericos de geometria*. 16. ed. Madrid, Alameda, s.d.

(4) BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

(5) BRUN, L. & TREUILLET, L. *Exercices de géométrie plane*. 4. ed. Paris, Vuibert, 1963.

(6) COLLETE, Jean-Paul. *Histoire des mathématiques*. Montreal, Vuilbert/ERPI, 1973.

(7) D'AMORE, Bruno & DE FLORA, Alberta. *Geometria*. Bologna, Zanichelli, 1985. 2 vols.

(8) DELESSERT, Andre. *Geometrie plane*. 5. ed. Riex, SPES, 1960.

(9) ENRIQUES, F. & AMALDI, U. *Elementi di geometria*. Bologna, Zanichelli, 1984. 2 vols.

(10) F. G. -M. *Cours de géométrie elementaire*. Paris, Maison Alfred Mame et fils, 1912.

(11) ______. *Exercices de géométrie*. 5. ed., Paris, Maison Alfred Mame et fils, 1912.

(12) HILBERT, David. *The fundations of geometry*. 3. ed., La Salle, The Open Court Publishing Company, 1938.

(13) LEBOSSÉ, C. & HÉMERY, C. *Géométrie*. Paris, Fernand Nathan, 1965.

(14) LEMAIRE, G. *Méthodes de resolution et de discussion des problèmes de géométrie*. 15. ed., Paris, Vuibert, 1947.

(15) LONG, Louis. *Tour d'orizon et méthodes variées en constructions planes*. Paris, Vuibert, 1947.

(16) MOISE, Edwin E. *Elementos de geometria superior*. México, Companhia Editorial Continental, 1968.

(17) PASTOR, J. Rey & BABINI, J. *História de la Matemática*. Buenos Aires, Esparsa - Calpe, 1951.

(18) PETERSEN, Julius. *Méthodes et théories pour la resolution des problèmes de constructions géométriques*. 5. ed. Paris, Gauthier - Villars, 1931.

(19) ROUCHÉ, Eugéne & COMBEROUSSE, Ch. de. *Traité de géométrie*. Paris, Gauthier — Villars, 1935. 2. vols.

(20) SANCHEZ, M. & PEREZ, B. *Geometria metrica, proyetiva y sistemas de representacion*. 2. ed., Madrid, SAETA, 1945, tomo I.

(21) UNE REUNION DE PROFESSEURS. *Cours de géométrie*. Paris, Librairie Générale, 1952.

(22) ______. *Cours de géométrie*. Paris, Librairie Générale, 1947.

(23) ______. *Problèmes de géométrie*. Paris, Librairie Générale, 1947.

(24) VASNIER, M. *Cours de géométrie* 5. ed. Paris, Eyrolles, 1947. 2 vols.

impressão e acabamento por
W. Roth & Cia. Ltda.

Questões de Vestibulares

Os exercícios a seguir são questões que foram propostas em exames vestibulares do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA) e da Escola de Engenharia da Universidade Mackenzie (UM). Com eles, você, que vai se submeter ao vestibular, terá a oportunidade de fazer uma breve revisão de Desenho Geométrico conhecendo, ao mesmo tempo, o estilo e o nível de exigência desses exames.

Eis algumas recomendações:

- Nunca é demais lembrar que você deve executar os traçados com o máximo de precisão.
- A maioria dos problemas propõe a construção de uma figura da qual se pede, como resposta, a medida de um dos elementos. Nesses casos, por vários motivos, é comum não se obter exatamente uma das medidas expressas nas alternativas; evidentemente, você deverá optar pela alternativa que mais se aproxime da sua resposta.
- Após o enunciado dos problemas, há sugestões que indicam exercícios semelhantes resolvidos no livro-texto. Você só deve recorrer a eles quando não estiver conseguindo resolver o problema.
- Por fim, para você que vai se submeter a provas de Desenho no vestibular, o autor deseja BOA SORTE!

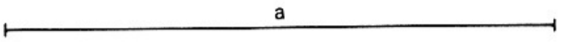
Questões de Vestibulares

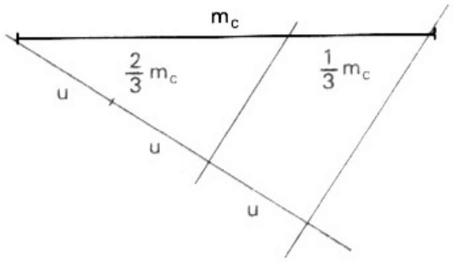
Figura auxiliar e anotações

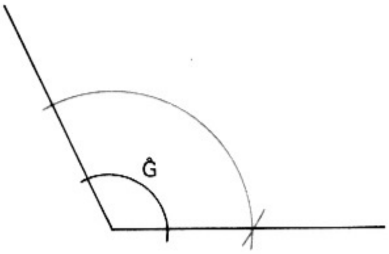
1 (ITA-SP) Construir um triângulo, sendo conhecidos: o lado **a**, a mediana m_c e o ângulo $\hat{G}$, formado pelas medianas m_c e m_b. A mediana m_a mede:

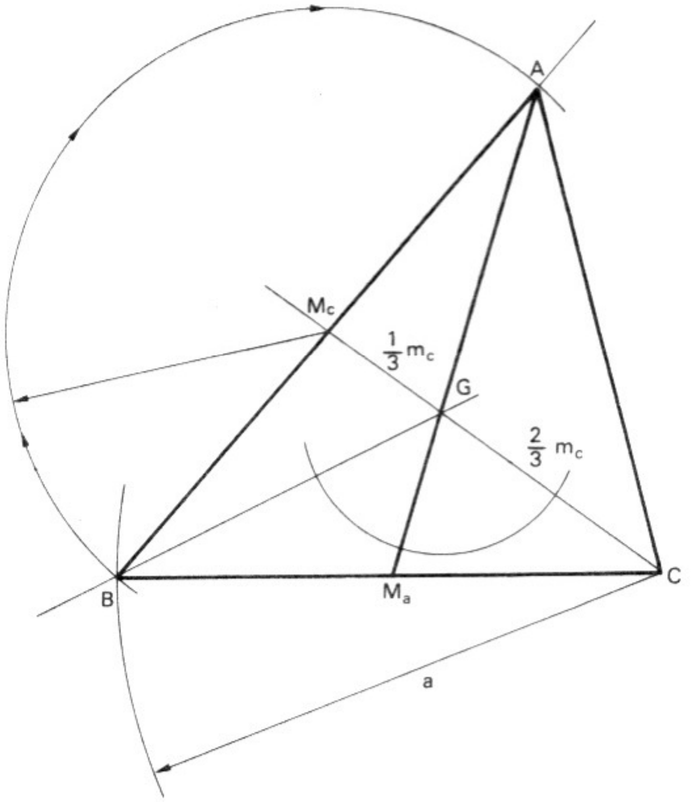
a) 57 mm
b) 70 mm
c) 65 mm
d) 60 mm
e) 74 mm

Sugestão: Comece pelo triângulo BCG. (Veja, por exemplo, E16. **15**, volume 1.)




m_c
$\frac{2}{3}m_c$
$\frac{1}{3}m_c$
u
u
u




A
M_c
$\frac{1}{3}m_c$
G
$\frac{2}{3}m_c$
B
M_a
C
a

Resposta: b

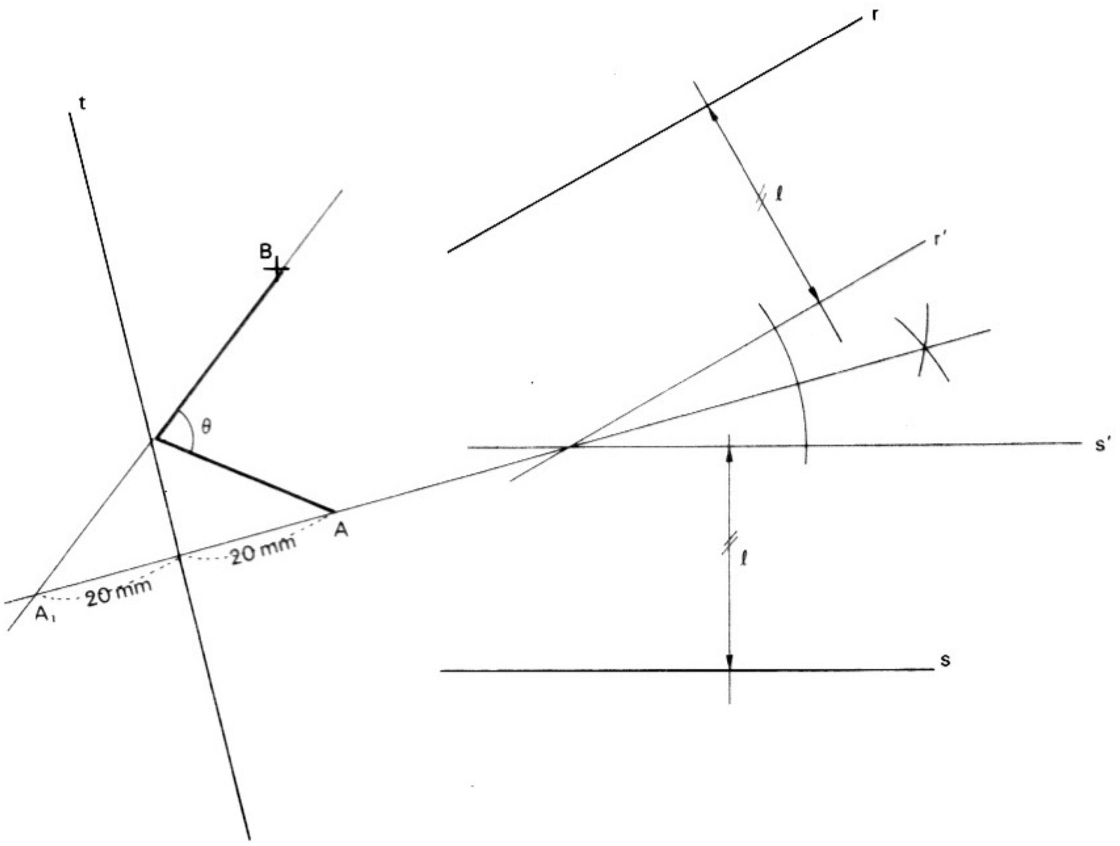
Questões de vestibulares

Figura auxiliar e anotações

2 (ITA-SP) São dadas as retas **r**, **s** e **t**, assim como o ponto B. Trace a bissetriz do ângulo formado por **r** e **s** e determine sobre a mesma um ponto A, distante 20 mm à direita da reta **t**. Trace o menor caminho entre os pontos A e B com um ponto em **t**. Qual é a medida do ângulo formado pelos segmentos que determinam este menor caminho?
Observação: **t** é perpendicular à bissetriz do ângulo formado por **r** e **s**.

a) 45°
b) 90°
c) 60°
d) 75°
e) 65°

Sugestão: Para o traçado do menor caminho, veja volume 2, página 22 (**um problema importante**).



Resposta: d ($\theta \simeq 75°$)

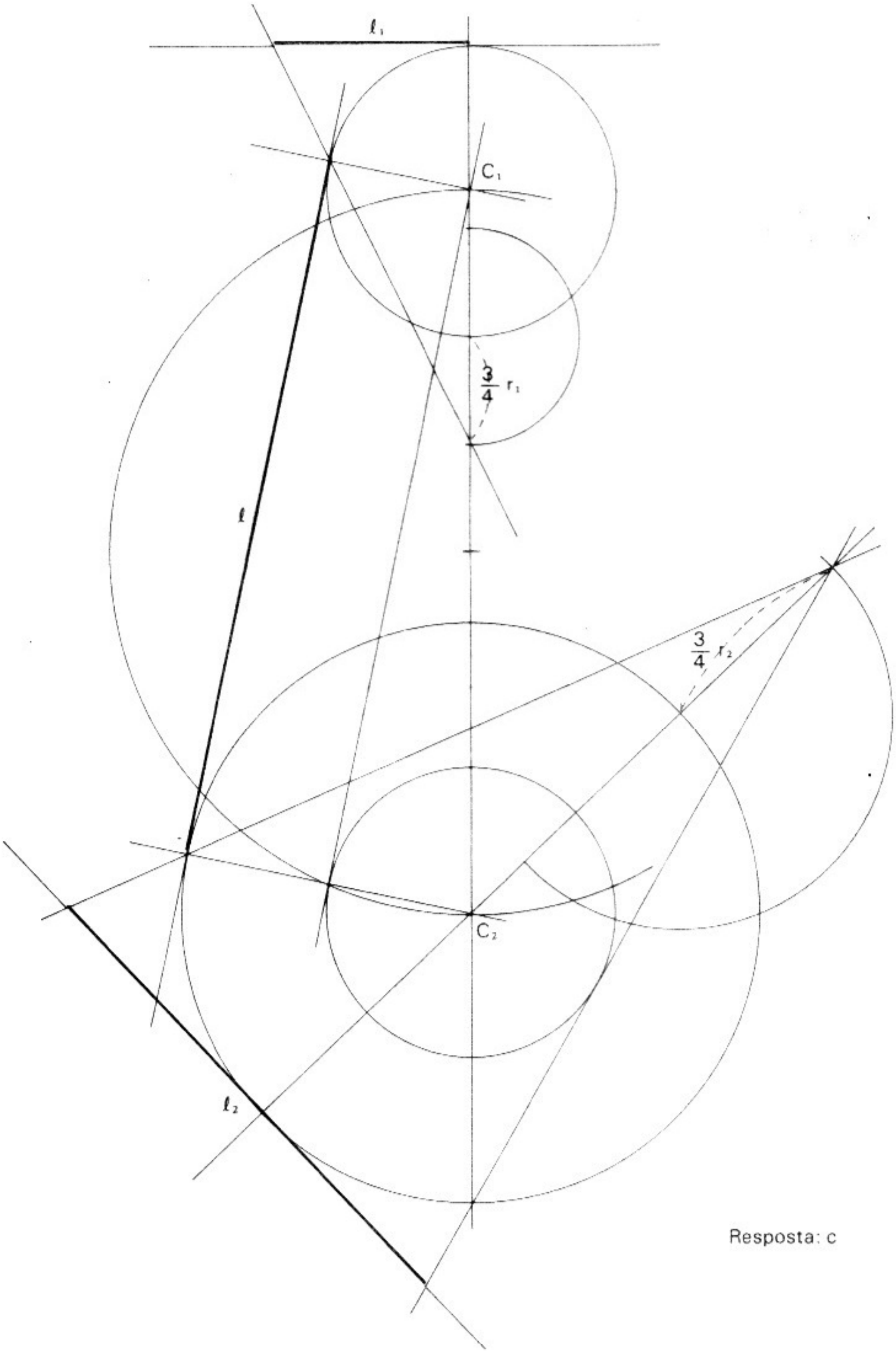
Questões de vestibulares

3 (ITA-SP) Um compressor centrífugo é acionado por um motor elétrico, sendo usada uma correia chata, suposta inteiramente tensa e de espessura desprezível. Sabendo-se que:

- a polia do motor é de raio r_1 e centro C_1;
- a polia do compressor é de raio r_2 e centro C_2;
- e que $r_1 = 200$ mm, $r_2 = 400$ mm e $C_1C_2 = 1\,000$ mm, pede-se determinar o comprimento real da correia, sendo a escala 1:10.

a) 3 820 mm
b) 4 020 mm
c) 3 940 mm
d) 3 860 mm
e) 4 000 mm

Sugestão: Veja E4.**9**, volume 2.



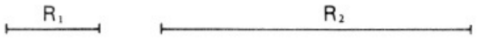
Resposta: c

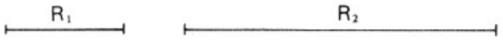
Figura auxiliar e anotações

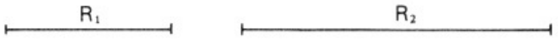
Observação:
Comente que, embora não seja permitido fazer contas com os elementos gráficos, neste exercício obtém-se $\ell + \ell_1 + \ell_2$ aritmeticamente, para, em seguida, duplicar essa soma também aritmeticamente, obtendo-se a resposta. Esse procedimento se justifica pelo fato de as dimensões da figura não possibilitarem que as operações mencionadas sejam feitas graficamente.

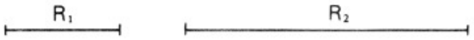
Questões de vestibulares

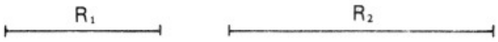
4 (UM-SP) As circunferências que tangenciam a reta **r** no ponto T e a circunferência dada γ têm por raios:

a) 

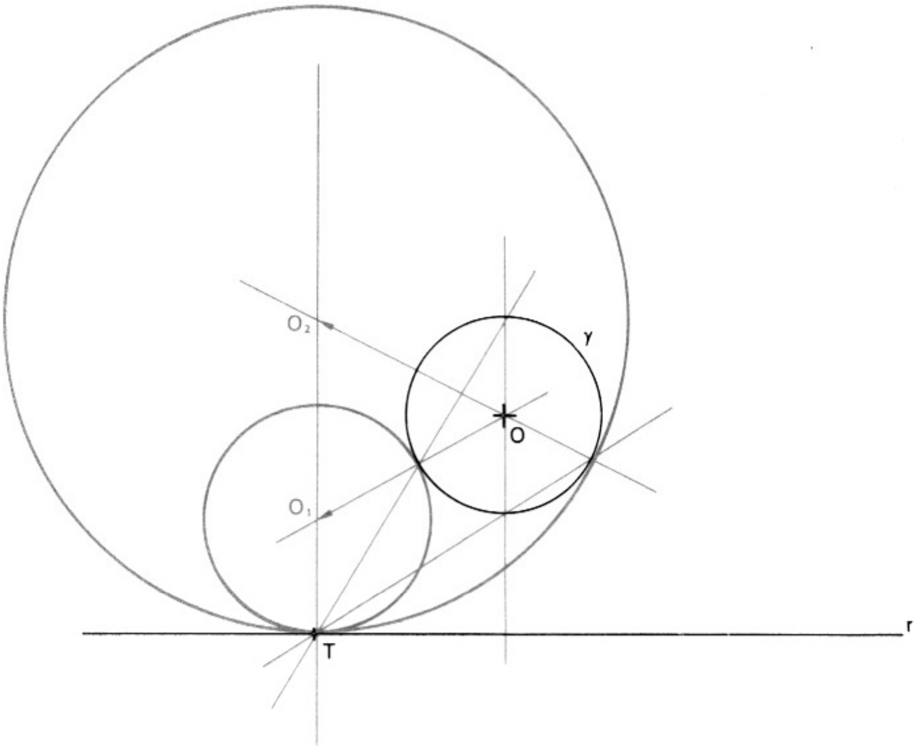
b) 

c) 

d) 

e) 

Sugestão: Este problema é semelhante ao pt 5. Ele admite três resoluções diferentes, duas delas apresentadas no volume 2 e uma, no volume 3, nos capítulos sobre tangência.



Resposta: b

Figura auxiliar e anotações

Observação:
A resolução aqui indicada segue a que foi apresentada no volume 3.

Questões de vestibulares

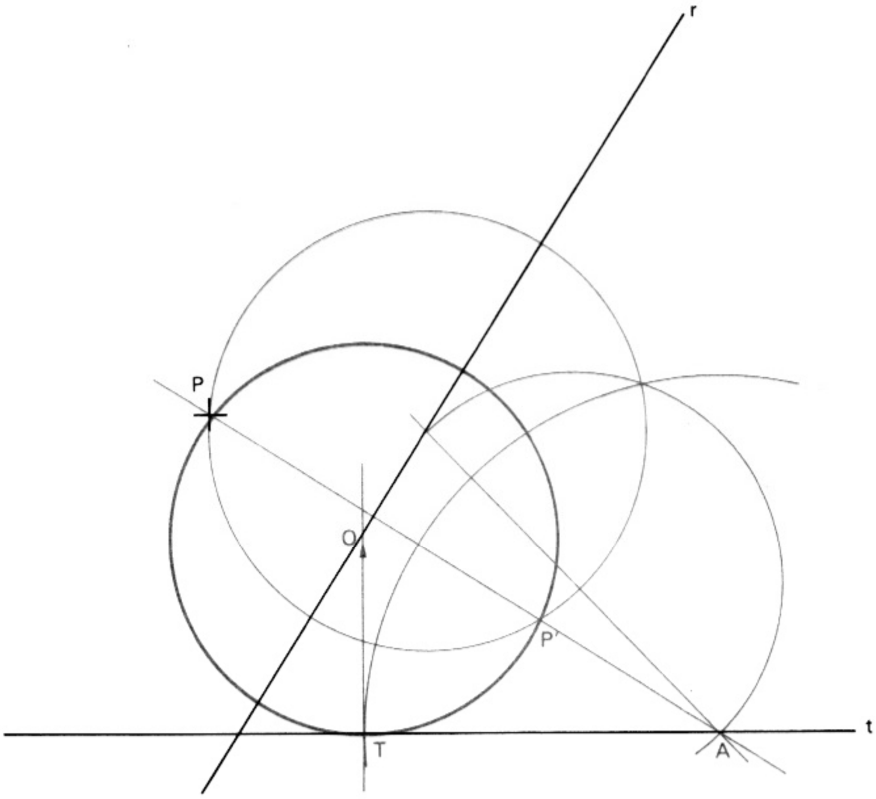
Figura auxiliar e anotações

5 (ITA-SP) São dadas duas retas **r** e **t**, e um ponto P. Determinar o raio da circunferência que passa por P e é tangente à reta **t**, sendo a reta **r** o lugar geométrico do centro O.

a) 32 mm
b) 19 mm
c) 41 mm
d) 25 mm
e) 38 mm

Sugestão: Veja pt 2 no capítulo sobre tangência do volume 2.

Observação: Embora esse problema admita duas soluções, ao resolvê-lo você descobrirá que uma delas cai fora do papel.



Resposta: d

Questões de vestibulares

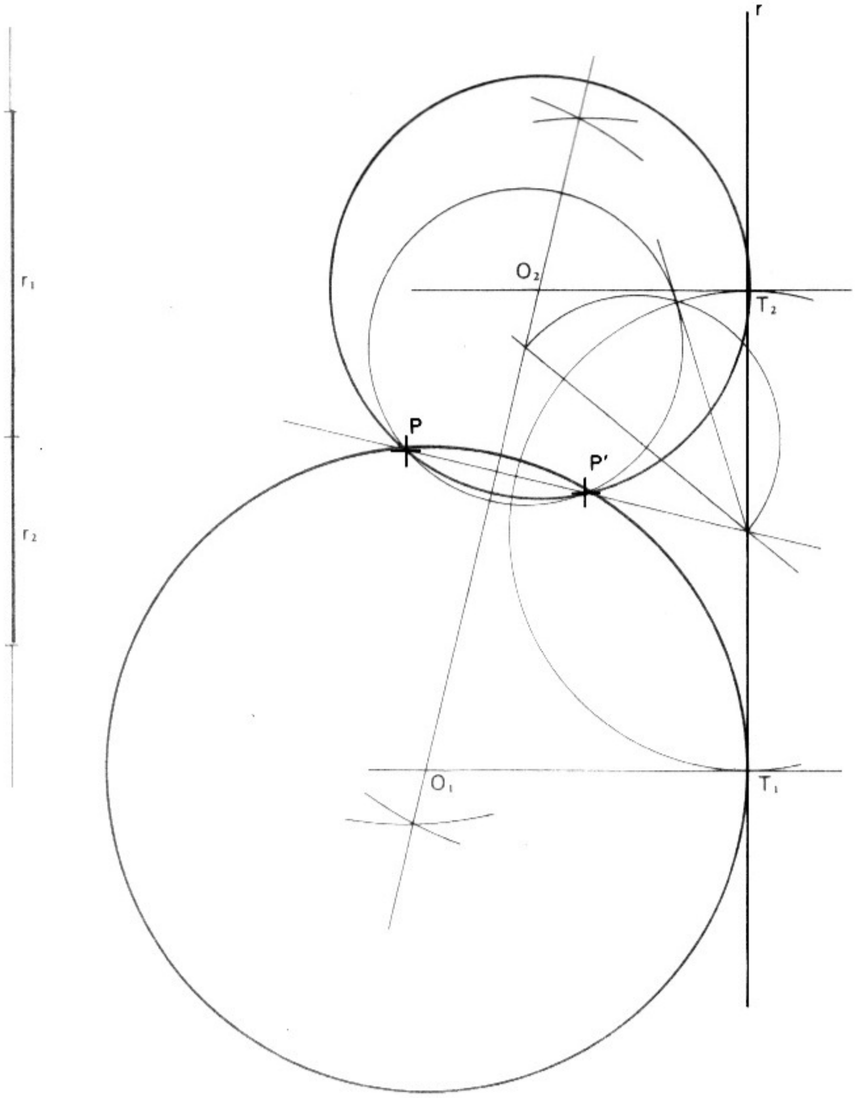
Figura auxiliar e anotações

6 (ITA-SP) São dados dois pontos, P e P', e uma reta **r**. Determinar a soma dos raios das circunferências que contêm os pontos e são tangentes à reta.

a) 60 mm
b) 65 mm
c) 81 mm
d) 74 mm
e) 69 mm

Sugestão: Veja no volume 2, no capítulo sobre tangência, o pt 1.

Observação: Esse problema pode ser resolvido também por homotetia (E3.**14**, volume 2), mas, com o posicionamento dos dados, esse processo é inconveniente, pois o centro de homotetia cai fora do papel.



Resposta: e $(r_1 + r_2 \simeq 69\text{ mm})$

Questões de vestibulares

Figura auxiliar e anotações

7 (ITA-SP) O segmento AB dado é o semiperímetro de um hexágono regular. Sem construir esse hexágono, pede-se traçar um quadrado de área equivalente. Quanto mede o lado do quadrado?

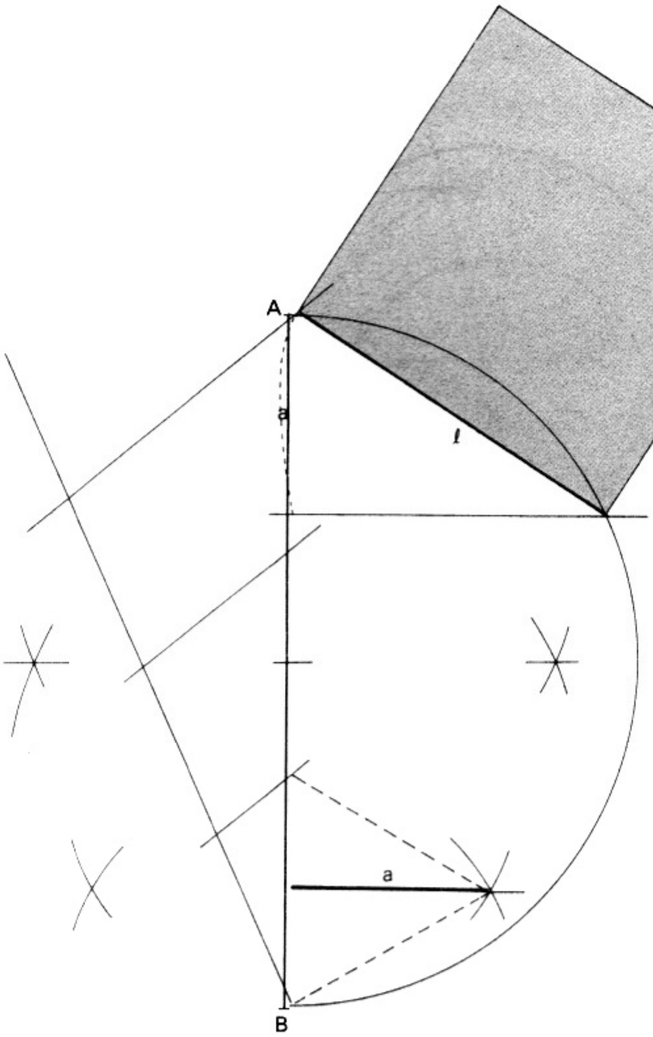
Observação: Mostrar todas as construções geométricas.

a) 36 mm
b) 43 mm
c) 48 mm
d) 53 mm
e) 57 mm.

Sugestão: Lembre-se que a área de um polígono regular é dada pela fórmula:

semiperímetro × apótema

(Veja E7.**8**, volume 2.)



$\ell^2 = p \cdot a$
(a = apótema)

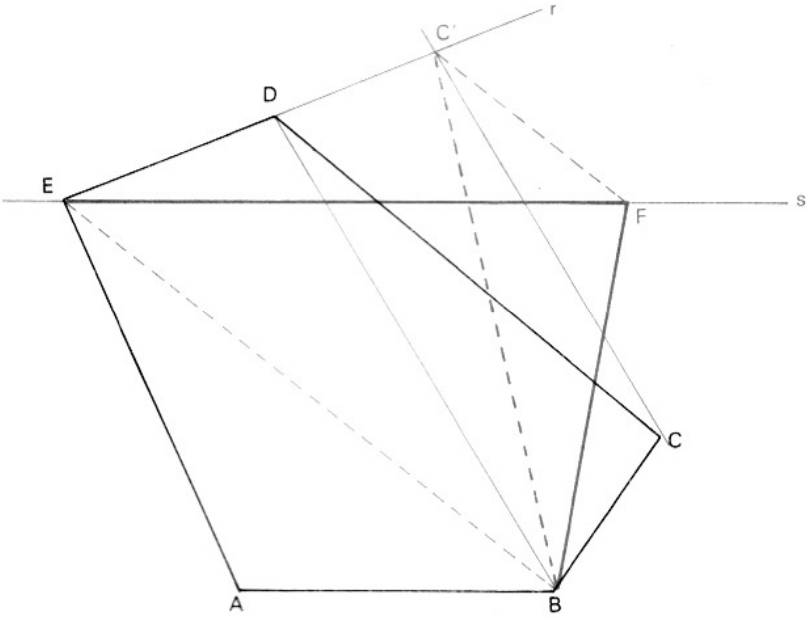
Resposta: c ($\ell \cong 48$ mm)

Questões de vestibulares

8 (ITA-SP) Determinar o perímetro do trapézio ABFE, de bases $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$, equivalente ao pentágono ABCDE.

a) 215 mm
b) 210 mm
c) 244 mm
d) 225 mm
e) 220 mm

Sugestão: Veja Propriedade fundamental da equivalência, no volume 2.



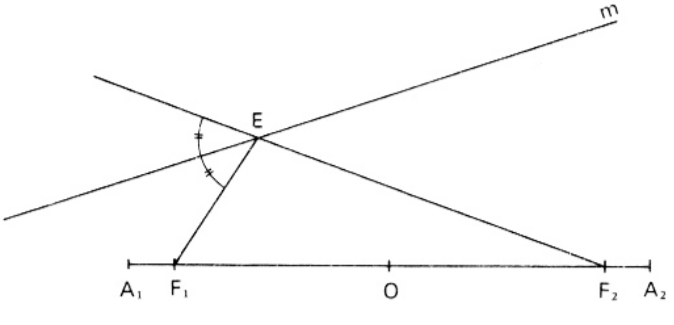
Resposta: e

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Na construção indicada, primeiro transformou-se o pentágono ABCDE no quadrilátero ABC'E, fazendo C deslocar-se paralelamente a $\overline{BD}$ até obter C' em **r**. Depois, determinou-se F em **s**, fazendo C' deslocar-se paralelamente a $\overline{BE}$.

9 (UM-SP) Na elipse, sendo A_1 e A_2 os vértices, F_1 e F_2 os focos, O o centro e E um ponto da elipse, a reta **m** é:

a) secante
b) tangente
c) normal
d) externa
e) n.d.a.



Resposta: b

Questões de vestibulares

10 (ITA-SP) São dados do problema:

- O ponto P' pertence a uma elipse.
- O ponto F é, simultaneamente, foco desta elipse e de uma parábola.
- A reta **s** é suporte do eixo da elipse e da parábola.
- O ponto A é o vértice da parábola.

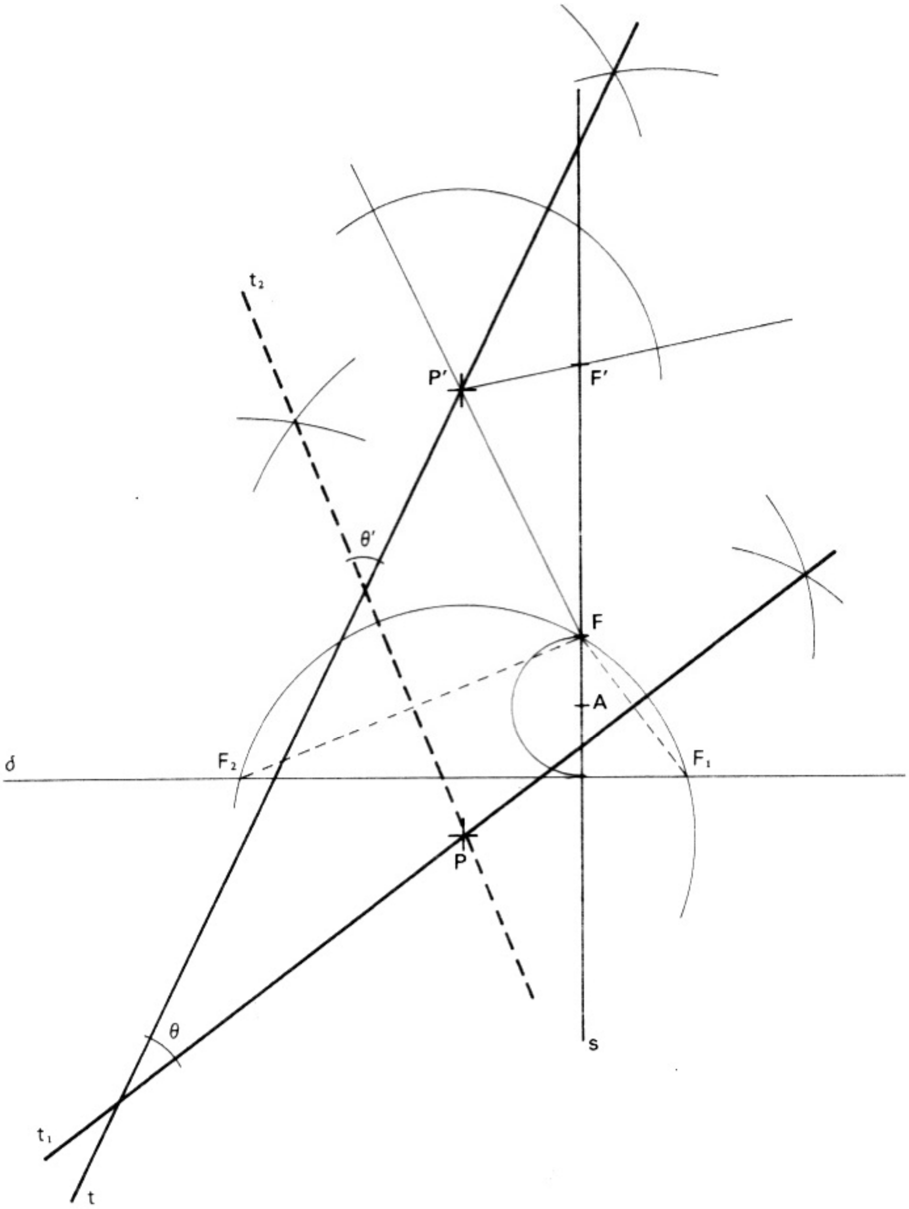
Pede-se o menor ângulo formado pela tangente à parábola, passando pelo ponto P, e a tangente à elipse, passando pelo ponto P'.

a) 50°
c) 27°
e) 13°
b) 58°
d) 48°

Observação: Como pelo ponto P passam duas tangentes à parábola (veja E12.**5**, volume 2) é necessário traçar as duas e verificar qual delas forma o menor ângulo com a tangente à elipse em P'.

Figura auxiliar e anotações

Observação: Como $\theta' > \theta$, deve-se tomar θ para resposta.



Resposta: c ($\theta \simeq 27°$)

Questões de vestibulares

11 (ITA-SP) Dado o eixo AB de uma hipérbole regular, os focos F e F', bem como um ponto P, como mostra a figura, determinar, aproximadamente, o menor ângulo formado pelas retas que serão tangentes aos ramos da hipérbole e que contêm P.

a) 48°
b) 53°
c) 58°
d) 60°
e) 63°

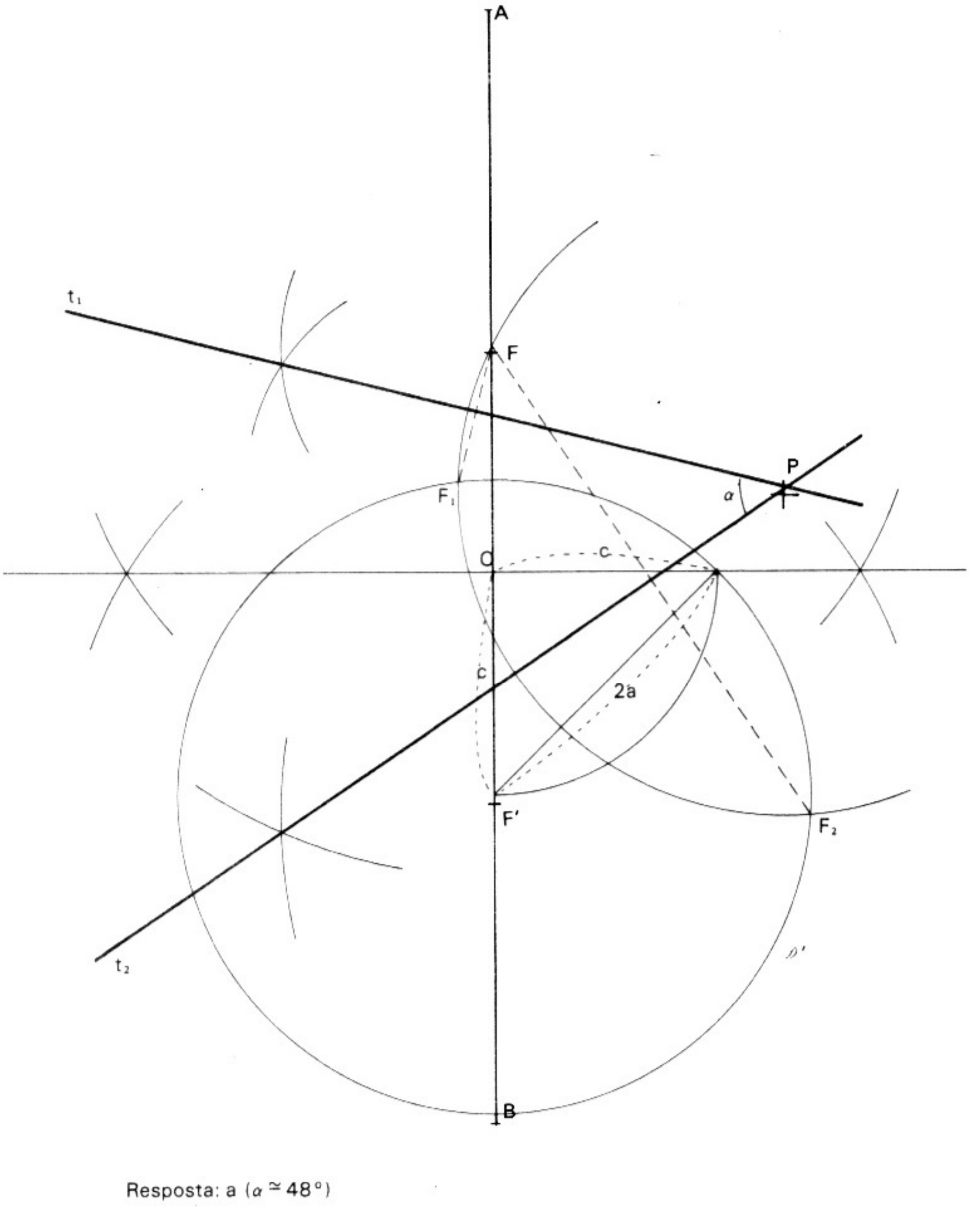
Observação: Uma hipérbole é chamada regular ou eqüilátera quando o diâmetro principal é congruente ao diâmetro imaginário, isto é, $2a = 2b$.

Sugestão: Veja E11.**8**, volume 2.

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Como $a = b$, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = a^2 + a^2$$
$$c^2 = 2a^2$$
$$a = \frac{c\sqrt{2}}{2}$$
$$\therefore\ 2a = c\sqrt{2}$$



Resposta: a ($\alpha \simeq 48°$)

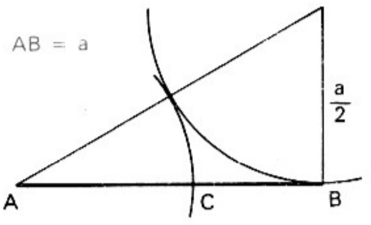
Questões de vestibulares

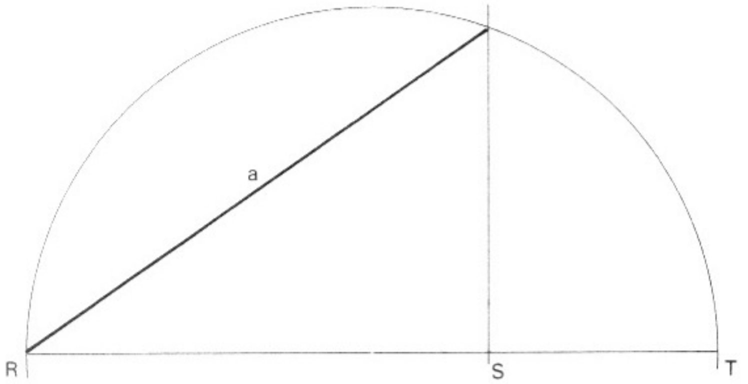
Figura auxiliar e anotações

12 (ITA-SP) Os lados e a base de um triângulo isósceles são os segmentos áureos da média proporcional de dois segmentos que medem, respectivamente, 60 mm e 90 mm. Determinar o semiperímetro desse triângulo considerando o menor segmento como a base.

a) 50 mm
c) 70 mm
e) 59 mm
b) 55 mm
d) 64 mm

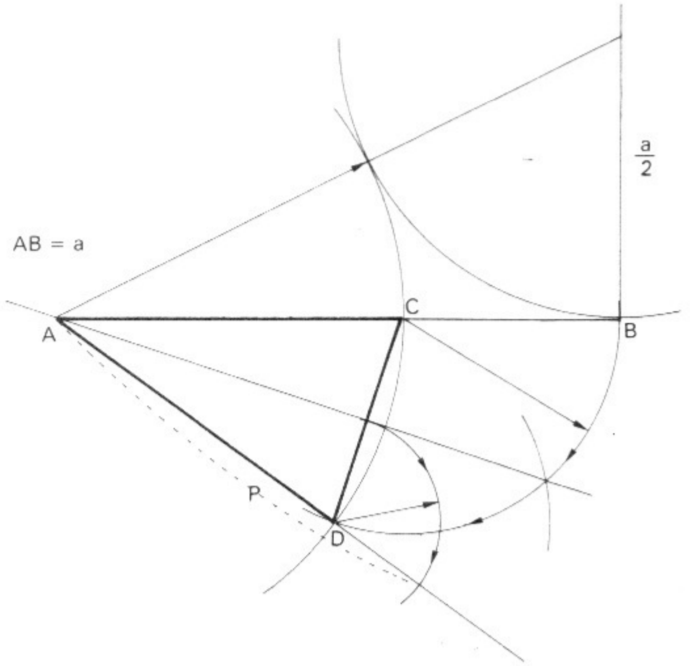
Observação: Embora todo segmento possua um único segmento áureo, o examinador refere-se ao segmento CB da figura abaixo, como sendo também um áureo de $\overline{AB}$.





RS = 60 mm
RT = 90 mm

$a^2 = RS \cdot RT$

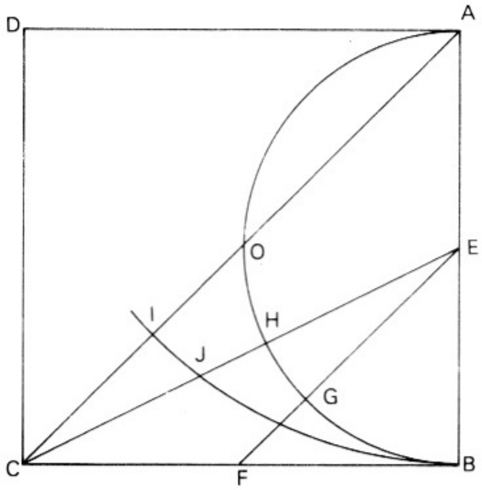


Resposta: e (p ≃ 59 mm)

Questões de vestibulares

13 (UM-SP) O segmento áureo de AB é:

a) FG
b) CH
c) CI
d) CJ
e) n.d.a.



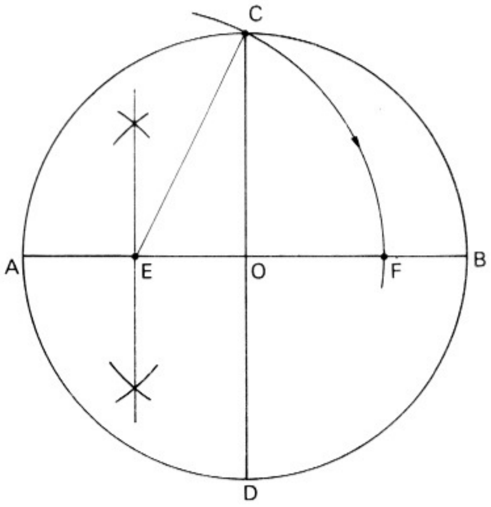
Resposta: b

Figura auxiliar e anotações

Observação:
Relembre que, para construir o áureo de um segmento **a**, faz-se o seguinte:
1.º) constrói-se um triângulo retângulo de catetos **a** e $\frac{a}{2}$.
2.º) subtrai-se $\frac{a}{2}$ da hipotenusa. O segmento restante na hipotenusa é o áureo de **a**.
Neste problema, o segmento que responde a essa construção é $\overline{CH}$.

14 (UM-SP) O decágono regular inscrito na circunferência tem por lado:

a) $\overline{BF}$
b) $\overline{CF}$
c) $\overline{OF}$
d) $\overline{EO}$
e) $\overline{CE}$



Resposta: c

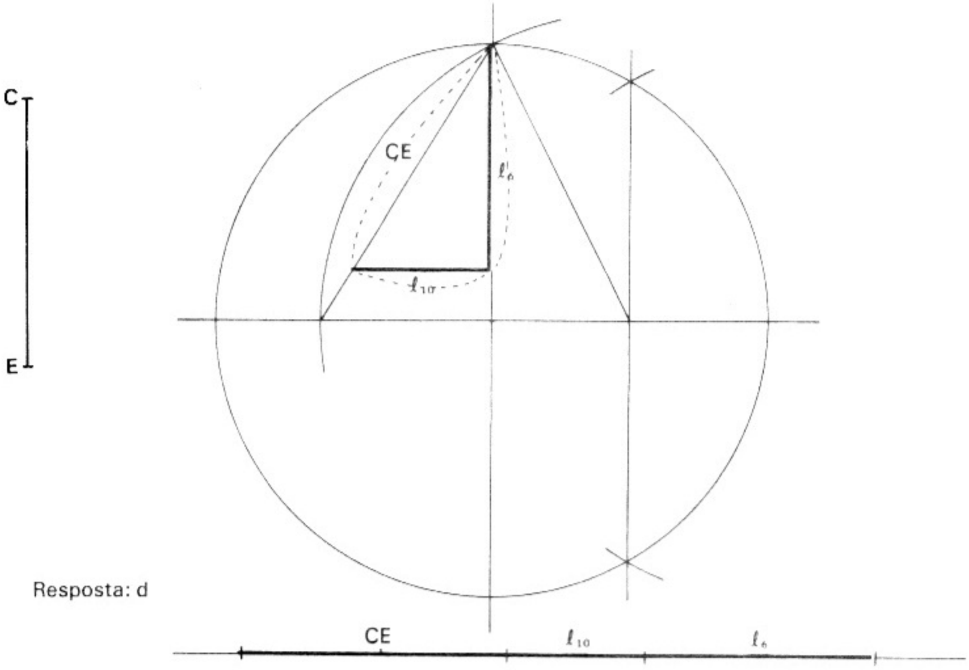
Observação:
Aproveite para relembrar que o ℓ_5 é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos ℓ_6 e ℓ_{10}. Assim, na figura dada, tem-se:
OC = ℓ_6
OF = ℓ_{10}
CF = ℓ_5

Questões de vestibulares

15 (ITA-SP) O segmento CE dado é o lado de um pentágono inscrito em um círculo. Construa um triângulo retângulo, sabendo-se que sua hipotenusa é igual ao segmento CE e que os catetos são lados de polígonos inscritos no mesmo círculo. Qual é o perímetro do triângulo?

a) 62 mm c) 90 mm e) 68 mm
b) 75 mm d) 83 mm

Sugestão: Veja E2.**7**, volume 3.



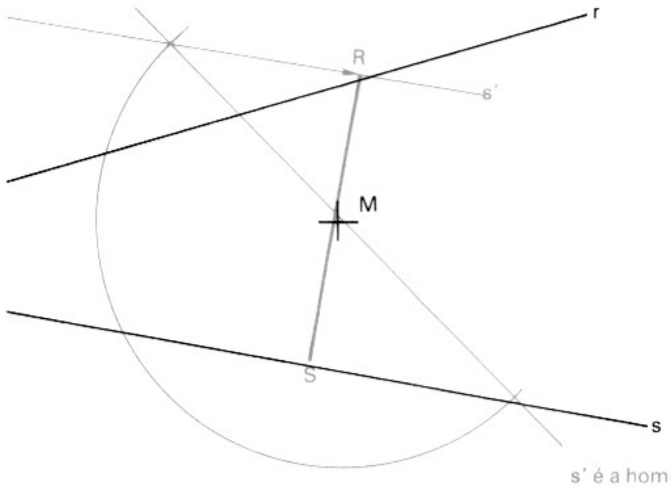
Resposta: d

16 (ITA-SP) Dadas duas retas **r** e **s** e um ponto M entre elas, pede-se determinar dois pontos R e S nas retas, sendo MR = MS. O valor do segmento RS é:

a) 22 c) 30 e) 38
b) 42 d) 35

Observação: O enunciado não deixa claro, mas o que se pede é $\overline{RS}$, de modo que M seja seu ponto médio.

Sugestão: Veja E3.**8**, volume 2.



s' é a homotética de s com centro M e razão k = −1.

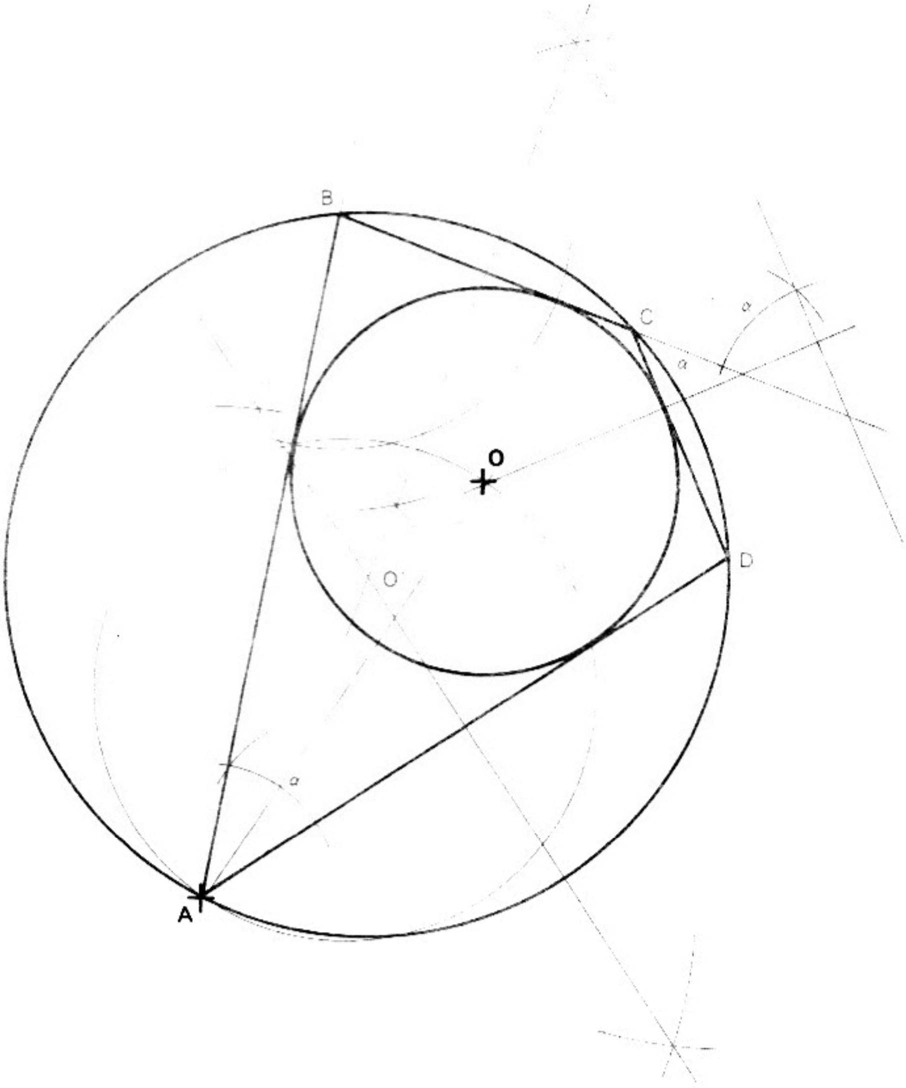
Resposta: e

Questões de vestibulares

17 (ITA-SP) Construir um quadrilátero ABCD que seja inscritível e tal que nele seja inscrita uma circunferência de centro O e raio r = 25 mm. Determinar o raio da circunferência que circunscreve o quadrilátero, sabendo-se que seu lado $\overline{AB}$ mede 90 mm.

a) 42 mm
b) 47 mm
c) 52 mm
d) 57 mm
e) 61 mm

Sugestão: Se o quadrilátero é inscritível, então $\hat{A} + \hat{C} = 180°$.



Resposta: b

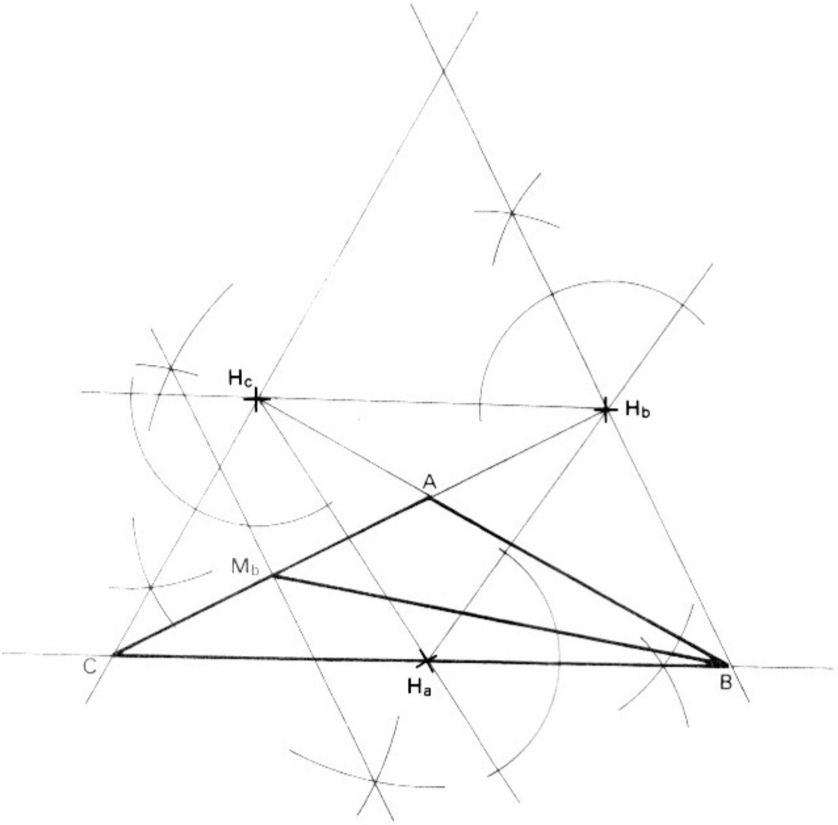
Questões de vestibulares

Figura auxiliar e anotações

18 (ITA-SP) Determinar o comprimento da mediana em relação ao vértice B de um triângulo ABC, do qual conhecemos os pés das alturas H_a, H_b e H_c, sabendo-se que o ângulo A é obtuso.

a) 56 mm
b) 61 mm
c) 72 mm
d) 75 mm
e) 80 mm

Sugestão: Veja E4.1, volume 3.



Resposta: b

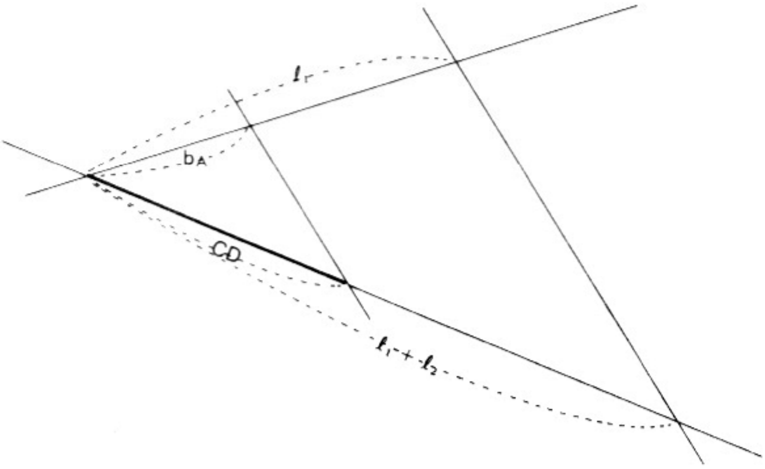
Questões de vestibulares

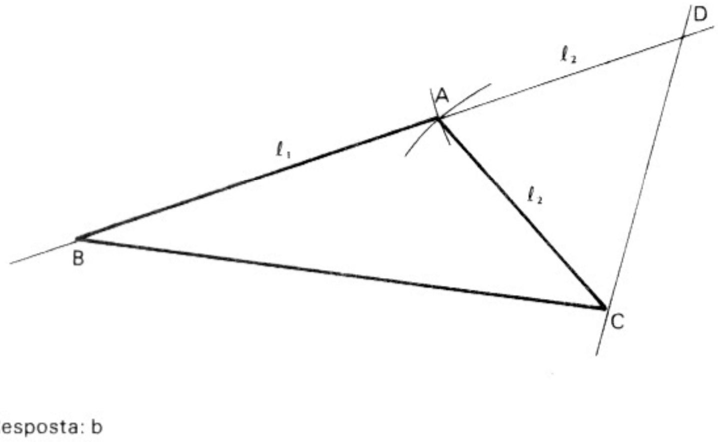
19 (ITA-SP) Determinar o comprimento do lado oposto ao vértice A de um triângulo qualquer, sendo dados os lados ℓ_1 e ℓ_2, que definem o vértice A. É conhecido também o comprimento da bissetriz b_A, de origem A.

a) 55 mm
c) 60 mm
e) 78 mm
b) 70 mm
d) 45 mm

Sugestão: Veja E4.**16**, volume 3.

$\ell_1 = 50$ mm $\ell_2 = 33$ mm $b_A = 22$ mm





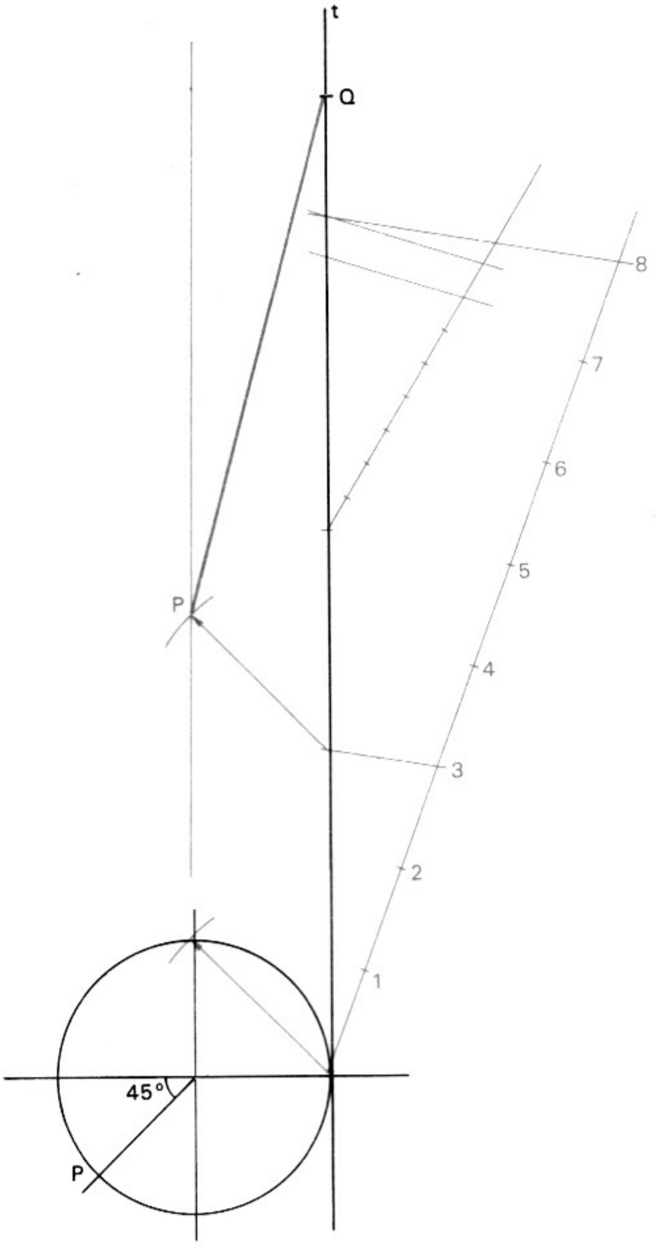
Resposta: b

Questões de vestibulares

Figura auxiliar e anotações

20 (ITA-SP) São dados do problema: uma circunferência de raio **r**, um ponto P que lhe pertence, uma reta **t** a ela tangente e um ponto Q dessa reta. Girando-se a circunferência 135° sobre a reta, sem deslizar, determinar a distância, nesse momento, do ponto P ao ponto Q.

a) 76 mm
b) 50 mm
c) 70 mm
d) 63 mm
e) 55 mm



Resposta: c

Questões de vestibulares

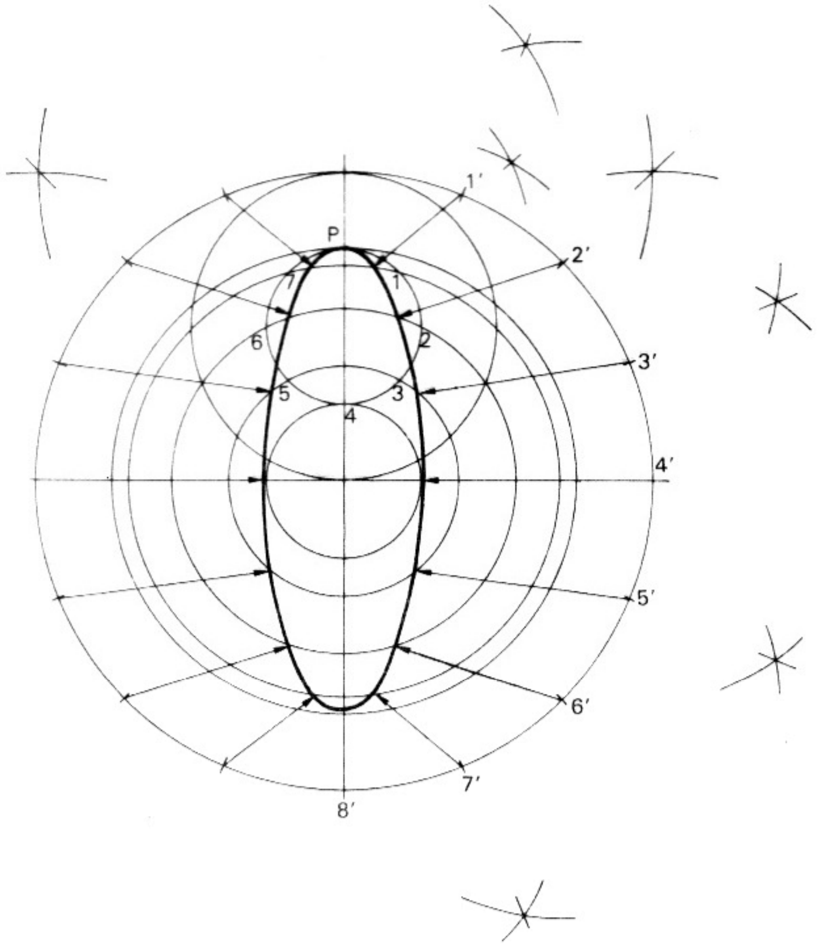
Figura auxiliar e anotações

21 (ITA-SP) Construa uma hipociclóide encurtada de tal forma que a cíclica seja uma elipse, sabendo-se que os pares de números dados correspondem respectivamente ao raio do círculo diretor e ao raio do círculo gerador da curva. Qual é o par de valores correto?

a) 40 e 20 mm
b) 45 e 15 mm
c) 50 e 20 mm
d) 40 e 16 mm
e) 60 e 20 mm

Observação: Esta é uma questão bastante interessante, já que primeiro você deve saber qual é a alternativa correta para depois construir a curva. Além disso, o raio da **circunferência do ponto gerador** é arbitrário.

Sugestão: Veja hipociclóide elíptica, no volume 3.



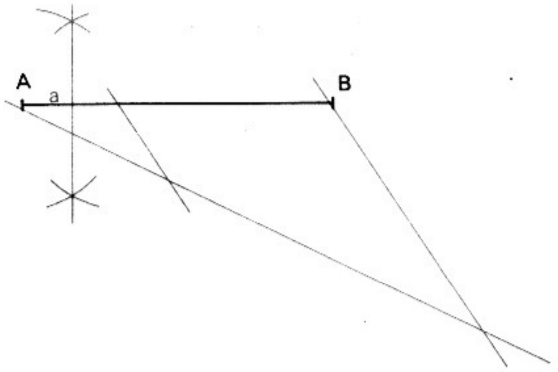
Resposta: a (Para se obter uma hipociclóide elíptica deve-se ter $r = \frac{R}{2}$.)

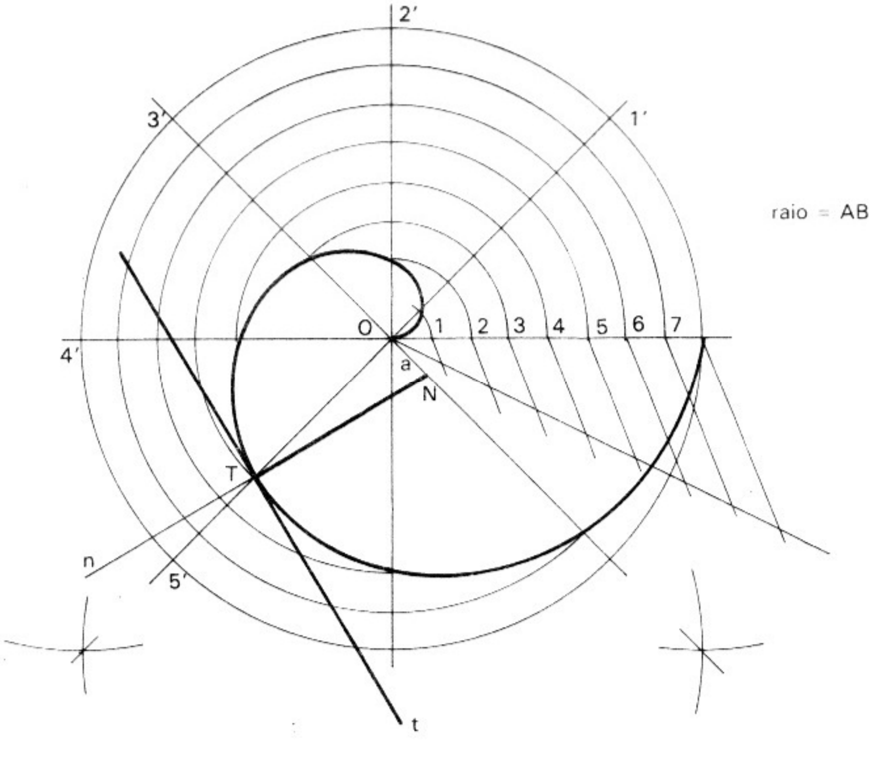
Questões de vestibulares

Figura auxiliar e anotações

22 (ITA-SP) Dado o passo AB, construir a espiral de Arquimedes, usando 8 pontos. Pelo 5.º ponto traçar uma tangente a essa espiral. A normal a essa tangente mede:

a) 20
b) 23
c) 30
d) 26
e) 19




2'
3'
1'
raio = AB
O
1
2
3
4
5
6
7
4'
a
N
T
n
5'
t

Resposta: d (TN ≃ 26 mm)

Questões de vestibulares

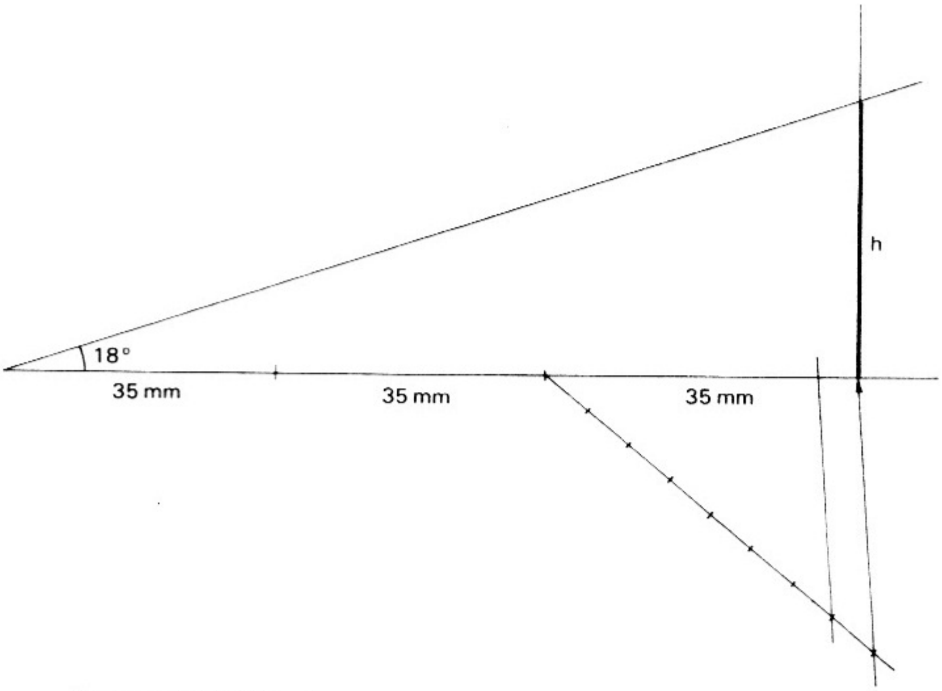
Figura auxiliar e anotações

23 (ITA-SP) Determinar graficamente o avanço de um parafuso, por volta, conhecendo-se:

- o ângulo da hélice da rosca, que é igual a 18°.
- o diâmetro nominal do parafuso, igual a 35 mm.

a) 40 mm
b) 48 mm
c) 45 mm
d) 36 mm
e) 30 mm

Observação: Diâmetro nominal é o diâmetro da superfície cilíndrica em que se desenvolve a hélice.



Resposta: d (h ≃ 36 mm)

impressão e acabamento por
W. Roth & Cia. Ltda.